Hochschule RheinMain

Diskrete Strukturen

für die Studiengänge

- Angewandte Informatik
- Technische Informatik

06 Grundlagen der Graphentheorie

Prof. Dr. David Sabel

Wintersemester 2024/25

Stand der Folien: 6. Januar 2025

Inhalt

GRAPHEN UND GRUNDLEGENDE BEGRIFFE

- Ungerichtete und gerichtete Graphen
- Varianten und besondere Graphen
- Operationen auf Graphen
- Zusammenhang
- Knotengrad
- Isomorphie

Graph

Hochschule RheinMain

Definition

Ein (ungerichteter) Graph G ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei

- V eine Menge von Knoten (manchmal auch „Ecken“, engl. „vertexes“,) ist,
- $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u \in V, v \in V\}$ eine Menge von Kanten (engl. „edges“) ist.

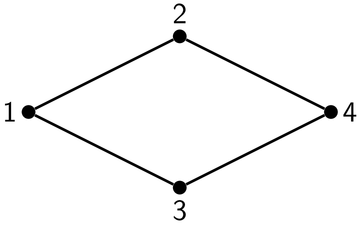
Wenn V endlich ist, spricht man von einem endlichen Graph.

- Wir behandeln nur endliche Graphen.
- Kante = Verbindung zwischen zwei Knoten.
- Durch Kante verbundene Knoten sind adjazent oder benachbart.
- Graphisch: Knoten als Punkte oder Kreise (tlw. mit Namen),
  Kanten als Linien zwischen den Knoten

Beispiel

Hochschule RheinMain

$$G = (\{1,2,3,4\}, \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,4\}\})$$



Knotengrad

Hochschule RheinMain

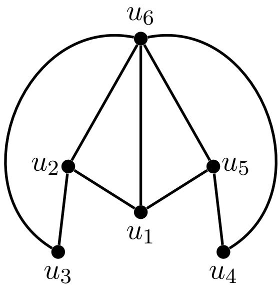
Definition

Für Graph $G = (V, E)$ ist der Grad eines Knotens $u \in V$, geschrieben $\deg_G(u)$:

$$\deg_G(u) := |\{v \mid \{u, v\} \in E\}|$$

Wenn $\deg_G(u) = 0$, so nennt man u isoliert.

Beispiel



$$
\begin{aligned}
\deg_G(u_1) &= 3\\
\deg_G(u_2) &= 3\\
\deg_G(u_3) &= 2\\
\deg_G(u_4) &= 2\\
\deg_G(u_5) &= 3\\
\deg_G(u_6) &= 5
\end{aligned}
$$

Gerichtete Graphen

Hochschule RheinMain

Definition (Gerichteter Graph)

Ein gerichteter Graph G ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei

- V eine Menge von Knoten ist und
- $E \subseteq V \times V$ eine Menge von gerichteten Kanten ist.

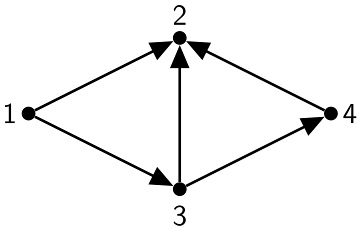
Gerichtete Graphen = Kanten haben eine Richtung, werden als Pfeile gezeichnet

Grad: Für gerichtete Graphen kann man den Ausgrad und den Ingrad eines Knotens unterscheiden.

Beispiel

Hochschule RheinMain

$G = (\{1,2,3,4\}, \{(1,2),(1,3),(3,2),(3,4),(4,2)\})$



Ingrade

$$\begin{aligned}
\mathrm{indeg}_G(1) &= 0\\
\mathrm{indeg}_G(2) &= 3\\
\mathrm{indeg}_G(3) &= 1\\
\mathrm{indeg}_G(4) &= 1
\end{aligned}$$

Ausgrade

$$\begin{aligned}
\mathrm{outdeg}_G(1) &= 2\\
\mathrm{outdeg}_G(2) &= 0\\
\mathrm{outdeg}_G(3) &= 2\\
\mathrm{outdeg}_G(4) &= 1
\end{aligned}$$

Weitere Varianten von Graphen

Hochschule RheinMain

- Multigraph: Mehrere Kanten zwischen den selben Knoten erlaubt, Kanten sind eine Multimenge statt einer Menge.
- Schlingen: eine Kante von und zum selben Knoten. Unsere ungerichteten Graphen erlauben keine Schlingen, die gerichteten Schon
- Graph ohne Schlingen heißt schlingenfrei, Graph ohne Schlingen und ohne Mehrfachkanten heißt schlicht.
- Wir betrachten im wesentlichen schlichte, ungerichtete Graphen und machen deutlich, wenn wir andere Graphen betrachten.

Besondere Graphen

- Nullgraph: Graph mit leerer Kantenmenge

  Im Nullgraph ist der Grad jedes Knotens 0

Besondere Graphen

- Nullgraph: Graph mit leerer Kantenmenge

  Im Nullgraph ist der Grad jedes Knotens 0
- Vollständiger Graph: Graph mit maximaler Kantenanzahl, d.h.

$$E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}.$$

- Der vollständige Graph mit n Knoten wird als K_n bezeichnet.

Besondere Graphen

- Nullgraph: Graph mit leerer Kantenmenge

  Im Nullgraph ist der Grad jedes Knotens 0
- Vollständiger Graph: Graph mit maximaler Kantenanzahl, d.h.

$$E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}.$$

- Der vollständige Graph mit n Knoten wird als K_n bezeichnet.

K_1

Besondere Graphen

- Nullgraph: Graph mit leerer Kantenmenge

  Im Nullgraph ist der Grad jedes Knotens 0
- Vollständiger Graph: Graph mit maximaler Kantenanzahl, d.h.

$$E = \{\{u,v\} \mid u,v \in V\}.$$

- Der vollständige Graph mit n Knoten wird als K_n bezeichnet.

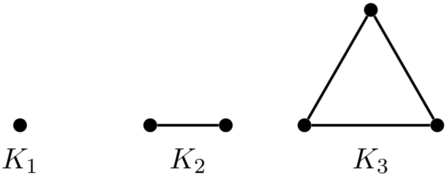
Besondere Graphen

- Nullgraph: Graph mit leerer Kantenmenge

  Im Nullgraph ist der Grad jedes Knotens 0
- Vollständiger Graph: Graph mit maximaler Kantenanzahl, d.h.

$$E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}.$$

- Der vollständige Graph mit n Knoten wird als K_n bezeichnet.



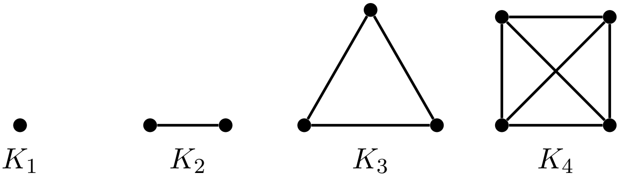
Besondere Graphen

- Nullgraph: Graph mit leerer Kantenmenge

  Im Nullgraph ist der Grad jedes Knotens 0
- Vollständiger Graph: Graph mit maximaler Kantenanzahl, d.h.

$$E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}.$$

- Der vollständige Graph mit n Knoten wird als K_n bezeichnet.



Besondere Graphen

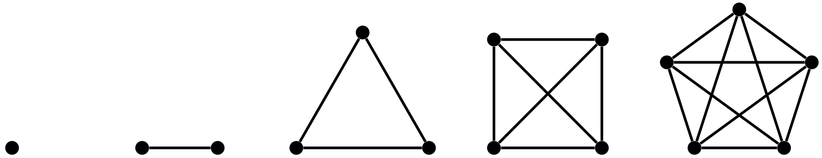
- Nullgraph: Graph mit leerer Kantenmenge

  Im Nullgraph ist der Grad jedes Knotens 0

- Vollständiger Graph: Graph mit maximaler Kantenanzahl, d.h.

$$E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}.$$

- Der vollständige Graph mit n Knoten wird als K_n bezeichnet.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Besondere Graphen

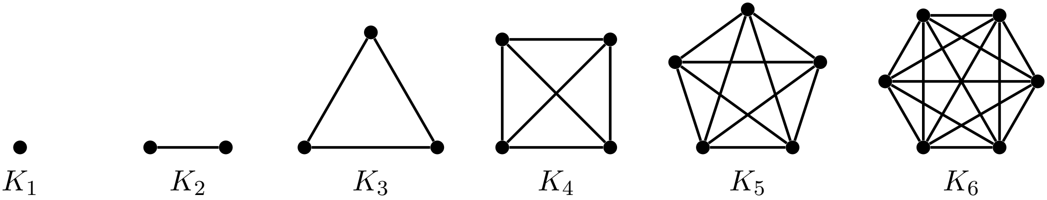
Hochschule RheinMain

- Nullgraph: Graph mit leerer Kantenmenge

  Im Nullgraph ist der Grad jedes Knotens 0
- Vollständiger Graph: Graph mit maximaler Kantenanzahl, d.h.

$$E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}.$$

- Der vollständige Graph mit n Knoten wird als K_n bezeichnet.



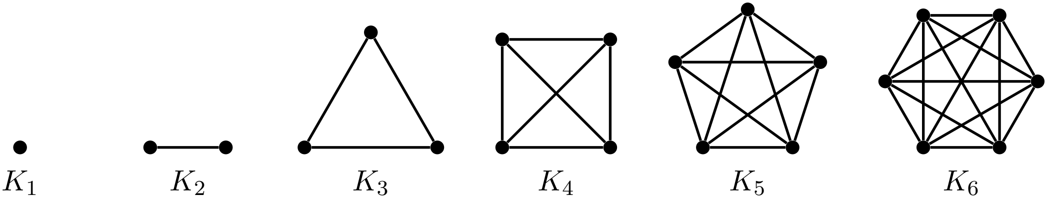
Besondere Graphen

- Nullgraph: Graph mit leerer Kantenmenge

  Im Nullgraph ist der Grad jedes Knotens 0
- Vollständiger Graph: Graph mit maximaler Kantenanzahl, d.h.

$$E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}.$$

- Der vollständige Graph mit n Knoten wird als K_n bezeichnet.



In K_n ist der Grad jedes Knotens $\deg_{K_n}(u) = n - 1$.

Kantenanzahl vollständiger Graphen

Satz

Der vollständige Graph K_n hat $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

Beweis: Vollständige Induktion über die Knotenanzahl n.

Kantenanzahl vollständiger Graphen

Hochschule RheinMain

Satz

Der vollständige Graph K_n hat $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

Beweis: Vollständige Induktion über die Knotenanzahl n.

- Induktionsbasis: K_1 hat einen Knoten und 0 Kanten.

Kantenanzahl vollständiger Graphen

Hochschule RheinMain

Satz

Der vollständige Graph K_n hat $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

Beweis: Vollständige Induktion über die Knotenanzahl n.

- Induktionsbasis: K_1 hat einen Knoten und 0 Kanten.
- Induktionsschritt: Induktionsannahme: K_n hat $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

  Betrachte K_{n+1}

Kantenanzahl vollständiger Graphen

Hochschule **RheinMain**

Satz

Der vollständige Graph K_n hat $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

Beweis: Vollständige Induktion über die Knotenanzahl n.

- Induktionsbasis: K_1 hat einen Knoten und 0 Kanten.
- Induktionsschritt: Induktionsannahme: K_n hat $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

  Betrachte K_{n+1} und einen beliebigen Knoten v aus K_{n+1}.

Kantenanzahl vollständiger Graphen

Satz

Der vollständige Graph K_n hat $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

Beweis: Vollständige Induktion über die Knotenanzahl n.

- Induktionsbasis: K_1 hat einen Knoten und 0 Kanten.
- Induktionsschritt: Induktionsannahme: K_n hat $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

  Betrachte K_{n+1} und einen beliebigen Knoten v aus K_{n+1}.

  Dieser hat n benachbarte Knoten.

Kantenanzahl vollständiger Graphen

Hochschule RheinMain

Satz

Der vollständige Graph K_n hat $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

Beweis: Vollständige Induktion über die Knotenanzahl n.

- Induktionsbasis: K_1 hat einen Knoten und 0 Kanten.
- Induktionsschritt: Induktionsannahme: K_n hat $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

  Betrachte K_{n+1} und einen beliebigen Knoten v aus K_{n+1}.

  Dieser hat n benachbarte Knoten.

  Entferne Knoten v und alle Kanten zwischen v und seinen Nachbarn (n viele).

Kantenanzahl vollständiger Graphen

Satz

Der vollständige Graph K_n hat $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

Beweis: Vollständige Induktion über die Knotenanzahl n.

- Induktionsbasis: K_1 hat einen Knoten und 0 Kanten.
- Induktionsschritt: Induktionsannahme: K_n hat $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

  Betrachte K_{n+1} und einen beliebigen Knoten v aus K_{n+1}.

  Dieser hat n benachbarte Knoten.

  Entferne Knoten v und alle Kanten zwischen v und seinen Nachbarn (n viele).

  Daraus entsteht K_n mit $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

Kantenanzahl vollständiger Graphen

Hochschule RheinMain

Satz

Der vollständige Graph K_n hat $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

Beweis: Vollständige Induktion über die Knotenanzahl n.

- Induktionsbasis: K_1 hat einen Knoten und 0 Kanten.
- Induktionsschritt: Induktionsannahme: K_n hat $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

  Betrachte K_{n+1} und einen beliebigen Knoten v aus K_{n+1}.

  Dieser hat n benachbarte Knoten.

  Entferne Knoten v und alle Kanten zwischen v und seinen Nachbarn (n viele).

  Daraus entsteht K_n mit $n \cdot (n-1)/2$ Kanten.

  Daher hat K_{n+1} $n + n \cdot (n-1)/2 = (2n + n \cdot (n-1))/2 = (n+1) \cdot n/2$ Kanten. $\square$

Operationen auf Graphen

Hochschule RheinMain

Definition

Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ Graphen.

- G_2 ist ein Teilgraph von G_1, wenn gilt $V_2 \subseteq V_2$ und $E_2 \subseteq E_1$

Operationen auf Graphen

Hochschule RheinMain

Definition

Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ Graphen.

- G_2 ist ein Teilgraph von G_1, wenn gilt $V_2 \subseteq V_2$ und $E_2 \subseteq E_1$
- $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ ist die Vereinigung von G_1 und G_2.

Operationen auf Graphen

Hochschule RheinMain

Definition

Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ Graphen.

- G_2 ist ein Teilgraph von G_1, wenn gilt $V_2 \subseteq V_2$ und $E_2 \subseteq E_1$
- $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ ist die Vereinigung von G_1 und G_2.
- $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ ist der Schnitt von G_1 und G_2.

Operationen auf Graphen

Hochschule RheinMain

Definition

Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ Graphen.

- G_2 ist ein Teilgraph von G_1, wenn gilt $V_2 \subseteq V_2$ und $E_2 \subseteq E_1$
- $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ ist die Vereinigung von G_1 und G_2.
- $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ ist der Schnitt von G_1 und G_2.

Für Graph $G = (V, E)$

- ist der Komplementgraph $\overline{G}$ von G definiert als $G = (V, \overline{E})$ mit $\overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$

Komplementgraph: Füge alle fehlenden Kanten hinzu + lösche alle bestehenden Kanten

Operationen auf Graphen

Hochschule RheinMain

Definition

Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ Graphen.

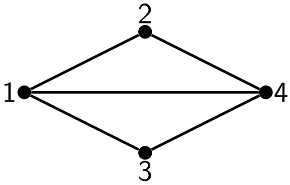
- G_2 ist ein Teilgraph von G_1, wenn gilt $V_2 \subseteq V_2$ und $E_2 \subseteq E_1$
- $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ ist die Vereinigung von G_1 und G_2.
- $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ ist der Schnitt von G_1 und G_2.

Für Graph $G = (V, E)$

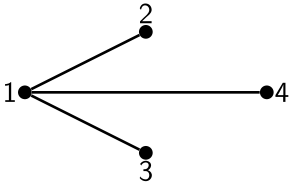
- ist der Komplementgraph $\overline{G}$ von G definiert als $G = (V, \overline{E})$ mit $\overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$
- und Knotenmenge $V' \subseteq V$ ist der von V' induzierte Teilgraph von G: $G' = (V', \{\{u, v\} \in E \mid u \in V', v \in V'\})$

Komplementgraph: Füge alle fehlenden Kanten hinzu + lösche alle bestehenden Kanten

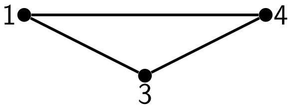
Beispiel



G

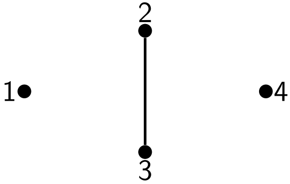


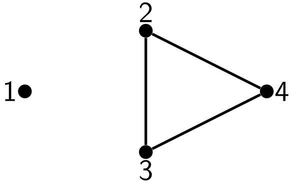
G_1 ein Teilgraph von G

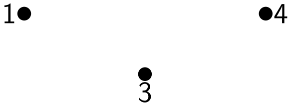


G_2 der von $\{1, 3, 4\}$ induzierte Teilgraph von G

Die Komplementgraphen von G, G_1, G_2:







Zusammenhang

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Weg (oder Pfad) von Knoten v_1 nach Knoten v_k ist eine Menge von Kanten $\{\{v_1, v_2\}\,\{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}\} \subseteq E$.

Wenn $v_1 = v_k$, dann ist der Weg ein Kreis.

Wenn G einen Kreis enthält, so heißt G zyklisch, anderenfalls G kreisfrei oder azyklisch.

G ist zusammenhängend, wenn es für alle $u, v \in V$ mit $u \neq v$ einen Weg von u nach v gibt.

Ist ein Graph nicht zusammenhängend, so zerfällt er in Zusammenhangskomponenten.

Zusammenhang

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Weg (oder Pfad) von Knoten v_1 nach Knoten v_k ist eine Menge von Kanten $\{\{v_1, v_2\}\{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}\} \subseteq E$.

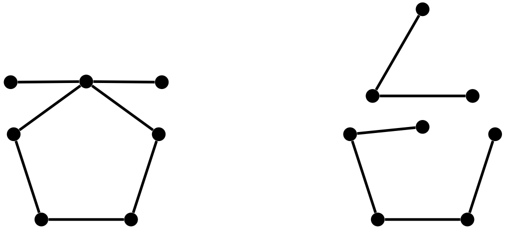
Wenn $v_1 = v_k$, dann ist der Weg ein Kreis.

Wenn G einen Kreis enthält, so heißt G zyklisch, anderenfalls G kreisfrei oder azyklisch.

G ist zusammenhängend, wenn es für alle $u, v \in V$ mit $u \neq v$ einen Weg von u nach v gibt.

Ist ein Graph nicht zusammenhängend, so zerfällt er in Zusammenhangskomponenten.

Beispiele:



Gleichheit und Isomorphie

Hochschule RheinMain

Definition

Graphen $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$ sind gleich ($G_1 = G_2$), wenn $V_1 = V_2$ und $E_1 = E_2$.

Gleichheit und Isomorphie

Hochschule RheinMain

Definition

Graphen $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$ sind gleich ($G_1 = G_2$), wenn $V_1 = V_2$ und $E_1 = E_2$.

Sie sind isomorph ($G_1 \cong G_2$), wenn es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt, sodass für alle $u, v \in V_1$ gilt: $\{u, v\} \in E_1$ genau dann, wenn $\{f(u), f(v)\} \in E_2$.

Gleichheit und Isomorphie

Hochschule RheinMain

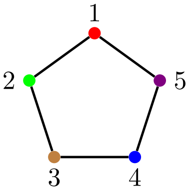
Definition

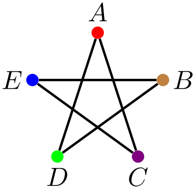
Graphen $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$ sind gleich ($G_1 = G_2$), wenn $V_1 = V_2$ und $E_1 = E_2$.

Sie sind isomorph ($G_1 \cong G_2$), wenn es eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ gibt, sodass für alle $u, v \in V_1$ gilt: $\{u, v\} \in E_1$ genau dann, wenn $\{f(u), f(v)\} \in E_2$.

Beispiel: $G_1 \neq G_2$ aber $G_1 \cong G_2$

$$G_1 = (V_1, E_1) = (\{1,2,3,4,5\}, \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,1\}\}) \text{ und}$$
$$G_2 = (V_2, E_2) = (\{A,B,C,D,E\}, \{\{A,C\},\{C,E\},\{B,E\},\{B,D\},\{A,D\}\})$$



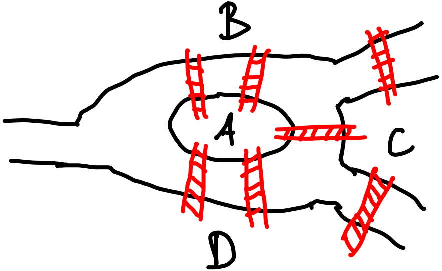


Bijektion $f = \{\, 1 \mapsto A,\; 2 \mapsto D,\; 3 \mapsto B,\; 4 \mapsto E,\; 5 \mapsto C \}$

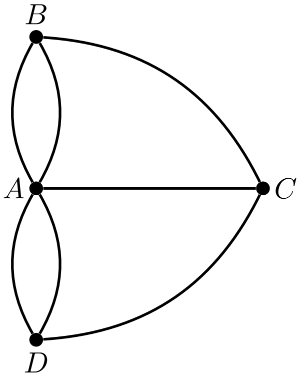
EULERGRAPHEN UND HAMILTONKREISE

- Königsberger Brückenproblem
- Eulertour
- Eulerweg
- Hamiltonkreis

Königsberger Brückenproblem



Skizze



Modellierung als Multigraph

Leonard Euler fragte sich, ob es einen Rundweg gibt, der alle Brücken genau einmal überquert und dort endet, wo man begonnen hat.

Eulertour

Hochschule RheinMain

Definition

Eine Eulertour (Eulerkreis) in einem Graph (oder Multigraph) $G = (V, E)$ ist Kreis von einem Knoten u zum selben Knoten u, der jede Kante aus E genau einmal enthält.

Ein Graph heißt eulersch, wenn er eine Eulertour enthält.

Königsberger Brückenproblem wäre lösbar, wenn der gezeigte Graph eulersch ist.

Satz von Euler

Satz

Wenn ein zusammenhängender Graph (oder Multigraph) eulersch ist, dann ist der Grad jedes Knoten gerade.

Beweis.

Satz von Euler

Satz

Wenn ein zusammenhängender Graph (oder Multigraph) eulersch ist, dann ist der Grad jedes Knoten gerade.

Beweis.

- Sei $G = (V, E)$ ein eulerscher Graph und $v \in V$

Satz von Euler

Satz

Wenn ein zusammenhängender Graph (oder Multigraph) eulersch ist, dann ist der Grad jedes Knoten gerade.

Beweis.

- Sei $G = (V, E)$ ein eulerscher Graph und $v \in V$
- Da G eulersch und zusammenhängend ist, durchläuft die Tour den Knoten v.

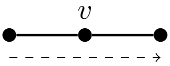
Satz von Euler

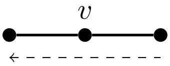
Hochschule RheinMain

Satz

Wenn ein zusammenhängender Graph (oder Multigraph) eulersch ist, dann ist der Grad jedes Knoten gerade.

Beweis.

- Sei $G = (V, E)$ ein eulerscher Graph und $v \in V$
- Da G eulersch und zusammenhängend ist, durchläuft die Tour den Knoten v.
- Durchlaufen durch v verwendet zwei Kanten: 

oder 

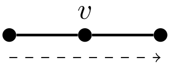
.

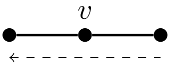
Satz von Euler

Satz

Wenn ein zusammenhängender Graph (oder Multigraph) eulersch ist, dann ist der Grad jedes Knoten gerade.

Beweis.

- Sei $G = (V, E)$ ein eulerscher Graph und $v \in V$
- Da G eulersch und zusammenhängend ist, durchläuft die Tour den Knoten v.
- Durchlaufen durch v verwendet zwei Kanten: 

oder 

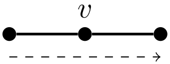
.
- Daher folgt $\deg_G(v) = 2 \cdot k$, wobei k die Anzahl an Durchläufen durch v ist.

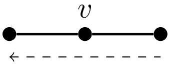
Satz von Euler

Satz

Wenn ein zusammenhängender Graph (oder Multigraph) eulersch ist, dann ist der Grad jedes Knoten gerade.

Beweis.

- Sei $G = (V, E)$ ein eulerscher Graph und $v \in V$
- Da G eulersch und zusammenhängend ist, durchläuft die Tour den Knoten v.
- Durchlaufen durch v verwendet zwei Kanten: 

 oder 

.
- Daher folgt $\deg_G(v) = 2 \cdot k$, wobei k die Anzahl an Durchläufen durch v ist.
- Für Anfangs- und Endknoten zusätzlich 2 Kanten (Loslaufen und Beenden) $\square$

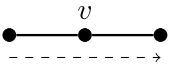
Satz von Euler

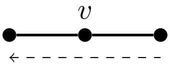
Hochschule **RheinMain**

Satz

Wenn ein zusammenhängender Graph (oder Multigraph) eulersch ist, dann ist der Grad jedes Knoten gerade.

Beweis.

- Sei $G = (V, E)$ ein eulerscher Graph und $v \in V$
- Da G eulersch und zusammenhängend ist, durchläuft die Tour den Knoten v.
- Durchlaufen durch v verwendet zwei Kanten: 

oder 

.
- Daher folgt $\deg_G(v) = 2 \cdot k$, wobei k die Anzahl an Durchläufen durch v ist.
- Für Anfangs- und Endknoten zusätzlich 2 Kanten (Loslaufen und Beenden) $\square$

$\longrightarrow$ Rundweg in Königsberg gibt es nicht, da es mehrere Knoten mit ungeradem Grad gibt.

Satz von Euler (2)

Hochschule RheinMain

Umkehrung gilt auch:

Satz

Wenn in einem zusammenhängenden Graph (oder Multigraph) alle Knoten geraden Grad haben, dann ist G eulersch.

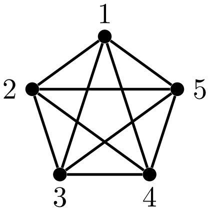
Beweisskizze:

- Start mit beliebigem Knoten. Besuche die benachbarten Knoten u.s.w.
- Dabei werden die verwendeten Kanten als besucht markiert.
- Das findet Kreise, die nicht notwendigerweise alle Kanten benutzen.
- Weitermachen mit nicht verwendet Kanten und erneut suchen
- Alle Kreise verbinden (möglich das Graph zusammenhängend)

→ Daraus folgt, dass die Graphen K_i mit ungeradem i eulersch sind.

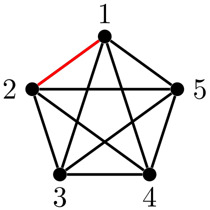
Beispiel

Eine Eulertour im K_5 besucht die Knoten in der Reihenfolge $1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 1$



Beispiel

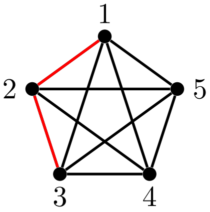
Eine Eulertour im K_5 besucht die Knoten in der Reihenfolge $1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 1$



Beispiel

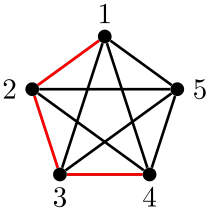
Hochschule RheinMain

Eine Eulertour im K_5 besucht die Knoten in der Reihenfolge $1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 1$



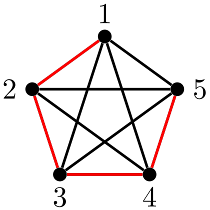
Beispiel

Eine Eulertour im K_5 besucht die Knoten in der Reihenfolge $1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 1$



Beispiel

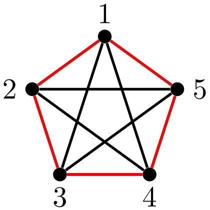
Eine Eulertour im K_5 besucht die Knoten in der Reihenfolge $1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 1$



Beispiel

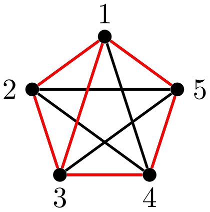
Hochschule RheinMain

Eine Eulertour im K_5 besucht die Knoten in der Reihenfolge $1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 1$



Beispiel

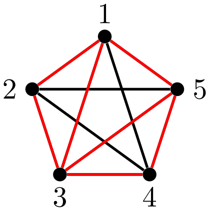
Eine Eulertour im K_5 besucht die Knoten in der Reihenfolge $1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 1$



Beispiel

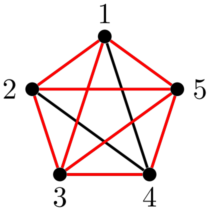
Hochschule RheinMain

Eine Eulertour im K_5 besucht die Knoten in der Reihenfolge $1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 1$



Beispiel

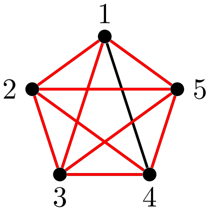
Eine Eulertour im K_5 besucht die Knoten in der Reihenfolge $1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 1$



Beispiel

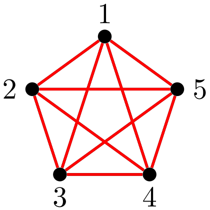
Hochschule RheinMain

Eine Eulertour im K_5 besucht die Knoten in der Reihenfolge $1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 1$



Beispiel

Eine Eulertour im K_5 besucht die Knoten in der Reihenfolge $1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 1$



Eulerweg

Hochschule RheinMain

Definition

Ein Eulerweg ist ein Weg von Knoten u zu Knoten v, der jede Kante genau einmal besucht.

- Unterschied zur Eulertour: Anfangs- und Endknoten können verschieden sein:
- Offener Eulerweg: Eulerweg, der keine Eulertour ist (Anfang und Ende verschieden)

Eulerweg

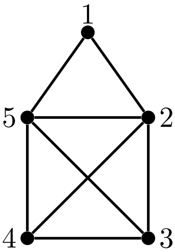
Hochschule RheinMain

Definition

Ein Eulerweg ist ein Weg von Knoten u zu Knoten v, der jede Kante genau einmal besucht.

- Unterschied zur Eulertour: Anfangs- und Endknoten können verschieden sein:
- Offener Eulerweg: Eulerweg, der keine Eulertour ist (Anfang und Ende verschieden)

Beispiel: „Haus vom Nikolaus“ ist ein Graph mit einem offenen Eulerweg



Eulerweg: Knoten in der Reiholge $3, 4, 5, 1, 2, 5, 3, 2, 4$ besuchen.

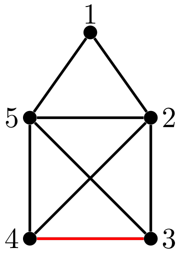
Eulerweg

Definition

Ein Eulerweg ist ein Weg von Knoten u zu Knoten v, der jede Kante genau einmal besucht.

- Unterschied zur Eulertour: Anfangs- und Endknoten können verschieden sein:
- Offener Eulerweg: Eulerweg, der keine Eulertour ist (Anfang und Ende verschieden)

Beispiel: „Haus vom Nikolaus“ ist ein Graph mit einem offenen Eulerweg



Eulerweg: Knoten in der Reiholge $3, 4, 5, 1, 2, 5, 3, 2, 4$ besuchen.

Eulerweg

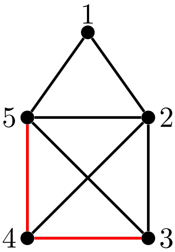
Hochschule RheinMain

Definition

Ein Eulerweg ist ein Weg von Knoten u zu Knoten v, der jede Kante genau einmal besucht.

- Unterschied zur Eulertour: Anfangs- und Endknoten können verschieden sein:
- Offener Eulerweg: Eulerweg, der keine Eulertour ist (Anfang und Ende verschieden)

Beispiel: „Haus vom Nikolaus“ ist ein Graph mit einem offenen Eulerweg



Eulerweg: Knoten in der Reiholge $3, 4, 5, 1, 2, 5, 3, 2, 4$ besuchen.

Eulerweg

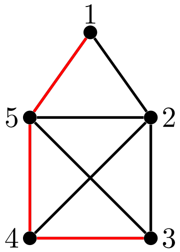
Hochschule RheinMain

Definition

Ein Eulerweg ist ein Weg von Knoten u zu Knoten v, der jede Kante genau einmal besucht.

- Unterschied zur Eulertour: Anfangs- und Endknoten können verschieden sein:
- Offener Eulerweg: Eulerweg, der keine Eulertour ist (Anfang und Ende verschieden)

Beispiel: „Haus vom Nikolaus“ ist ein Graph mit einem offenen Eulerweg



Eulerweg: Knoten in der Reiholge $3, 4, 5, 1, 2, 5, 3, 2, 4$ besuchen.

Eulerweg

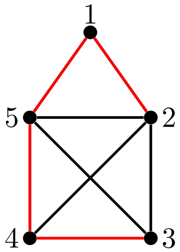
Hochschule RheinMain

Definition

Ein Eulerweg ist ein Weg von Knoten u zu Knoten v, der jede Kante genau einmal besucht.

- Unterschied zur Eulertour: Anfangs- und Endknoten können verschieden sein:
- Offener Eulerweg: Eulerweg, der keine Eulertour ist (Anfang und Ende verschieden)

Beispiel: „Haus vom Nikolaus“ ist ein Graph mit einem offenen Eulerweg



Eulerweg: Knoten in der Reiholge $3, 4, 5, 1, 2, 5, 3, 2, 4$ besuchen.

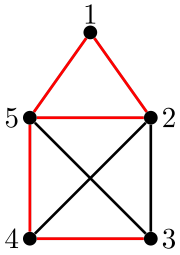
Eulerweg

Definition

Ein Eulerweg ist ein Weg von Knoten u zu Knoten v, der jede Kante genau einmal besucht.

- Unterschied zur Eulertour: Anfangs- und Endknoten können verschieden sein:
- Offener Eulerweg: Eulerweg, der keine Eulertour ist (Anfang und Ende verschieden)

Beispiel: „Haus vom Nikolaus“ ist ein Graph mit einem offenen Eulerweg



Eulerweg: Knoten in der Reiholge $3, 4, 5, 1, 2, 5, 3, 2, 4$ besuchen.

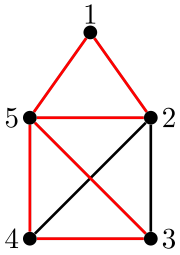
Eulerweg

Definition

Ein Eulerweg ist ein Weg von Knoten u zu Knoten v, der jede Kante genau einmal besucht.

- Unterschied zur Eulertour: Anfangs- und Endknoten können verschieden sein:
- Offener Eulerweg: Eulerweg, der keine Eulertour ist (Anfang und Ende verschieden)

Beispiel: „Haus vom Nikolaus“ ist ein Graph mit einem offenen Eulerweg



Eulerweg: Knoten in der Reiholge $3, 4, 5, 1, 2, 5, 3, 2, 4$ besuchen.

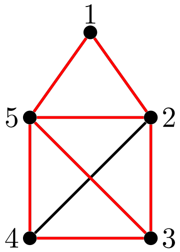
Eulerweg

Definition

Ein Eulerweg ist ein Weg von Knoten u zu Knoten v, der jede Kante genau einmal besucht.

- Unterschied zur Eulertour: Anfangs- und Endknoten können verschieden sein:
- Offener Eulerweg: Eulerweg, der keine Eulertour ist (Anfang und Ende verschieden)

Beispiel: „Haus vom Nikolaus“ ist ein Graph mit einem offenen Eulerweg



Eulerweg: Knoten in der Reiholge $3, 4, 5, 1, 2, 5, 3, 2, 4$ besuchen.

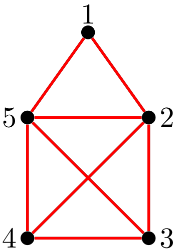
Eulerweg

Definition

Ein Eulerweg ist ein Weg von Knoten u zu Knoten v, der jede Kante genau einmal besucht.

- Unterschied zur Eulertour: Anfangs- und Endknoten können verschieden sein:
- Offener Eulerweg: Eulerweg, der keine Eulertour ist (Anfang und Ende verschieden)

Beispiel: „Haus vom Nikolaus“ ist ein Graph mit einem offenen Eulerweg



Eulerweg: Knoten in der Reiholge
$3, 4, 5, 1, 2, 5, 3, 2, 4$ besuchen.

Satz zum Eulerweg

Satz

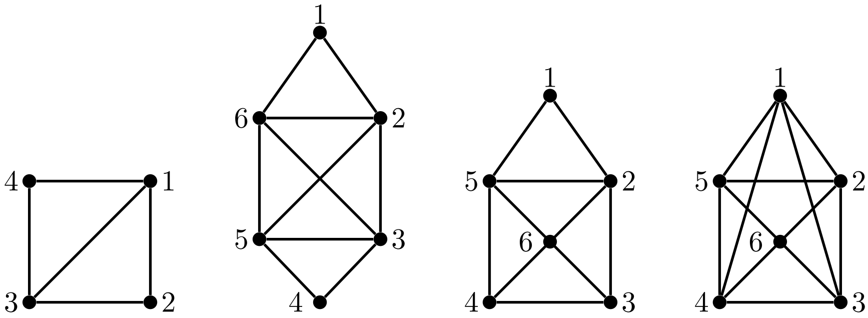
Ein zusammenhängender Graph (bzw. Multigraph) hat genau dann einen offenen Eulerweg, wenn zwei Knoten ungeraden Grad und alle anderen Knoten geraden Grad haben. Der Eulerweg beginnt und endet in den Knoten mit ungeradem Grad.

Beweis. Zwei Richtungen sind zu zeigen

- Sei $G = (V, E)$ ein (Multi-)Graph mit $u \neq v \in G$ und $\deg_G(u)$, $\deg_G(v)$ ungerade, und für alle $w \notin \{u, v\}$: $\deg_G(w)$ gerade .
  In $G' = (V, E \cup \{u, v\})$ haben alle Knoten geraden Grad, G' hat eine Eulertour.
  Entfernen der Kante $\{u, v\}$ von der Tour ergibt offenen Eulerweg von u nach v.
- Sei G ein (Multi-)Graph, der einen offenen Eulerweg von u nach v hat.
  Knoten $w \notin \{u, v\}$: Durchlaufen verwendet zwei Kanten, daher $\deg(w)$ gerade.
  Knoten u, v: Je eine Kante für Anfang und Ende dazu, daher Grad ungerade.
  Gleiche Argumentation zeigt, dass u, v Start- und Ende sein müssen. $\square$

Aufgabe:

- Welche der folgenden Graphen sind eulersch?
- Welche der Graphen haben einen offenen Eulerweg?
- Gebe die Knoten an, wie sie von einer Eulertour oder einem Eulerweg besucht werden.



Hamiltonkreis

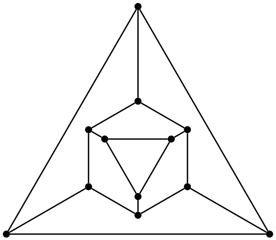
Hochschule RheinMain

Definition

Ein Hamiltonkreis im Graph $G = (V, E)$ ist ein Kreis von Knoten u zum selben Knoten u, der alle Knoten aus $V \setminus \{u\}$ einmal und u zweimal (am Anfang und Ende) besucht.

Bemerke: Eulerkreis besucht alle Kanten, Hamiltonkreis besucht alle Knoten.

Beispiel:



Wo ist ein Hamiltonkreis?

Hamiltonkreis

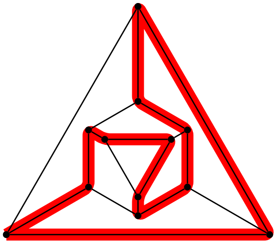
Hochschule RheinMain

Definition

Ein Hamiltonkreis im Graph $G = (V, E)$ ist ein Kreis von Knoten u zum selben Knoten u, der alle Knoten aus $V \setminus \{u\}$ einmal und u zweimal (am Anfang und Ende) besucht.

Bemerke: Eulerkreis besucht alle Kanten, Hamiltonkreis besucht alle Knoten.

Beispiel:



Wo ist ein Hamiltonkreis?

Bemerkungen

- Frage, ob Graph ein Hamiltonkreis enthält ist schwieriger als Frage nach einer Eulertour.
- Unklar, wie schwer genau: Es gibt bisher keinen Algorithmus, der die Frage für jeden Graph in annehmbarer Zeit beantworten kann.
- Vermutung: Es gibt kein effizientes Verfahren (Beweis für $P \neq NP$ zeigen, eine sehr berühmte offene Frage der Informatik)
- Anwendung für Hamiltonkreis-Problem: Traveling-Saleman-Problem: Gibt es eine kürzeste Rundreise durch aller Städte einer Landkarte

BÄUME

- Definition
- Kantenanzahl
- Gerichtet Graphen

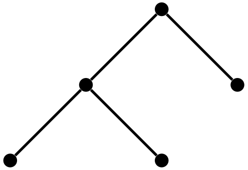
Baum

Definition

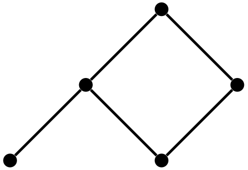
Ein zusammenhängender, azyklischer Graph wird Baum genannt.

Ein azyklischer Graph, der nicht notwendigerweise zusammenhängend ist, wird auch Wald genannt, da er in Bäume zerfällt.

Beispiel:



Baum



Kein Baum

Kantenanzahl von Bäumen

Hochschule RheinMain

Satz

Jeder Baum mit $n \in \mathbb{N}$ Knoten hat $n - 1$ Kanten.

Beweis. Mit vollständiger Induktion über die Anzahl an Knoten.

Kantenanzahl von Bäumen

Hochschule RheinMain

Satz

Jeder Baum mit $n \in \mathbb{N}$ Knoten hat $n - 1$ Kanten.

Beweis. Mit vollständiger Induktion über die Anzahl an Knoten.

- Induktionsbasis $n = 1$: Ein Baum mit 1 Knoten hat keine $(n - 1 = 0)$ Kanten.

Kantenanzahl von Bäumen

Hochschule RheinMain

Satz

Jeder Baum mit $n \in \mathbb{N}$ Knoten hat $n - 1$ Kanten.

Beweis. Mit vollständiger Induktion über die Anzahl an Knoten.

- Induktionsbasis $n = 1$: Ein Baum mit 1 Knoten hat keine $(n - 1 = 0)$ Kanten.
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$.

Kantenanzahl von Bäumen

Hochschule RheinMain

Satz

Jeder Baum mit $n \in \mathbb{N}$ Knoten hat $n-1$ Kanten.

Beweis. Mit vollständiger Induktion über die Anzahl an Knoten.

- Induktionsbasis $n = 1$: Ein Baum mit 1 Knoten hat keine $(n-1 = 0)$ Kanten.
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$.

  Induktionsannahme: Jeder Baum mit n Knoten hat $n-1$ Kanten.

Kantenanzahl von Bäumen

Satz

Jeder Baum mit $n \in \mathbb{N}$ Knoten hat $n - 1$ Kanten.

Beweis. Mit vollständiger Induktion über die Anzahl an Knoten.

- Induktionsbasis $n = 1$: Ein Baum mit 1 Knoten hat keine $(n - 1 = 0)$ Kanten.
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$.

  Induktionsannahme: Jeder Baum mit n Knoten hat $n - 1$ Kanten.

  Sei G Baum mit $n + 1$ Knoten.

Kantenanzahl von Bäumen

Hochschule RheinMain

Satz

Jeder Baum mit $n \in \mathbb{N}$ Knoten hat $n - 1$ Kanten.

Beweis. Mit vollständiger Induktion über die Anzahl an Knoten.

- Induktionsbasis $n = 1$: Ein Baum mit 1 Knoten hat keine $(n - 1 = 0)$ Kanten.
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$.

  Induktionsannahme: Jeder Baum mit n Knoten hat $n - 1$ Kanten.

  Sei G Baum mit $n + 1$ Knoten.

  Wähle einen Knoten v mit Grad 1 (existiert, da G zusammenhängend + kreisfrei).

Kantenanzahl von Bäumen

Hochschule RheinMain

Satz

Jeder Baum mit $n \in \mathbb{N}$ Knoten hat $n - 1$ Kanten.

Beweis. Mit vollständiger Induktion über die Anzahl an Knoten.

- Induktionsbasis $n = 1$: Ein Baum mit 1 Knoten hat keine $(n - 1 = 0)$ Kanten.
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$.

  Induktionsannahme: Jeder Baum mit n Knoten hat $n - 1$ Kanten.

  Sei G Baum mit $n + 1$ Knoten.

  Wähle einen Knoten v mit Grad 1 (existiert, da G zusammenhängend $+$ kreisfrei).

  Entferne v mit seiner Kante. Dann ist der Graph immer noch ein Baum.

Kantenanzahl von Bäumen

Satz

Jeder Baum mit $n \in \mathbb{N}$ Knoten hat $n - 1$ Kanten.

Beweis. Mit vollständiger Induktion über die Anzahl an Knoten.

- Induktionsbasis $n = 1$: Ein Baum mit 1 Knoten hat keine $(n - 1 = 0)$ Kanten.
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$.

  Induktionsannahme: Jeder Baum mit n Knoten hat $n - 1$ Kanten.

  Sei G Baum mit $n + 1$ Knoten.

  Wähle einen Knoten v mit Grad 1 (existiert, da G zusammenhängend + kreisfrei).

  Entferne v mit seiner Kante. Dann ist der Graph immer noch ein Baum.

  Dieser Baum hat n Knoten und nach Induktionsannahme $n - 1$ Kanten.

Kantenanzahl von Bäumen

Hochschule RheinMain

Satz

Jeder Baum mit $n \in \mathbb{N}$ Knoten hat $n - 1$ Kanten.

Beweis. Mit vollständiger Induktion über die Anzahl an Knoten.

- Induktionsbasis $n = 1$: Ein Baum mit 1 Knoten hat keine $(n - 1 = 0)$ Kanten.
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$.

  Induktionsannahme: Jeder Baum mit n Knoten hat $n - 1$ Kanten.

  Sei G Baum mit $n + 1$ Knoten.

  Wähle einen Knoten v mit Grad 1 (existiert, da G zusammenhängend + kreisfrei).

  Entferne v mit seiner Kante. Dann ist der Graph immer noch ein Baum.

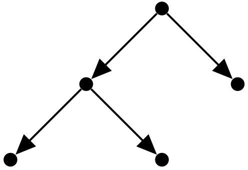
  Dieser Baum hat n Knoten und nach Induktionsannahme $n - 1$ Kanten.

  Da wir eine Kante entfernt haben, hatte G $n = (n + 1) - 1$ Kanten. $\square$

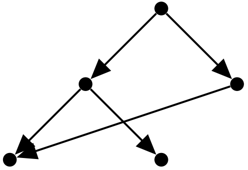
Bäume bei gerichteten Graphen

Ein gerichteter Baum ist ein zusammenhängender gerichteter Graph, der azyklisch ist (auch DAG genannt, von engl. directed acyclic graph), sodass der ungerichtete Graph, der durch Weglassen der Richtung entsteht, ein Baum ist.

Beispiel:



Baum



DAG (kein Baum)

PLANARE GRAPHEN

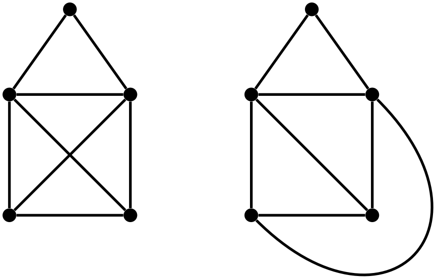
- Planarität
- Gebiete
- Eulersche Polyederformel

Planare Graphen

Definition

Ein Graph ist planar, falls er in der Ebene gezeichnet werden kann, ohne dass sich Kanten überschneiden.

Beispiel: Das Haus vom Nikolaus ist ein planarer Graph, da er ohne Überschneidungen gezeichnet werden kann:



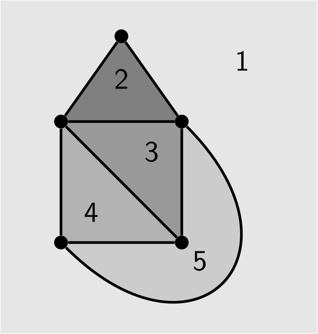
Anwendung

- Eine Anwendung von planaren Graphen in der Informatik: Digitaler Schaltungsentwurf
- Bauteile sind Knoten
- Kanten sind Leiterbahnen / Verbindungen
- Finde Layout, ohne dass sich die Leitungen kreuzen $=$ Planare Einbettung des Graphen in die Ebene.

Gebiete

- Planar gezeichneter Graph zerlegt die Ebene in Gebiete.
- Jedes Gebiet wird durch einen Kreis umschlossen, außer das Außengebiet.

Beispiel:



Eulersche Polyederformel

Satz (Eulersche Polyederformel)

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und g Gebieten. Dann gilt $g = m - n + 2$.

Beweis. Vollständige Induktion nach g.

Eulersche Polyederformel

Satz (Eulersche Polyederformel)

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und g Gebieten. Dann gilt $g = m - n + 2$.

Beweis. Vollständige Induktion nach g.

- Basis $g = 1$: G hat keine Kreise (wegen $g = 1$) und ist ein Baum (da zusammenhängend).

Eulersche Polyederformel

Hochschule RheinMain

Satz (Eulersche Polyederformel)

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und g Gebieten. Dann gilt $g = m - n + 2$.

Beweis. Vollständige Induktion nach g.

- Basis $g = 1$: G hat keine Kreise (wegen $g = 1$) und ist ein Baum (da zusammenhängend). Satz zur Kantenanzahl von Bäumen: $m = n - 1$ und daher $m - n + 2 = n - 1 - n + 2 = 1 = g$.

Eulersche Polyederformel

Satz (Eulersche Polyederformel)

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und g Gebieten. Dann gilt $g = m - n + 2$.

Beweis. Vollständige Induktion nach g.

- Basis $g = 1$: G hat keine Kreise (wegen $g = 1$) und ist ein Baum (da zusammenhängend). Satz zur Kantenanzahl von Bäumen: $m = n - 1$ und daher $m - n + 2 = n - 1 - n + 2 = 1 = g$.
- Schritt: Induktionsannahme: Behauptung gilt für alle Graphen mit g Gebieten.

Eulersche Polyederformel

Hochschule RheinMain

Satz (Eulersche Polyederformel)

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und g Gebieten. Dann gilt $g = m - n + 2$.

Beweis. Vollständige Induktion nach g.

- Basis $g = 1$: G hat keine Kreise (wegen $g = 1$) und ist ein Baum (da zusammenhängend). Satz zur Kantenanzahl von Bäumen: $m = n - 1$ und daher $m - n + 2 = n - 1 - n + 2 = 1 = g$.
- Schritt: Induktionsannahme: Behauptung gilt für alle Graphen mit g Gebieten. Sei G ein Graph mit $g + 1$ Gebieten ($g \geq 1$), m Kanten und n Knoten.

Eulersche Polyederformel

Hochschule RheinMain

Satz (Eulersche Polyederformel)

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und g Gebieten. Dann gilt $g = m - n + 2$.

Beweis. Vollständige Induktion nach g.

- Basis $g = 1$: G hat keine Kreise (wegen $g = 1$) und ist ein Baum (da zusammenhängend). Satz zur Kantenanzahl von Bäumen: $m = n - 1$ und daher $m - n + 2 = n - 1 - n + 2 = 1 = g$.
- Schritt: Induktionsannahme: Behauptung gilt für alle Graphen mit g Gebieten. Sei G ein Graph mit $g + 1$ Gebieten ($g \geq 1$), m Kanten und n Knoten. Dann muss G einen Kreis enthalten.

Eulersche Polyederformel

Satz (Eulersche Polyederformel)

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und g Gebieten. Dann gilt $g = m - n + 2$.

Beweis. Vollständige Induktion nach g.

- Basis $g = 1$: G hat keine Kreise (wegen $g = 1$) und ist ein Baum (da zusammenhängend). Satz zur Kantenanzahl von Bäumen: $m = n - 1$ und daher $m - n + 2 = n - 1 - n + 2 = 1 = g$.
- Schritt: Induktionsannahme: Behauptung gilt für alle Graphen mit g Gebieten.
  Sei G ein Graph mit $g + 1$ Gebieten $(g \geq 1)$, m Kanten und n Knoten.
  Dann muss G einen Kreis enthalten.
  Erzeuge G' durch Entfernen einer Kante eines Kreises aus G.

Eulersche Polyederformel

Hochschule RheinMain

Satz (Eulersche Polyederformel)

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und g Gebieten. Dann gilt $g = m - n + 2$.

Beweis. Vollständige Induktion nach g.

- Basis $g = 1$: G hat keine Kreise (wegen $g = 1$) und ist ein Baum (da zusammenhängend). Satz zur Kantenanzahl von Bäumen: $m = n - 1$ und daher $m - n + 2 = n - 1 - n + 2 = 1 = g$.
- Schritt: Induktionsannahme: Behauptung gilt für alle Graphen mit g Gebieten.
  Sei G ein Graph mit $g + 1$ Gebieten ($g \geq 1$), m Kanten und n Knoten.
  Dann muss G einen Kreis enthalten.
  Erzeuge G' durch Entfernen einer Kante eines Kreises aus G.
  G' hat g Gebiete, n Knoten, $m - 1$ Kanten.

Eulersche Polyederformel

Hochschule RheinMain

Satz (Eulersche Polyederformel)

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und g Gebieten. Dann gilt $g = m - n + 2$.

Beweis. Vollständige Induktion nach g.

- Basis $g = 1$: G hat keine Kreise (wegen $g = 1$) und ist ein Baum (da zusammenhängend). Satz zur Kantenanzahl von Bäumen: $m = n - 1$ und daher $m - n + 2 = n - 1 - n + 2 = 1 = g$.
- Schritt: Induktionsannahme: Behauptung gilt für alle Graphen mit g Gebieten.
  Sei G ein Graph mit $g + 1$ Gebieten ($g \geq 1$), m Kanten und n Knoten.
  Dann muss G einen Kreis enthalten.
  Erzeuge G' durch Entfernen einer Kante eines Kreises aus G.
  G' hat g Gebiete, n Knoten, $m - 1$ Kanten. Induktionsannahme zeigt für G':
  $g = (m - 1) - n + 2$ und damit gilt für G: $g + 1 = m - n + 1$. □

Hochschule RheinMain

BIPARTITE GRAPHEN

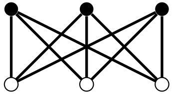
- Was ist ein bipartiter Graph?
- Vollständig bipartite Graphen
- Nicht-Planarität von $K_{3,3}$ und K_5
- Minoren nicht-planarer Graphen

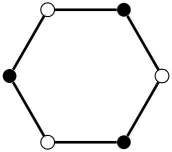
Bipartite Graphen

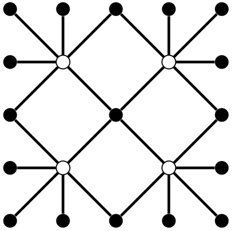
Definition

Ein Graph heißt bipartit, wenn man allen Knoten eine Farbe aus {schwarz, weiß} so zuordnen kann, dass Kanten nur schwarze mit weißen Knoten verbinden.

Farbzuordnung partioniert die Knoten in zwei Mengen. Beispiele:





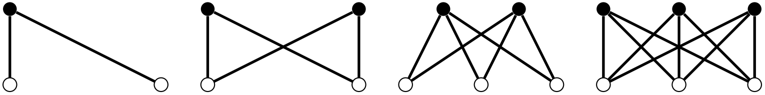


Vollständig bipartite Graphen

Hochschule RheinMain

- Ein bipartiter Graph mit Bipartition $\{V_1, V_2\}$ ist vollständig bipartit, wenn jeder Knoten in V_1 mit jedem Knoten in V_2 durch eine Kante verbunden ist.
- Wenn $|V_1| = m$ und $|V_2| = n$, dann bezeichnet man den vollständig bipartiten Graph mit $K_{m,n}$:

Beispiele:



$K_{1,2}$ $K_{2,2}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$

Anzahl Kanten auf einem Kreis in bipartiten Graphen

Hochschule RheinMain

Lemma

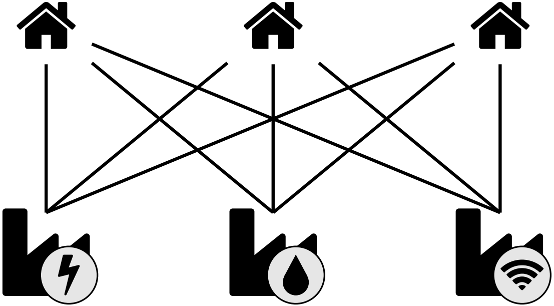
Jeder Kreis in einem bipartiten Graph hat eine gerade Anzahl an Kanten.

Beweis.

- Sei $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\} \ldots, \{v_n, v_1\}$ ein Kreis.
- Die Knoten müssen abwechselnd unterschiedlich gefärbt sein
- Daher $\{v_1, v_3, \ldots\}$ sind gleich gefärbt und $\{v_2, v_4, \ldots\}$ sind gleich gefärbt.
- Wenn n ungerade wäre, dann hätten v_1 und v_n die gleiche Farbe.
  Das ist aber nicht möglich, da sie über eine Kante verbunden sind. $\square$

Anwendungsbeispiel: Planarität

Hochschule RheinMain



- Kann man die Häuser an Gas-, Elektrizitätswerk und Internetanbieter anschließen, ohne dass sich die Leitungen kreuzen?
- Die Frage ist äquivalent zur Frage, ob der Graph $K_{3,3}$ planar ist.

$K_{3,3}$ ist nicht planar

Hochschule RheinMain

Satz

$K_{3,3}$ ist nicht planar.

Beweis (durch Widerspruch).

- Nehme an, $K_{3,3}$ ist planar und betrachte die planare Einbettung.
- Da $K_{3,3}$ bipartit, gibt es keine Kreise mit ungerader Anzahl (siehe vorheriges Lemma). Daher muss jedes Gebiet mit mindestens 4 Kanten umgeben sein.
- Summe ergibt mindestens $4g$.
- Dabei wurde jede Kante höchstens zweimal gezählt, denn sie gehört zu maximal zwei Gebieten (entweder trennt sie zwei Gebiete, oder sie liegt im selben Gebiet).
- Das ergibt die Ungleichung $4g \leq 2m$, umgeformt $2g \leq m$.
- Da $K_{3,3}$ 9 Kanten hat, kann daher nur $g \leq 4$ gelten.
- Die Eulersche Polyederformel liefert hingegen für $n = 6$ und $m = 9$: $g = m - n + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$. Das ist ein Widerspruch!

K_5 ist nicht planar

Auch der vollständige Graph K_5 ist nicht planar (wir verzichten auf den Beweis):

Satz

Der vollständige Graph K_5 und der vollständig bipartite Graph $K_{3,3}$ sind nicht planar.

K_5 und $K_{3,3}$

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ spielen für die Planarität eine besondere Rolle:
Nach Sätzen von Kuratowski und von Wagner folgt:

> Jeder nichtplanare Graph hat K_5 oder $K_{3,3}$ als Minor.

Minor: Entferne Knoten und Kanten und verschmelze Knoten durch Kantenkontraktion (dabei entfernt man eine Kante und verschmilzt die dazugehörigen Knoten).

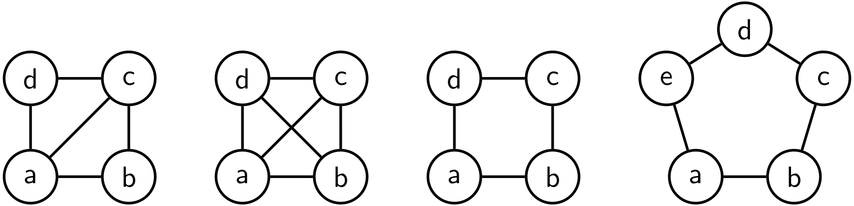
FÄRBUNGEN

Färbungen

Knotenfärbung: Färbe Knoten mit k Farben

Fragen: Wie viele Farben benötigt man, um einen Graphen zu färben, ohne adjazente Knoten gleich zu färben.

Beispiele:



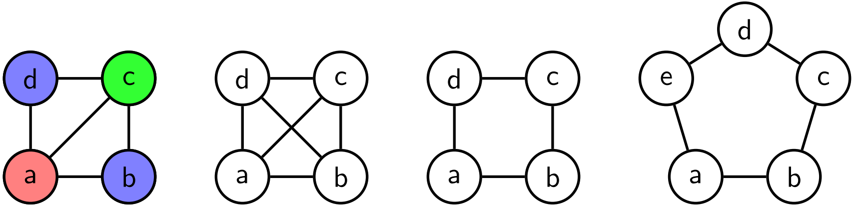
Wie viele Farben sind jeweils minimal notwendig?

Färbungen

Knotenfärbung: Färbe Knoten mit k Farben

Fragen: Wie viele Farben benötigt man, um einen Graphen zu färben, ohne adjazente Knoten gleich zu färben.

Beispiele:



3

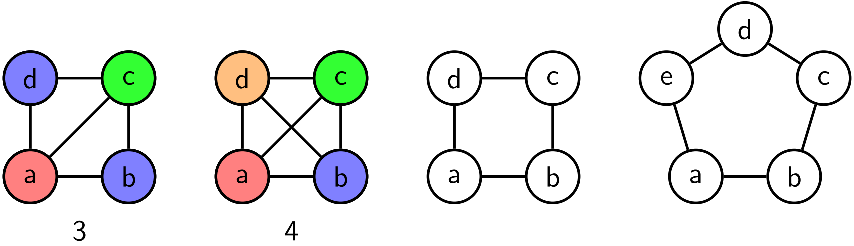
Wie viele Farben sind jeweils minimal notwendig?

Färbungen

Knotenfärbung: Färbe Knoten mit k Farben

Fragen: Wie viele Farben benötigt man, um einen Graphen zu färben, ohne adjazente Knoten gleich zu färben.

Beispiele:



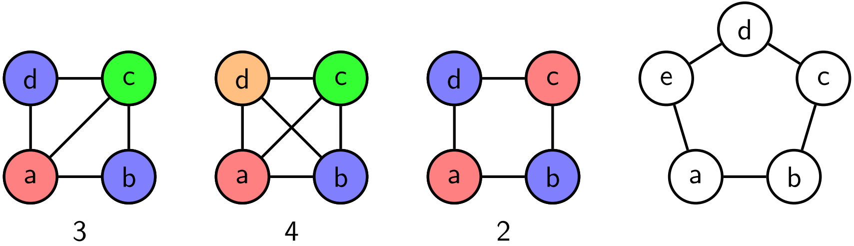
Wie viele Farben sind jeweils minimal notwendig?

Färbungen

Knotenfärbung: Färbe Knoten mit k Farben

Fragen: Wie viele Farben benötigt man, um einen Graphen zu färben, ohne adjazente Knoten gleich zu färben.

Beispiele:



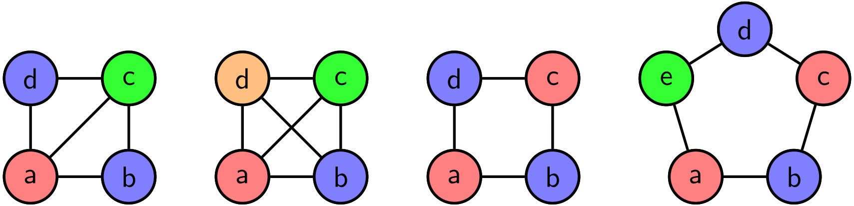
Wie viele Farben sind jeweils minimal notwendig?

Färbungen

Knotenfärbung: Färbe Knoten mit k Farben

Fragen: Wie viele Farben benötigt man, um einen Graphen zu färben, ohne adjazente Knoten gleich zu färben.

Beispiele:

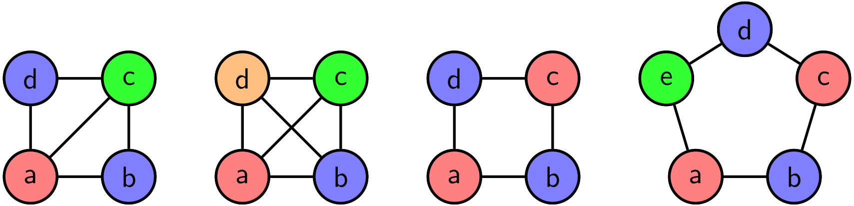


3 4 2 3

Wie viele Farben sind jeweils minimal notwendig?

Färbungen

Knotenfärbung: Färbe Knoten mit k Farben
Fragen: Wie viele Farben benötigt man, um einen Graphen zu färben, ohne adjazente Knoten gleich zu färben.
Beispiele:



3 4 2 3

Wie viele Farben sind jeweils minimal notwendig?

Allgemein ist das Färbbarkeitsproblem ein schwieriges (NP-vollständiges) Problem.

Anwendungen der Färbbarkeit

Hochschule RheinMain

Konfliktgraphen: Eine Kante repräsentiert einen Konflikt.

Z.B. kann man damit eine Sitzordnung erstellen:

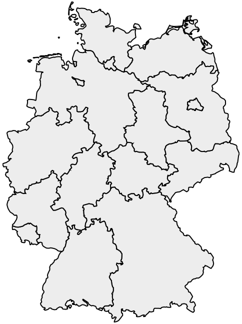
Kanten repräsentieren, wer nicht mit wem am selben Tisch sitzen darf.

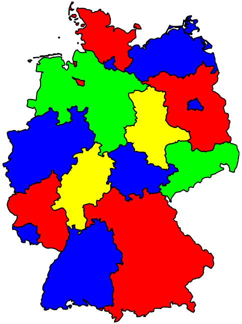
Die Frage nach der Färbung ist dann:

Wer sitzt an welchem Tisch, und wie viele Tische werden benötigt?

Vierfarbenproblem

Verwandt (aber einfacher) ist das Vierfarbenproblem:
Frage: Kann man die Länder einer Landkarte mit 4 Farben färben, sodass benachbarte Länder unterschiedliche Farben haben.





Vierfarbenproblem

Als Problem der Graphentheorie: Knoten sind Länder, Kanten Nachbarschaft.
Kann man jeden planaren Graphen mit 4 Farben färben?
Vierfarbensatz:

- Positive Antwort!
- Über 100 Jahre kein Beweis.
- Beweis mit Computerunterstützung (2000 Fälle automatisch geprüft)

REPRÄSENTATION VON GRAPHEN

Hochschule RheinMain

Adjazenzmatrix

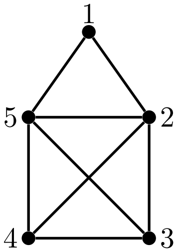
Hochschule **RheinMain**

Für Graph $G = (\{1,\dots,n\}, E)$ ist eine Adjazenzmatrix eine $n \times n$-Matrix M mit

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \{i,j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für Multigraphen: Matrixeinträge $k \in \mathbb{N}_0$ statt $k \in \{0,1\}$
- Im Rechner: Adjazenzmatrix als zweidimensionales Feld (Array)
- Vorteil: Zugriff auf Elemente ist schnell (konstante Laufzeit)
- Nachteil: Speicherplatz quadratisch in der Anzahl der Knoten.

Beispiel



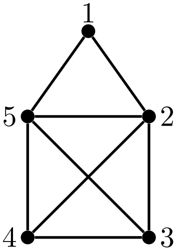
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Adjazenzlisten

Für Graph $G = (\{1, \ldots, n\}, E)$ ist eine Adjazenzlistendarstellung eine Abbildung, die jeden Knoten auf eine Liste seiner Nachbarn abbildet.

- Für Multigraphen: Mehrere Listeneinträge
- Im Rechner: Map von Knoten auf Listen
- Vorteil: Speicherplatz so groß wie es Kanten gibt
- Nachteil: Suche nach Kante muss die Liste durchsuchen (Laufzeit)

Beispiel



$$\begin{aligned}\{1 &\mapsto [2,5],\\ 2 &\mapsto [1,3,4,5],\\ 3 &\mapsto [2,4,5],\\ 4 &\mapsto [2,3,5],\\ 5 &\mapsto [1,2,3,4]\}\end{aligned}$$

Implizite Repräsentation

Hochschule RheinMain

Hat man unendliche ode sehr große Graphen,
so kann man diese nicht komplett im Rechner repräsentieren.
Implizite Repräsentation:

- Startknoten: Endliche Teilmenge der Knoten, mit denen man anfangen will
- Nachfolgerfunktion: Berechnet für einen Knoten dessen Nachbarn.
  Kann z.B. als Funktionsgleichung oder durch Datenbankzugriff berechnet werden.
- Algorithmen betrachten in einem Schritt nur einen endlichen Teilgraphen und explorieren mit der Nachfolgerfunktion den nächsten Teilgraphen

Erfordert i.a. spezielle Algorithmen.