Diskrete Strukturen

für die Studiengänge
- Angewandte Informatik
- Technische Informatik

05 Beweise und Beweisen

Prof. Dr. David Sabel
Wintersemester 2024/25
Stand der Folien: 16. Dezember 2024

Hochschule RheinMain

Inhalt

EINFÜHRENDES

- Mathematische Texte
- Warum beweisen?
- Was kennzeichnet Beweise?

Aufbau mathematischer Texte

Axiom: Grundaussage, wird als gültig angenommen (und nicht bewiesen)

Definition: führt Begriffe/Notation ein. Keine Aussagen, werden daher nicht bewiesen.

Satz: Aussagen (fast immer Wenn-Dann-Aussagen), müssen bewiesen werden.
- Lemma: ein Hilfssatz
- Satz: wichtig
- Theorem: sehr wichtig

Korollar: Satz der direkt aus anderen Sätzen folgt (daher ohne Beweis)

Beweis: zeigt die Korrektheit eines Satzes.

Bemerkung: Erläuterung, Motivationen, interessante Beispiele

Vermutung: Aussage, die nicht bewiesen ist und deren Wahrheitswert daher ungeklärt ist.

Beispiel: Illustriert Begriffe und Aussagen, tragen meistens sehr zum Verständnis bei.

Es ist sehr sinnvoll alle Kategorien zu nummerieren und zu referenzieren, damit eindeutig klar ist, was warum folgt

Warum will man beweisen?

Hochschule RheinMain

- Sachverhalte ein für allemal klären
- Kritik und Irrtümer ausräumen
- Neues Wissen schaffen
- In der Informatik: Zeige Eigenschaften von neuen Algorithmen: Korrektheit, Laufzeit-, Platzverhalten; tieferer Einblick, wie der Algorithmus funktioniert
- Beweis negativer Aussagen wie „Für dieses Problem gibt es keinen Algorithmus“: Vergeude keine Zeit mit der Suche nach dem Unmöglichen.

Was kennzeichnet Sätze und Beweise?

Hochschule RheinMain

- Beispiele sind kein Beweis!
  „Für alle $n \in \mathbb{N}$: $n^2 + n + 41$ ist eine Primzahl“ gilt für die ersten 30 Zahlen, aber das ist kein Beweis! (die Aussage gilt auch nicht!, betrachte $n = 41$)
- Sätze müssen allgemeine bewiesen oder durch Gegenbeispiel widerlegt werden.
- Mathematische Sätze sind Wenn-Dann-Aussagen der Form $F \to G$:
  Unter den Aussagen F (der Voraussetzung) folgt Aussage G (die Behauptung).
  Z.B.
  Wenn a, b, c die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sind, dann gilt $a^2 + b^2 = c^2$.
- Behauptung ergibt sich ausschließlich durch die Gesetze der Logik.
  Diese Ableitung nennt man Beweis
- Beenden eines mathematischen Beweises: Mit der Box $\square$ oder mit „Q.E.D.“ („quod erat demonstrandum“ / „was zu beweisen war“)

Hochschule RheinMain

BEWEISARTEN

- Direkter Beweis
- Kontraposition
- Beweis durch Widerspruch

Direkter Beweis

Hochschule RheinMain

Aus der Voraussetzung F wird „direkt“ die Behauptung G bewiesen.
Muster:

Sei F erfüllt.
... (Diese Lücke ist zu füllen)
Also gilt G.

Beispiel:

Satz. Wenn eine natürliche Zahl n durch 10 teilbar ist, dann ist n gerade.

Beweis.
Sei n durch 10 teilbar.
Dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 10 \cdot k$. D.h. $n = 2 \cdot (5 \cdot k)$. Daher ist 2 ein Teiler von n.
Also ist n gerade. $\square$

Kontraposition

Hochschule RheinMain

Beweis durch Kontraposition verwendet die Äquivalenz

$$(F \to G) \equiv (\neg G \to \neg F)$$

Anstelle von F auf G zu schließen, schließt man von $\neg G$ auf $\neg F$.

Muster

Sei $\neg G$ erfüllt.
... (Diese Lücke ist zu füllen)
Also gilt $\neg F$. □

Beweis durch Kontraposition: Beispiel

Hochschule RheinMain

Satz. Wenn n^2 eine ungerade Zahl ist, dann ist n eine ungerade Zahl.

Beweis.

Wir verwenden Kontraposition und zeigen die äquivalente Aussage:

Wenn n keine ungerade Zahl ist, dann ist n^2 keine ungerade Zahl.

Sei n keine ungerade natürliche Zahl.

Dann ist n gerade und 2 ein Teiler von n, d.h. $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Dann ist $n^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$. Damit ist n^2 eine gerade und daher keine ungerade Zahl. □

Beweis durch Widerspruch

Hochschule RheinMain

Idee: Man nimmt an, dass die Aussage falsch ist, und führt diese zu einem Widerspruch.

Dann darf man schließen, dass die Aussage wahr ist.

Logisch: Statt $F \to G$ als wahr (eine Tautologie) zu zeigen, zeigt man $\neg(F \to G)$ ist falsch (ein Widerspruch).

Logisch umgeformt ergibt dies $\neg(F \to G) \equiv \neg(\neg F \vee G) \equiv F \wedge \neg G$.

D.h.: Man nimmt an, F gilt, aber G gilt nicht und zeigt, dass dies ein Widerspruch ist.

Muster für einen Beweis durch Widerspruch ist:

Sei F erfüllt. Angenommen G wäre falsch.
... (Diese Lücke ist zu füllen)
Also ergibt sich ein Widerspruch. Daher war die Annahme falsch und G gilt. □

Beispiel

Hochschule RheinMain

Satz. Die reelle Zahl $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Beweis. Wir verwenden einen Beweis durch Widerspruch.
Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl.
Dann gibt es teilerfremde Zahlen $p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ (der Bruch ist gekürzt).
Dann ist $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$, d.h. $p^2 = 2q^2$.
Daher ist p^2 und auch p durch 2 teilbar, d.h. es gibt eine Zahl $m \in \mathbb{N}_0$ mit $p = 2m$.
Dann gilt $4m^2 = 2q^2$, d.h. $q^2 = 2m^2$.
Daher ist q^2 und auch q durch 2 teilbar, d.h. es gibt Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $q = 2n$.
Dann ist aber $\frac{p}{q} = \frac{2m}{2n}$ noch kürzbar. Ein Widerspruch!
Daher war unsere Annahme falsch und $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl. □

Äquivalenzen

Äquivalenzen sind Sätze der Form $F \leftrightarrow G$.

Da dies logisch äquivalent zu $(F \to G) \wedge (G \to F)$ ist, können wir den Beweis einer solchen Äquivalenz in zwei Teilen führen nach dem Muster:

Beweis.
Wir zeigen beide Richtungen.

- $F \to G$: ...
- $G \to F$: ...

□

FALLUNTERSCHEIDUNG

- Fallunterscheidung, logisch
- Beispiele
- Wiederholte Fallunterscheidung

Fallunterscheidung

Da

$$(F \to G) \wedge (\neg F \to G) \equiv G$$

kann man G beweisen, indem man die Fälle „F gilt“ und „F gilt nicht“ jeweils einmal annimmt und zeigt, dass in beiden Fällen auch G gelten muss.

Man unterscheidet also die Fälle

- F gilt
- F gilt nicht

Das ganze kann man natürlich wiederholt machen
Wichtig: Keinen Fall vergessen.

Beispiel

Satz
Für jede ganze Zahl z gilt $z^2 \geq 0$.

Beweis.
Wir unterscheiden zwei Fälle: $z < 0$ und $z \geq 0$.

1. $z < 0$: Dann ist $z^2 = z \cdot z$ das Produkt zweier negativer Zahlen, was positiv ist. Also gilt die Aussage.
2. $z \geq 0$. Wir unterscheiden nochmal: $z = 0$ oder $z > 0$.
   1. $z = 0$: $0^2 = 0 \cdot 0 = 0 \geq 0$
   2. $z > 0$: Dann ist $z^2 = z \cdot z$ das Produkt zweier positiver Zahlen, welches positiv ist.

□

Beispiel 2

Hochschule RheinMain

Satz

Für jede natürliche Zahl $n > 1$ ist $n(n^2 - 1)$ ein Vielfaches von 3.

Beweis.
Wir unterscheiden drei Fälle: $n \bmod 3 = 0$, $n \bmod 3 = 1$, $n \bmod 3 = 2$

1. $n \bmod 3 = 0$, dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 3 \cdot k$ und $3 \cdot k \cdot (9k^2 - 1)$.
2. $n \bmod 3 = 1$, dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 3 \cdot k + 1$ und $(3k+1) \cdot ((3k+1)^2 - 1) = (3k+1) \cdot (9k^2 + 6k + 1 - 1) = (3k+1) \cdot (9k^2 + 6k) = (3k+1) \cdot (3k^2 + 2k) \cdot 3$.
3. $n \bmod 3 = 2$, dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 3 \cdot k + 2$ und $(3k+2) \cdot ((3k+2)^2 - 1) = (3k+2) \cdot (9k^2 + 12k + 4 - 1) = (3k+1) \cdot (9k^2 + 12k + 3) = (3k+1) \cdot (3k^2 + 4k + 1) \cdot 3$. □

Aus logischer Sicht wird zweimal unterscheiden:
$n \bmod 3 = 0$ und $n \bmod 3 \neq 0$ und hier nochmal in $n \bmod 3 = 1$ und $n \bmod 3 \neq 1$

Hochschule RheinMain

SCHUBFACHPRINZIP

- Schubfachprinzip
- Beispiele
- Verallgemeinertes Schubfachprinzip

Schubfachprinzip

Hochschule RheinMain

Satz (Schubfachprinzip, auch Taubenschlagprinzip)

Seien m Objekte in n Kategorien eingeteilt.
Wenn $m > n$, gibt es mindestens eine Kategorie, die mindestens zwei Objekte enthält.

Beweis (durch Widerspruch).

- Seien $m > n$ Objekte in n Kategorien verteilt und jede Kategorie enthält ≤ 1 Objekte.
- Summe aller Objekte $\leq$ Anzahl an Kategorien $= n$.
- Dies ist ein Widerspruch, dass $m > n$ Objekte gegeben waren. □

„Taubenschlagprinzip" kommt von Dirichlets Veranschaulichung des Prinzips:
Wenn man viele Tauben auf wenige Taubenschläge verteilt,
dann sitzen in einem Taubenschlag mindestens zwei Tauben.

Beispiel

Hochschule RheinMain

Einfache Beispiele, die aus dem Schubfachprinzip folgen, sind:

- Unter 13 Personen gibt, es mindestens zwei, die im selben Monat Geburtstag haben, unter 367 gibt es mindestens zwei die am selben Tag und Monat Geburtstag haben.
- Unter 4 Studierenden aus den Studiengängen AI,TI,WI gibt es mindestens zwei aus demselben Studiengang.

Aufgabe:
Wie viele Personen sind mindestens notwendig,
damit zwei am gleichen Wochentag Geburtstag haben?

$\longrightarrow$ 8

Beispiel

In der Sockenkiste von Emil befinden sich 8 graue und 8 braune Socken. Wie viele muss er herausnehmen, um

- garantiert zwei gleichfarbige Socken zu erhalten?

  Schubfachprinzip mit 2 Kategorien ⟶ 3 Socken reichen.

- garantiert zwei graue Socken zu erhalten?

  Schlimmster Fall: erst 8 braune Socken, dann 2 graue Socken ⟶ 10 Socken.

Beispiel

Satz

Unter je sechs natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Differenz durch 5 teilbar ist.

Beweis.

- Wir verwenden das Schubfachprinzip. Objekte sind die 6 natürlichen Zahlen $k_1, \dots, k_6$, die Kategorien sind:
  - durch 5 teilbar ohne Rest,
  - durch 5 teilbar mit Rest 1
  - durch 5 teilbar mit Rest 2
  - durch 5 teilbar mit Rest 3
  - durch 5 teilbar mit Rest 4
- Schubfachprinzip ⟶ in mindestens einer Kategorie sind mindestens zwei Zahlen
- d.h. es gibt k_i und k_j (mit $1 \leq i < j \leq 6$) mit $k_i = 5 \cdot x + m$ und $k_j = 5 \cdot y + m$.
- Differenz $k_i - k_j = 5 \cdot (x - y)$ ist durch 5 teilbar □

Aufgabe

Zeige mit dem Schubfachprinzip:

> Unter 4 natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Differenz durch 3 teilbar ist.

Beweis.

- Objekte sind die 4 natürlichen Zahlen $k_1, \dots, k_4$, die Kategorien sind:
  - durch 3 teilbar ohne Rest,
  - durch 3 teilbar mit Rest 1
  - durch 3 teilbar mit Rest 2
- Schubfachprinzip ⟶ in mindestens einer Kategorie sind mindestens zwei Zahlen
- D.h. es gibt k_i und k_j (mit $1 \leq i < j \leq 4$) mit $k_i = 3 \cdot x + m$ und $k_j = 3 \cdot y + m$.
- Differenz $k_i - k_j = 3 \cdot (x - y)$ ist durch 3 teilbar □

Verallgemeinertes Schubfachprinzip

Satz (Verallgemeinertes Schubfachprinzip)

Seien m Objekte in n Kategorien eingeteilt. Wenn $m > r \cdot n$, dann gibt es mindestens eine Kategorie, die mindestens $r + 1$ Objekte enthält.

Beweis durch Widerspruch.
Hätte jede Kategorie höchstens r Objekte,
so gäbe es höchstens $r \cdot n$ Objekte,
was ein Widerspruch zu $m > r \cdot n$ ist. □

Beispiel: Unter 25 Personen haben mindestens 3 im selben Monat Geburtstag.
(Schubfachprinzip mit $m = 25$, $n = 12$, $r = 2$ und $r + 1 = 3$)

Aufgabe

Wie viele Tauben muss man auf 5 Taubenschläge mindestens verteilen, damit es sicher mindestens einen Taubenschlag mit mindestens 4 Tauben gibt?

$r+1=4$, $n=5$ und es muss mehr als $r \cdot n = 15$ Tauben geben, also 16

VOLLSTÄNDIGE INDUKTION

Notation: Summenzeichen

- Sei $k \leq n$, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$.
- Dann bezeichnet $\sum\limits_{i=k}^{n} h(i)$ die Summe
$$h(k) + h(k+1) + \cdots + h(n)$$
.
- Für $k > n$ setzen wir per Definition (leere Summe) $\sum\limits_{i=k}^{n} h(i) := 0$.

Beispiele:

- $\sum\limits_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$
- $\sum\limits_{i=3}^{4} 2^i = 2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$

Notation: Produktzeichen

- Sei $k \leq n$, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$.
- Dann bezeichnet $\prod\limits_{i=k}^{n} h(i)$ das Produkt
$$h(k) \cdot h(k+1) \cdots h(n)$$
- Das leere Produkt $\prod\limits_{i=k}^{n} := 1$ (falls $k > n$)

Beispiel: $\prod\limits_{i=1}^{n} i = n!$

Aussagen über alle natürliche Zahlen

Hochschule RheinMain

Wie zeigt man Aussagen der Form „Für alle natürlichen Zahlen n gilt $A(n)$"?

Dabei ist $A(n)$ eine Aussage, die von n abhängt.

Beispiele aus der Mathematik und Informatik sind:

- Für alle Folgen von n Elementen berechnet der Algorithmus die sortierte Folge.
- Der Sortieralgorithmus benötigt bei n Eingaben nicht mehr als $n \log_2 n$ Vergleiche.
- Die Anzahl der möglichen Sitzordnungen für die Klausur für n Studierende auf n Stühlen ist $n!$.
- ...

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Hochschule RheinMain

Definition (Beweisprinzip der vollständigen Induktion)

Um zu zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt, genügt es, die folgenden beiden Aussagen zu zeigen:

1. Induktionsanfang/Induktionsbasis: $A(1)$ gilt.
2. Induktionsschritt: Für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

   Nehme an, dass $A(n)$ gilt (Induktionsannahme / Induktionshypothese).

   Zeige, dass dann auch $A(n+1)$ gilt.

Korrektheit des Beweisprinzips

Hochschule RheinMain

Die Aussage $A(m)$ muss für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ gelten, denn:

- Fange bei $A(1)$ an: Die Induktionsbasis zeigt, dass die Aussage gilt.
- Jetzt wende $m-1$ mal den Induktionsschritt an:

  Da $A(1)$ gilt, gilt auch $A(2)$.
  Da $A(2)$ gilt, gilt auch $A(3)$.
  ...
  Da $A(m-1)$ gilt, gilt auch $A(m)$.

Beispiele

Hochschule RheinMain

Satz (Gaußsche Summenformel)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$

Beweis. Mit vollständiger Induktion über n, d.h. $A(n)$ ist $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$.

- Induktionsbasis: Aussage $A(1)$ gilt, denn: $\sum\limits_{i=1}^{1} i = 1$.
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Induktionsannahme: $A(n)$, d.h. $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$ gilt.

  Wir müssen $A(n+1)$ zeigen.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = n+1+\sum_{i=1}^{n} i \overset{I.A.}{=} n+1+\frac{(n+1)n}{2} = \frac{2(n+1)+(n+1)n}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \qquad \square$$

Beispiel

Satz

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist gleich zu n^2 (als Summenformel geschrieben $\sum\limits_{i=1}^{n} 2i-1 = n^2$).

Beweis. Mit vollständiger Induktion über n:

- Induktionsbasis $n=1$: Da $1 = 1^2$ stimmt die Aussage.
- Induktionsschritt: Sei $n \geq 1$ beliebig und $\sum\limits_{i=1}^{n} 2i-1 = n^2$ (Induktionsannahme).

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2i-1 = \left(\sum_{i=1}^{n} 2i-1\right) + 2(n+1) - 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} 2i-1\right) + 2n + 1$$
$$\stackrel{I.A.}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \quad \square$$

Aufgabe

Beweise mit vollständiger Induktion nach n:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Vollständige Induktion mit anderem Startwert

Beispiel: $n! > 2^n$ gilt nicht für $n \in \{1,2,3\}$, aber für alle $n \geq 4$.

Definition (Beweisprinzip der Vollständigen Induktion mit anderem Startwert)

Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Um zu zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ für jede Zahl $n \geq n_0 \in \mathbb{N}_0$ gilt, genügt es, die folgenden beiden Aussagen zu zeigen:

1. (Induktionsanfang/Induktionsbasis): $A(n_0)$ gilt.
2. (Induktionsschritt): Für jede beliebige Zahl $n \geq n_0 \in \mathbb{N}_0$ gilt:
   Nehme an, dass $A(n)$ gilt (Induktionsannahme / Induktionshypothese).
   Zeige, dass dann auch $A(n+1)$ gilt.

Beispiel

Satz

Für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ gilt $n! > 2^n$.

Beweis.

- Induktionsbasis: Für $n = 4$ gilt $n! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 16 = 2^4$.
- Induktionsschritt. Sei $n \geq 4$. Wir nehmen $n! > 2^n$ an (Induktionsannahme).
  Es gilt:
  $$(n+1)! = (n+1)n! \stackrel{I.A.}{>} (n+1)2^n \stackrel{*}{>} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$
  (*) Für $n \geq 4$ gilt $n+1 > 2$

Beispiel

Satz

Jede n-elementige Menge hat 2^n Teilmengen, d.h. für endliche Mengen M: $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis.

- Induktionsbasis $n = 0$: $|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0$
- Induktionsschritt: Sei $n \geq 0$ beliebig.
  Induktionssannahme: Jede n-elementige Menge hat 2^n Teilmengen.
  Sei M eine $n+1$-elementige Menge. Sei m ein Element aus M.
  Dann ist $M \setminus \{m\}$ eine n-elementige Menge.
  Die Induktionsannahme, zeigt, dass $M \setminus \{m\}$ 2^n Teilmengen hat.
  Zu jeder dieser Teilmengen können wir m hinzufügen oder nicht.
  D.h. M hat doppelt so viele Teilmengen wie $M \setminus \{m\}$, was $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ ergibt. □

Starke vollständige Induktion

Manchmal will man im Induktionsschritt $A(n) \to A(n+1)$ nicht nur auf die Gültigkeit von $A(n)$ zurückzugreifen, sondern z.B. auch auf $A(n-1)$.

Definition (Beweisprinzip der starken vollständigen Induktion)

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Um zu zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ gilt, genügt es, die folgende Aussage zu zeigen:

Induktionsschritt: Für jede beliebige Zahl $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ gilt:

Nehme an, dass für alle i mit $n_0 \leq i \leq n-1$ die Aussage $A(i)$ gilt (Induktionsannahme / Induktionshypothese).

Zeige, dass dann auch $A(n)$ gilt.

Basisfall ist im Induktionsschritt versteckt!
Denn die Gültigkeit von $A(n_0)$ muss ohne Induktionsannahme gezeigt werden.

Mehr Basisfälle

Zurückgreifen auf vorherige Annahmen im Induktionsschritt erfordert i.a. mehr Basisfälle.

Genauer: Wenn der Induktionsschritt zum Folgern der Gültigkeit von $A(n)$ die Gültigkeit von $A(n-k)$ benötigt, dann kann man dieses Argument nicht für $A(n_0), A(n_0+1), \ldots A(n_0+k-1)$ verwenden,

Daher muss man all diese Fälle als Basis zeigen.

Beispiel: Falscher Beweis

Aussage: Alle natürlichen Zahlen ab 3 sind ungerade.

Falscher Induktionsbeweis:
Induktionsbasis: Für $n = 3$ gilt die Aussage.
Induktionsschritt: Sei $n \geq 3$ beliebig.
Induktionsannahme: Die Zahlen $1 \leq i \leq n-1$ sind ungerade.
Da damit insbesondere $n-2$ ungerade ist, ist auch $n-2+2$ ungerade.
Damit folgt n ist ungerade.

Der Fehler ist z.B. bei $n = 4$: Der Induktionsschritt greift auf $n - 2 = 2$ zurück, aber die Induktionsannahme gibt $A(2)$ nicht her!

Wir hätten $A(4)$ auch direkt als Basis zeigen müssen (was nicht geht!)

Fibonacci-Zahlen

Leonardo Fibonacci beschrieb das Wachstum einer Kaninchenpopulation:

- Zu Beginn gibt es ein Kaninchenpaar.
- Jedes Kaninchenpaar braucht 2 Monate nach der Geburt, bis es geschlechtsreif ist.
- Von da an gebiert es in jedem Monat ein neues Paar.
- Alle Kaninchen leben ewig.

Wie viele Kaninchenpaare gibt es zu Beginn des n. Monats?

Monat	Paare
1	1
2	1
3	2 (1 altes Paar + 1 neues Paar (Nachkommen aller Paare aus Monat 1))
4	3 (2 alte Paare + 1 neues Paar (Nachkommen aller Paare aus Monat 2))
5	5 (3 alte Paare + 2 neue Paare (Nachkommen aller Paare aus Monat 3))
6	8 (5 alte Paare + 3 neue Paare (Nachkommen aller Paare aus Monat 4))
7	13 (8 alte Paare + 5 neue Paare (Nachkommen aller Paare aus Monat 5))

Fibonacci-Zahlen (2)

Allgemeine Formel: Anzahl Monat n = Anzahl $n-1$. Monat + Anzahl Monat $n-2$.

Die Folge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ nennt man die Fibonacci-Zahlen.

Die n. Fibonacci-Zahl kann durch $\mathrm{fib} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv definiert werden:

$$\mathrm{fib}(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n \in \{1,2\} \\ \mathrm{fib}(n-1) + \mathrm{fib}(n-2) & \text{für } n > 2 \end{cases}$$

Binet-Formel

Satz (Binet-Formel)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{fib}(n) = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$.

Beweis. Wir verwenden starke vollständige Induktion.

- Induktionsvoraussetzung für $n = 1$ und $n = 2$:

$$\mathrm{fib}(1) = 1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$\mathrm{fib}(2) = 1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Induktionsschritt

Sei $n \geq 3$ beliebig. Induktionsannahme: Binet-Formel gilt für $n-1$ und $n-2$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{fib}(n) &= \mathrm{fib}(n-1) + \mathrm{fib}(n-2) \\
&\overset{I.A.}{=} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1\right) - \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 1\right)\right)}{\sqrt{5}} \\
&\overset{*}{=} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Induktionsschritt (2)

Hochschule RheinMain

(*) Die Gleichheiten $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ und $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+1 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$ kann man nachrechnen:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}\right) = \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) = \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+1$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}\right) = \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right) = \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+1 \quad \square$$

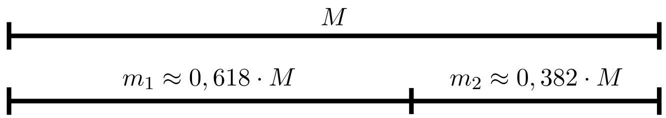
Der Goldene Schnitt

Hochschule RheinMain

Die Zahl

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61$$

wird auch als der goldene Schnitt bezeichnet.
Mit wachsendem n nähert sich $\text{fib}(n+1)/\text{fib}(n)$ an ϕ an
Schöne Eigenschaft von ϕ: Teilt man eine Strecke M in Teilstücke m_1 und m_2, mit $m_1 > m_2$, sodass $m_1/m_2 = M/m_1$, dann ist dieses Verhältnis $= \phi$:



Dieses Verhältnis wird als besonders ästhetisch wahrgenommen und in der Kunst oder im Design zur Gestaltung oft verwendet.

Hochschule RheinMain

INDUKTIVE DEFINITIONEN

- Induktiv definieren
- Strukturelle Induktion

Induktiv definieren

Hochschule RheinMain

Wie beim Induktionsbeweis, kann man auch Strukturen induktiv definieren, indem man

- Basisfall (kleinste Strukturen) und
- Induktionsschritt zum rzeugen von größeren Strukturen aus kleineren angibt.

Beispiel: Natürliche Zahlen, induktiv definiert:

Basis: 1 ist eine natürliche Zahl.

Schritt: Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ist auch der Nachfolger $n+1$ eine natürliche Zahl.

Arithmetische Ausdrücke

Hochschule RheinMain

Induktive Definition für arithmetische Ausdrücke:

- Basis: Ganze Zahlen sind arithmetische Ausdrücke.
- Schritt: Wenn a, b arithmetische Ausdrücke sind, dann sind auch $(a + b)$, $(a \cdot b)$, $(a - b)$ und (a/b) arithmetische Ausdrücke.

Bemerkung:
Die aussagenlogischen Formeln und die prädikatenlogischen Formeln waren ebenfalls induktiv definiert.

Strukturelle Induktion

Hochschule RheinMain

Eigenschaften einer indukive definierten Struktur kann man mit strukturelle Induktion führen.

- Man zeigt, dass die Eigenschaft für die Basis gilt.
- Im Induktionsschritt nimmt man an, dass die Eigenschaft für die Teilstrukturen gilt und zeigt, dass sie dann auch für jede zusammengesetzte Struktur gilt.

Beispiel

Hochschule RheinMain

Satz

Für jeden arithmetische Ausdruck a gilt: Wenn n-Operatoren in a vorkommen, dann enthält a mindestens $n + 1$ Zahlen.

Beweis. Induktion über die Struktur von a.

- Induktionsbasis: a ist eine Zahl. Dann enthält a keine Operatoren und $1 = 0 + 1$ Zahlen. Die Aussage stimmt also.
- Induktionsschritt: Seien a, b arithmetische Ausdrücke mit n_a und n_b Operatoren.
  Induktionsannahme: a enthält $n_a + 1$ Zahlen und b enthält $n_b + 1$ Zahlen.
  In $(a\ op\ b)$ mit $op \in \{+, -, \cdot, /\}$ gilt dann: Der Ausdruck enthält $n_a + n_b + 1$ Operatoren und $n_a + 1 + n_b + 1 = (n_a + n_b + 1) + 1$ Zahlen. $\square$