Hochschule RheinMain

Diskrete Strukturen

für die Studiengänge

- Angewandte Informatik
- Technische Informatik

04 Relationen, Funktionen, Abzählbarkeit

Prof. Dr. David Sabel
Wintersemester 2024/25

Stand der Folien: 3. Dezember 2024

Inhalt

Hochschule RheinMain

1. Relationen
2. Funktionen
3. Abzählbarkeit von Mengen

Hochschule RheinMain

RELATIONEN

- Was sind Relationen?
- Äquivalenzrelationen
- Äquivalenzklassen

Relationen

Hochschule RheinMain

Definition

Eine (binäre) Relation zwischen zwei Mengen M und N ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $M \times N$.

Beispiel:

Personen $P = \{\text{Anna}, \text{Bernd}, \text{Claus}\}$ und Tiere $T = \{\text{Hund}, \text{Katze}, \text{Maus}\}$

Relation mag $= \{(\text{Anna}, \text{Katze}), (\text{Bernd}, \text{Hund}), (\text{Bernd}, \text{Katze}), (\text{Claus}, \text{Maus})\}$

ist Teilmenge des kartesischen Produkts

$$P \times T = \{(\text{Anna}, \text{Hund}), (\text{Bernd}, \text{Hund}), (\text{Claus}, \text{Hund}), (\text{Anna}, \text{Katze}), (\text{Bernd}, \text{Katze}), (\text{Claus}, \text{Katze}), (\text{Anna}, \text{Maus}), (\text{Bernd}, \text{Maus}), (\text{Claus}, \text{Maus})\}$$

$\longrightarrow$ Relationen drücken Beziehungen aus!

Weitere Beispiele

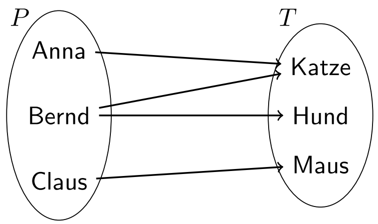
- $T = \{\text{Hund}, \text{Katze}, \text{Maus}\}$ und $N = \{\text{Fleisch}, \text{Getreide}, \text{Milch}\}$

$$\begin{aligned} R &= \{(x,y) \in (T \times E) \mid x \text{ ernährt sich am liebsten von } y\} \\ &= \{(\text{Hund}, \text{Fleisch}), (\text{Katze}, \text{Milch}), (\text{Maus}, \text{Getreide})\} \end{aligned}$$

- Die „Kleiner-Beziehung“ auf reellen Zahlen ist eine Relation:

$$R := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y\}$$

Illustration von Relationen



Pfeile repräsentieren die einzelnen Elemente der Relation

Aufgabe

Sei $S = \{\text{Istanbul}, \text{New York}, \text{Tokyo}, \text{Wiesbaden}\}$ und
$K = \{\text{Europa}, \text{Asien}, \text{Nordamerika}\}$.

Zähle die Elemente der folgenden Relation R auf

$$R = \{(x,y) \in (S \times K) \mid \text{Stadt } x \text{ liegt in Kontinent } y\}.$$

$$\begin{aligned} R = \{&(\text{Istanbul}, \text{Europa}), \\ &(\text{Istanbul}, \text{Asien}), \\ &(\text{New York}, \text{Nordamerika}), \\ &(\text{Tokyo}, \text{Asien}), \\ &(\text{Wiesbaden}, \text{Europa})\} \end{aligned}$$

Schreibweisen

Definition (Schreibweise für Relationen)

Sei $R \subseteq M \times N$ eine Relation.

- wenn $(x,y) \in R$, so sagt man „x steht in Relation R mit y“ und schreibt $x\ R\ y$.
- für $(x,y) \notin R$ schreibt man auch $x \neg R\ y$.
- statt R schreiben wir auch $\sim_R$, d.h.
  wir schreiben $x \sim_R y$ für $x\ R\ y$ und $x \not\sim_R y$ für $x \neg R\ y$.

Wenn R aus dem Kontext klar ist, lassen wir den Index R auch manchmal weg.

Beispiele für Relationen aus dem Alltag:

- $x \sim y$: „x ist befreundet mit y“
- $x \sim y$: „x ist verwandt mit y“
- $x \sim y$: „x und y sind Nachbarn“

Beispiele

Sei $R = \{(x,y) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \mid x - y$ ist ungerade$\}$.

Dann gilt:

- $(3,2) \in R$, auch geschrieben als $3\ R\ 2$, $3 \sim_R 2$ oder $3 \sim 2$.
- $(-10,5) \in R$, auch geschrieben als $-10\ R\ 5$, $-10 \sim_R 5$ oder $-10 \sim 5$.
- $(20,10) \notin R$, auch geschrieben als $20\ \neg R\ 10$, $20 \not\sim_R 10$ oder $20 \not\sim 10$.

Umkehrrelation

Definition

Für eine Relation $R \subseteq M \times N$ heißt

$$R^{-1} = \{(y,x) \in N \times M \mid (x,y) \in R\}$$

die Umkehrrelation von R (manchmal auch inverse Relation zu R).

Beispiele:

- $R = \{$(Hund, Fleisch), (Katze, Milch), (Maus, Getreide)$\}$
  $R^{-1} = \{$(Fleisch, Hund), (Getreide, Maus), (Milch, Katze)$\}$
- Die Relation „ist Nachfahre von“ ist die Umkehrrelation der Relation „ist Vorfahre von“.

Komposition

Definition

Seien $R \subseteq M \times N$ und $S \subseteq N \times O$. Dann ist die Komposition $R \circ S$ definiert als:

$$R \circ S := \{(x,z) \in (M \times O) \mid \exists y \in N : x\ R\ y \wedge y\ S\ z\}$$

Beispiel:

$P = \{$Anna, Bernd, Claus$\}$, $T = \{$Hund, Katze, Maus$\}$, $E = \{$Fleisch, Getreide, Milch$\}$

$R \subseteq (P \times T)$ mit $R = \{$(Anna, Katze), (Bernd, Hund), (Bernd, Katze), (Claus, Maus)$\}$

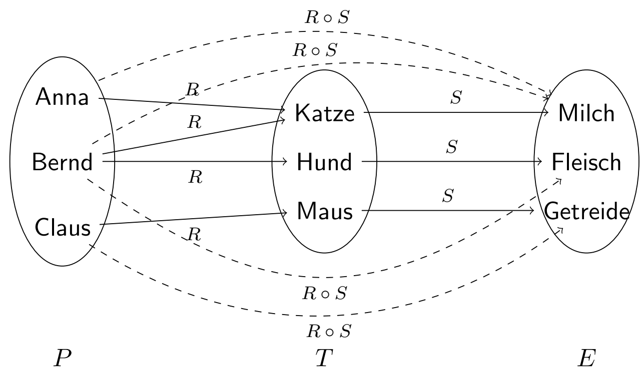
$S \subseteq (T \times E)$ mit $S = \{$(Hund, Fleisch), (Katze, Milch), (Maus, Getreide)$\}$

$R \circ S \subseteq (P \times E)$ ist

$$R \circ S = \{(\text{Anna, Milch}), (\text{Bernd, Milch}), (\text{Bernd, Fleisch}), (\text{Claus, Getreide})\}$$

Komposition graphisch

Komposition = Verschmelzen von zwei Pfeilen zu einem neuen Pfeil



Aufgabe

Hochschule RheinMain

Für die Mengen

$$T = \{\text{Hund}, \text{Katze}, \text{Maus}\},\ E = \{\text{Fleisch}, \text{Getreide}, \text{Milch}\} \text{ und}$$
$$L = \{\text{Bauernhof}, \text{Molkerei}, \text{Supermarkt}, \text{Fleischerei}\}$$

und die Relationen $S \subseteq (T \times E)$ und $Q \subseteq (E \times L)$ mit

$$S = \{(\text{Hund}, \text{Fleisch}), (\text{Katze}, \text{Milch})\},$$
$$Q = \{(\text{Fleisch}, \text{Fleischerei}), (\text{Fleisch}, \text{Supermarkt}), (\text{Getreide}, \text{Bauernhof}), (\text{Getreide}, \text{Supermarkt}), (\text{Milch}, \text{Molkerei}), (\text{Milch}, \text{Supermarkt})\}$$

berechne $S \circ Q$.

Welche Bedeutung könnten Q und $S \circ Q$ haben?

Mehrstellige Relationen

Hochschule RheinMain

Definition (n-stellige Relation)

Eine n-stellige Relation R ist eine Teilmenge des allgemeinen kartesischen Produkts von n Mengen $M_1, \ldots, M_n$:

$$R \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$$

Beispiel: Veranstaltung $= \{\text{EI}, \text{AM}, \text{DS}, \text{OOSE}\}$
Raum $= \{\text{B001}, \text{B002}\}$
Tag $= \{\text{Mo}, \text{Di}, \text{Mi}, \text{Do}, \text{Fr}\}$
Beginn $= \{0815, 1000, 1145, 1415\}$
und $R \subseteq$ (Veranstaltung $\times$ Raum $\times$ Tag $\times$ Beginn) mit

$$R = \{(\text{AM}, \text{B002}, \text{Di}, 1000), (\text{EI}, \text{B001}, \text{Fr}, 1000), (\text{DS}, \text{B001}, \text{Mo}, 0815), (\text{OOSE}, \text{B002}, \text{Mo}, 1400), (\text{OOSE}, \text{B002}, \text{Do}, 1145)\}$$

ist eine 4-stellige Relation, welche einen Erstsemester-Vorlesungsplan darstellen könnte.

Anwendung: Datenbanksysteme

Hochschule RheinMain

Grundlage für viele Datenbanken und Datenbanksysteme: Relationen und Relationale Algebra (= Relationen + Operationen)
Wesentliche Idee relationaler Datenbanken:

- Daten sind Relationen in Form von Tabellen
- Jedes n-Tupel der n-stelligen Relation ist eine Zeile in der Datenbanktabelle

Beispiel

Veranstaltung	Raum	Tag	Beginn
AM	B002	Di	1000
EI	B001	Fr	1000
DS	B001	Mo	0815
OOSE	B002	Mo	1415
OOSE	B002	Do	1145

Anwendung: Datenbanksysteme (2)

Hochschule RheinMain

Anfragesprachen wie z.B. SQL (Structured Query Language) manipulieren oder transformieren diese Tupel.

Beispiel (in etwa):

```
SELECT Veranstaltung, Beginn FROM Vorlesungsplan WHERE Tag='Mo'
```

Dies liefert die Tabelle

Veranstaltung	Beginn
DS	0815
OOSE	1415

welche eine zweistellige Relation $R' \subseteq$ (Veranstaltung $\times$ Beginn) repräsentiert, d.h. die obige SQL-Anfrage transformiert eine Relation in eine andere.

Äquivalenzrelationen

Hochschule RheinMain

Homogene Relation: $R \subseteq M \times M$, auch „Relation auf M"

Definition

Sei $\sim$ eine Relation auf M. Dann ist $\sim$

- reflexiv, falls für alle $x \in M$: $x \sim x$.
- symmetrisch, falls für alle $x, y \in M$: Wenn $x \sim y$ gilt, dann gilt auch $y \sim x$.
- transitiv, falls für alle $x, y, z \in M$: Wenn $x \sim y$ und $y \sim z$, dann gilt auch $x \sim z$.

Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt **Äquivalenzrelation**.

Beispiele

Hochschule RheinMain

Relation	reflexiv	symmetrisch	transitiv	Äquivalenzrelation
„hat denselben Nachnamen wie"	✓	✓	✓	✓
„ist ein Vorfahre von"	×	×	✓	×
„sind verheiratet"	×	✓	×	×
$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$	✓	✓	✓	✓
$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$	×	×	✓	×

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Sind die folgenden Relationen reflexiv, symmetrisch, transitiv?
Sind sie Äquivalenzrelationen?

Relation	reflexiv	symmetrisch	transitiv	Äquivalenzrelation
„besuchen dieselbe Schule" (auf der Menge aller Schüler:innen)	✓	✓	✓	✓
„haben ein gemeinsames Hobby" (auf der Menge aller Personen)	✓	✓	×	×
„ist Schwester von" (auf der Menge aller Personen)	×	×	✓	×
$\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$	✓	×	✓	×

Symmetrie

Hochschule RheinMain

Satz

Eine Relation R ist genau dann symmetrisch, wenn $R^{-1} = R$ gilt.

Beweis. Wir zeigen beide Richtungen.

- R symmetrisch $\to R^{-1} = R$:
  - Sei R symmetrisch.
  - $R \subseteq R^{-1}$: Sei $(a, b) \in R$. Mit Symmetrie folgt $(b, a) \in R$ und daher $(a, b) \in R^{-1}$.
  - $R^{-1} \subseteq R$: Sei $(a, b) \in R^{-1}$. Dann gilt $(b, a) \in R$ und mit Symmetrie $(a, b) \in R$.
- $R^{-1} = R \to R$ symmetrisch:
  - Sei $R^{-1} = R$.
  - Sei $(a, b) \in R$. Dann gilt $(a, b) \in R^{-1} = R$ und damit auch $(b, a) \in R$ □

Beispiele für Äquivalenzrelationen

Hochschule RheinMain

- Gleichheiten sind meistens Äquivalenzrelationen
- Logische Äquivalenz $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation
- Parallelität von Geraden
  (Geraden sind parallel wenn sie sich nicht schneiden)
- Kongruenz von Dreiecken
  (Dreiecke sind kongruent, wenn Winkel und Seitenlänge gleich sind)
- Äquivalenz von Programmen, z.B.
  - syntaktische Gleichheit
  - Gleichheit bis auf Umbenennung von Variablen
  - semantische Gleichheit (z.B. gleiches Ein- / Ausgabeverhalten)

Beispiel: Gleichheit von Brüchen

Hochschule RheinMain

Sei $B = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$ und $\sim \subseteq B^2$ sei $\sim := \left\{\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \mid a \cdot d = b \cdot c\right\}$

Satz

Die Gleichheit von Brüchen $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Wir prüfen alle drei Eigenschaften:

- Reflexivität: Für jeden Bruch $\frac{a}{b}$ gilt $\frac{a}{b} \sim \frac{a}{b}$, da $a \cdot b = b \cdot a$.
- Symmetrie: Sei $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$. Dann gilt $a \cdot d = b \cdot c$ und auch $c \cdot b = d \cdot a$, was zeigt $\frac{c}{d} \sim \frac{a}{b}$.
- Transitivität: Sei $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ und $\frac{c}{d} \sim \frac{e}{f}$. Dann gilt $a \cdot d = b \cdot c$ als auch $c \cdot f = d \cdot e$.
  Umformen der ersten Gleichung ergibt $a = \frac{b \cdot c}{d}$. Multiplizieren mit f ergibt $a \cdot f = \frac{b \cdot c \cdot f}{d}$.
  Einsetzen von $c \cdot f = d \cdot e$ ergibt $a \cdot f = \frac{b \cdot c \cdot f}{d} = \frac{b \cdot d \cdot e}{d} = b \cdot e$. Damit folgt $\frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}$.

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Welche der folgenden Relationen auf $\mathbb{N}$ sind Äquivalenzrelationen?

- $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ und } y \text{ sind ungerade}\}$
  keine Äquivalenzrelation, da R nicht reflexiv: $(x, x) \in R$ für gerade Zahlen x gilt nicht!
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x - y \text{ ist gerade}\}$
  Äquivalenzrelation: reflexiv: $a - a = 0$ gerade, symmetrisch: wenn $a - b = 2c$, dann ist $b - a = -2c$, transitiv: wenn $a - b = 2k$ und $b - c = 2l$, dann ist $a - c = a - b + b - c = 2(k + l)$.
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x + y \text{ ist gerade}\}$
  Äquivalenzrelation: reflexiv: $a + a = 2a$ ist gerade, symmetrisch: $a + b = 2c = b + a$, transitiv: wenn $a + b = 2k$ und $b + c = 2l$, dann ist $a + c + 2b = 2(k + l)$ und $a + c = 2(k + l - b)$.
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x - y \text{ ist ungerade}\}$
  keine Äquivalenzrelation, da nicht reflexiv, z.B. $(1, 1) \notin R$

Kongruenz modulo n

Hochschule RheinMain

Definition

Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Die Relation $\equiv_n$ auf $\mathbb{Z}$ heißt Kongruenz modulo n:

$$\begin{aligned} \equiv_n &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \mid y - x \text{ ist ein ganzzahliges Vielfaches von } n\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : y - x = k \cdot n\} \end{aligned}$$

Wenn $x \equiv_n y$, dann sagen wir x und y sind kongruent modulo n.
Eine alternative Schreibweise für $x \equiv_n y$ ist $x \equiv y \mod n$.

Beispiele:

- $6 \equiv_3 9$, denn $9 - 6 = 3$
- $5 \equiv_3 11$, denn $11 - 5 = 6$ ist ein Vielfaches von 3
- $42 \equiv_3 30$, denn $30 - 42 = -12$ ist ein Vielfaches von 3

Kongruenz modulo n (2)

Hochschule RheinMain

Satz

Die Relation $\equiv_n$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Wir prüfen alle drei Eigenschaften:

- Reflexivität: Für $x \in \mathbb{Z}$ gilt $x \equiv_n x$, denn $x - x = 0 = 0 \cdot n$.
- Symmetrie: Wenn $x \equiv_n y$, dann gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $y - x = k \cdot n$.
  Da $x - y = -k \cdot n$ und $-k \in \mathbb{Z}$, gilt $y \equiv_n x$.
- Transitivität: Sei $x \equiv_n y$ und $y \equiv_n z$. Dann gibt es $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $y - x = k_1 \cdot n$ und $z - y = k_2 \cdot n$. Umformen der ersten Gleichung ergibt $y = k_1 \cdot n + x$ und Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $z - k_1 \cdot n - x = k_2 \cdot n$ was zu $z - x = (k_1 + k_2)n$ umgeformt werden kann. Daher gilt $x \equiv_n z$. □

Division mit Rest

Hochschule RheinMain

Definition

Bei einer ganzzahligen Division mit Rest von a durch n bezeichnet man den kleinsten nicht-negativen Rest als $a \bmod n$ („a modulo n“).

Beispiele:

- $6 \bmod 3 = 0$ (denn $2 \cdot 3 + 0 = 6$)
- $11 \bmod 3 = 2$ (denn $3 \cdot 3 + 2 = 11$)
- $-11 \bmod 3 = 1$ (denn $(-4) \cdot 3 + 1 = -11$)

Bemerkungen:

- $\bmod$ in $10 \bmod 3 = 1$ ist binärer Operator auf Ganzzahlen.
  Aber: In $10 \equiv 1 \pmod 3$ ist $\bmod$ kein Operator, sondern ein syntaktisches Konstrukt bestehend aus $\equiv$ und $\bmod$.
- Wenn $a_1 \equiv_n a_2 \equiv_n \cdots \equiv_n a_m$, dann schreibt man $a_1 \equiv a_2 \equiv \cdots \equiv a_m \pmod n$.
- $a \equiv_n b$ gilt genau dann, wenn $a \bmod n = b \bmod n$.

Aufgaben

Hochschule RheinMain

Berechne:

- $9 \bmod 5$ $= 4$, denn $1 \cdot 5 + 4 = 9$
- $27 \bmod 8$ $= 3$, denn $3 \cdot 8 + 3 = 27$
- $1 \bmod 2024$ $= 1$, denn $0 \cdot 2024 + 1 = 1$
- $-4 \bmod 6$ $= 2$, denn $(-1) \cdot 6 + 2 = -4$

Äquivalenzklassen

Hochschule RheinMain

Definition

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und $x \in M$.

Dann ist $[x]_\sim := \{y \in M \mid y \sim x\}$ die Äquivalenzklasse von x.

Man nennt x einen Repräsentanten der Äquivalenzklasse $[x]_\sim$.

Äquivalenzklassen fassen äquivalente Elemente zu einer Menge zusammen:
$[x]_\sim$ ist die Menge aller Elemente, die zu x in Relation stehen.

Beispiele:

- Für $\sim$ = „besuchen dieselbe Schule“ und den Schüler Bernd ist $[\text{Bernd}]_\sim$ die Menge aller Schüler:innen, die in Bernds Schule gehen.
- Für die Kongruenz $\equiv_3$ ist $[0]_{\equiv_3}$ die Menge aller Zahlen, die ohne Rest durch 3 teilbar sind: $[0]_{\equiv_3} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \equiv_3 0\} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$

Aufgabe

Beschreibe die Elemente der Äquivalenzklasse $[4]_{\equiv_5}$.

$$[4]_{\equiv_5} = \{\dots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots\}$$

Äquivalenzklassen (2)

Satz

Äquivalente Elemente haben dieselbe Äquivalenzklasse: Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Es gilt $x \sim y$ genau dann, wenn $[x]_\sim = [y]_\sim$.

Beweis. Wir zeigen beide Richtungen:

- Sei $x \sim y$. Wir müssen zeigen $[x]_\sim = [y]_\sim$.
  - „$[x]_\sim \subseteq [y]_\sim$": Sei $z \in [x]_\sim$. Dann gilt $z \sim x$ und mit der Transitivität von $\sim$ und $x \sim y$ folgt $z \sim y$ und daher $z \in [y]_\sim$.
  - "$[y]_\sim \subseteq [x]_\sim$": Sei $z \in [y]_\sim$. Dann gilt $z \sim y$ und mit Symmetrie $y \sim z$. Aus $x \sim y$ und der Transitivität folgt $x \sim z$. Mit Symmetrie folgt $z \sim x$ und damit $z \in [x]_\sim$.
- Sei $[x]_\sim = [y]_\sim$. Da $\sim$ reflexiv ist, gilt $x \in [x]_\sim = [y]_\sim$. Aus $x \in [y]_\sim$ folgt $y \sim x$ und aufgrund der Symmetrie auch $x \sim y$. $\square$

Äquivalenzklassen (3)

Satz

Äquivalenzklassen sind gleich oder disjunkt.

Beweis. Angenommen es gibt $z \in ([x]_\sim \cap [y]_\sim)$. Dann gilt $x \sim z$ und $y \sim z$ und mit dem letzten Satz $[x]_\sim = [y]_\sim$. $\square$

Korollar

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann liegt jedes Element von M in genau einer Äquivalenzklasse.

Quotient

Aus dem Korollar folgt: Äquivalenzklassen partitionieren die Menge M.

Definition

Eine Partition einer Menge M ist eine Menge von Teilmengen von M, die

- paarweise disjunkt sind und
- deren Vereinigung wieder M ergibt.

- Die durch eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf M gegebene Partition ist
$$\{[m]_\sim \mid m \in M\}$$
.
- Diese bezeichnet man auch als Quotient von M nach $\sim$ und schreibt $M/\sim$ für sie.
- Die Mächtigkeit von $M/\sim$ bezeichnet man auch als Index von $\sim$.

Beispiele

- Die Äquivalenzklassen von $\equiv_3$ bilden eine Partition von $\mathbb{Z}$. Die Partition ist $\{[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3}\}$. D.h. der Index vom $\equiv_3$ ist 3.
- Die Äquivalenzklassen von „besucht dieselbe Schule“ bilden eine Partition aller Schüler:innen. Jede Äquivalenzklasse enthält genau die Schüler:innen einer Schule. Der Index von „besucht dieselbe Schule“ entspricht der Anzahl an Schulen.
- Die Äquivalenzklassen von $=$ auf $\mathbb{N}$ sind $[i]_= = \{i\}$, d.h. jede Äquivalenzklasse enthält nur den Repräsentanten selbst. Die Partition dazu ist $\{[1]_=, [2]_=, \ldots\} = \{[i]_= \mid i \in \mathbb{N}\}$. Der Index von $=$ auf $\mathbb{N}$ ist daher unendlich.

Weitere Eigenschaften homogener Relationen

Definition

Sei $\sim$ eine Relation auf einer Menge M. Dann ist $\sim$

- irreflexiv, falls für alle $x \in M$ gilt: $x \not\sim x$.
- antisymmetrisch, falls für alle $x, y \in M$: Wenn $x \sim y$ und $y \sim x$, dann gilt $x = y$.
- asymmetrisch, falls für alle $x, y \in M$ gilt: Wenn $x \sim y$, dann $y \not\sim x$.
- total, falls für alle $x, y \in M$ gilt: $x \sim y$ oder $y \sim x$.

Eine Relation, die

- transitiv und reflexiv ist, heißt Quasiordnung.
- transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist, heißt Halbordnung oder partielle Ordnung.
- transitiv, reflexiv, antisymmetrisch und total ist, heißt (totale) Ordnung.
- transitiv, irreflexiv und asymmetrisch ist, heißt Striktordnung.

Beispiele

- $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist eine totale Ordnung.
- $<$ auf $\mathbb{N}$ ist eine Striktordnung.
- $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist partielle Ordnung: reflexiv ($M \subseteq M$); antisymmetrisch (wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ dann $M = N$); und transitiv, nicht total: z.B. $\{1, 2\}$ und $\{3, 4\}$ unvergleichbar bzgl. $\subseteq$.
- Sei $\leq_{\text{Obst}}$ Relation auf Äpfel und Birnen:
  $a \leq_{\text{Obst}} b$, wenn a und b beides Äpfel oder beides Birnen sind und das Gewicht von b nicht größer als das Gewicht von a ist.
  $\leq_{\text{Obst}}$ ist eine partielle Ordnung, aber keine totale Ordnung (da $\leq_{\text{Obst}}$ keine Äpfel mit Birnen vergleicht)

FUNKTIONEN

- Was sind Funktionen?
- Eigenschaften von Funktionen
- Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Funktionen

Definition

Sei R eine Relation mit $R \subseteq M \times N$. Dann heißt R

- linkstotal, wenn es zu jedem $x \in M$ mindestens ein $y \in N$ mit $x\ R\ y$ gibt.
- rechtstotal, wenn es zu jedem $y \in N$ mindestens ein $x \in M$ mit $x\ R\ y$ gibt.
- linkseindeutig, wenn es zu jedem $y \in N$ höchstens ein $x \in M$ mit $x\ R\ y$ gibt.
- rechtseindeutig, wenn es zu jedem $x \in M$ höchstens ein $y \in N$ mit $x\ R\ y$ gibt.

Funktionen sind spezielle Relationen:

Jedem Element aus M muss genau ein Element aus N zugeordnet werden.

Definition

Seien M und N Mengen. Eine Funktion f (manchmal auch Abbildung) von M nach N ist eine Relation $f \subseteq M \times N$, so dass es zu jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ gibt mit $(x, y) \in f$, d.h. f ist linkstotal und rechtseindeutig.

Beispiel

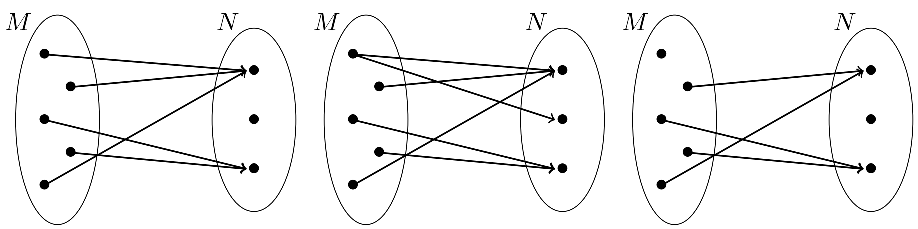
Sei $P = \{\text{Anna}, \text{Bert}, \text{Carl}\}$ und $A = \{21, 24, 27\}$.

Die Relation f ordne jeder Person eindeutig ihr Alter zu:

$$f = \{(\text{Anna}, 27), (\text{Bert}, 21), (\text{Carl}, 21)\}$$

Da jeder Person aus P genau ein Alter aus A zugeordnet wird ist f eine Funktion.

Illustration



Funktion
rechtseindeutig und linkstotal

keine Funktion
nicht rechtseindeutig!

keine Funktion
nicht linkstotal!

Relationen, die rechtseindeutig aber nicht linkstotal sind, werden auch als partielle Funktionen bezeichnet, da sie nicht überall definiert sind.

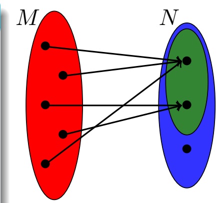
Notation für Funktionen

Definition

Für eine Funktion $f \subseteq M \times N$ schreiben wir auch $f : M \to N$.

Da es für $x \in M$ genau ein Paar gibt mit $(x, y) \in f$, schreiben wir auch $y = f(x)$.

Dabei ist M der Definitionsbereich von f, N der Wertebereich von f und $\{f(x) \mid x \in X\} \subseteq N$ ist der Bildbereich von f.



Viele Möglichkeiten, Funktionen darzustellen:

- Menge von Paaren
- Wertetabelle
- textuell (z.B. „f berechnet das Quadrat der Eingabe“)
- mit einer Funktionsgleichung (z.B. $f(x) = x^2$),
- als Funktionsgraph, ...

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Definition

Sei $f : M \to N$ eine Funktion.

- f heißt injektiv, wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

  Wenn $x_1 \neq x_2$, dann $f(x_1) \neq f(x_2)$.

  D.h. keine zwei verschiedenen Elemente aus M werden durch f auf dasselbe Element aus N abgebildet.

- f heißt surjektiv, wenn:

  Für jedes $y \in N$ gibt es ein $x \in M$ mit $f(x) = y$.

  D.h. jedes Element aus N wird durch f „getroffen". In diesem Fall sind Bildbereich und Wertebereich identisch.

- f heißt bijektiv (auch eineindeutig), wenn f injektiv und surjektiv ist.

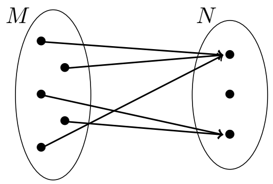
Veranschaulichung mit Mänteln und Haken

Sei M ein Menge von Mänteln und N ein Menge von Garderobenhaken.

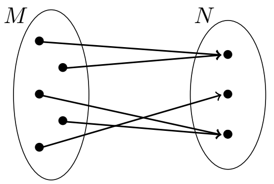
Sei $f : M \to N$ eine Funktion, die Mäntel auf Haken aufhängt.

- Injektivität von f bedeutet, dass niemals zwei oder mehr Mäntel an ein und demselben Haken hängen.
- Surjektivität von f bedeutet, dass an jedem Haken mindestens ein Mantel hängt.
- Bijektivität von f bedeutet, dass an jedem Haken genau ein Mantel hängt.

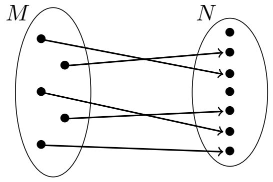
Illustration



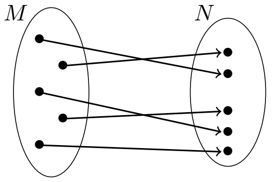
nicht injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv



nicht injektiv, surjektiv, nicht bijektiv



injektiv, nicht surjektiv, nicht bijektiv



injektiv, surjektiv, bijektiv

Beispiele

- Funktion, die jeder Person deren Geburtsdatum zuordnet, ist nicht injektiv, da mehrere Menschen am selben Tag Geburtstag haben.
- Funktion, die jedem Datum dessen Wochentag zuordnet: nicht injektiv, aber surjektiv.
- Funktion, die jeder Fahrgestellnummer eines KFZs sein Kennzeichen zuordnet, ist injektiv.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist nicht injektiv (da z.B. $f(-2) = f(2) = 4$) und nicht surjektiv (z.B. gibt es kein x mit $f(x) = -1$).
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x + 3$ ist bijektiv: Wenn $f(x_1) = 2x_1 + 3 = f(x_2) = 2x_2 + 3$, dann folgt $x_1 = x_2$. Zu jedem $y \in \mathbb{R}$ gibt es x mit $2x + 3 = y$, nämlich $x = \frac{1}{2} \cdot (y - 3)$.
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = -x$ ist injektiv aber nicht surjektiv.
- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = -x$ ist bijektiv.
- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = |x|$ ist nicht injektiv, aber surjektiv.

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Prüfe für jede der folgenden Funktionen, ob diese injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

- Funktion, die jedem Tripel aus (Autor(en),Buchtitel,Verlag) die IBAN des Buches zuordnet.
  injektiv, surjektiv wenn man nur die vergebenen IBANs als Wertebereich nimmt
- Funktion, die jedem Tripel aus (Autor(en),Buchtitel,Verlag) das Erscheinungsjahr zuordnet. nicht injektiv, surjektiv, wenn man nur die Jahre seit Erfindung des Buchdrucks als Wertebereich nimmt
- Funktionen
  $f : \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} \to$ {⚀, ⚁, ⚂, ⚃},
  $g : \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} \to$ {⚀, ⚁, ⚂, ⚃},
  $h : \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} \to$ {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄}
  mit

	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$
f	⚃	⚂	⚂	⚃
g	⚃	⚁	⚀	⚂
h	⚄	⚃	⚁	⚀

  f: nicht injektiv, nicht surjektiv
  g: bijektiv
  h: injektiv, nicht surjektiv

Umkehrfunktion

Hochschule RheinMain

Definition

Jede bijektive Funktion $f : M \to N$ ist umkehrbar.

D.h. die Umkehrrelation f^{-1} ist wieder eine Funktion, die Umkehrfunktion.

Bei der Umkehrfunktion sind Definitionsbereich und Wertebereich vertauscht, d.h. $f^{-1} : N \to M$.

Satz

Sei $f : M \to N$ eine Bijektion und $f^{-1} : N \to M$. Dann gilt $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle x aus M und $f(f^{-1})(x) = x$ für alle x aus N.

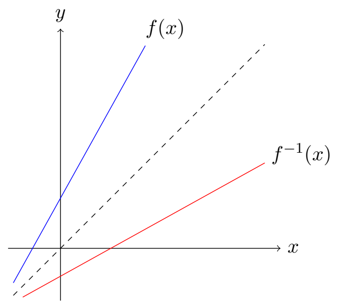
Beispiel

Hochschule RheinMain

Umrechnung von Grad-Celsius in Grad-Fahrenheit: $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$

Grad-Fahrenheit in Grad-Celsius kann mit der Umkehrfunktion von f berechnet werden!

Graphisch: Umkehrfunktion durch Spiegelung an der Geraden $y = x$:



Berechnen der Funktionsgleichung für f^{-1}:

- Ersetze $f(x)$ durch y.
  Ergibt $y = \frac{9}{5}x + 32$.
- Löse Gleichung nach x auf.
  Ergibt $x = (y - 32)\frac{5}{9} = \frac{5}{9}y - \frac{160}{9}$
- Vertausche x und y und ersetze y durch $f^{-1}(x)$.
  Ergibt $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$.

Hochschule RheinMain

ABZÄHLBARKEIT

- Gleichmächtigkeit
- abzählbar und überabzählbar

Gleiche Mächtigkeit

Hochschule RheinMain

Wann haben zwei Mengen die gleiche Anzahl an Elementen?

→ Bei endlichen Mengen M und N:

Vergleiche $|M|$ und $|N|$ (beides sind natürliche Zahlen)

→ Bei unendlichen vielen Elementen?

gilt „unendlich“ = „unendlich“?

Motivation: Hilberts Hotel

Hochschule RheinMain

Betrachte das folgende von David Hilbert vorgeschlagene Gedankenexperiment.

Normales Hotel: Endliche viele Zimmer.
Sind alle Zimmer belegt, dann kann man keine neuen Gäste aufnehmen.

Hilberts Hotel: Unendlich viele Zimmer, mit natürlichen Zahlen $i \in \mathbb{N}$ durchnummeriert.

Es seien alle Zimmer belegt, d.h.
Es gibt Zuordnung Gast i zu Zimmer i für alle $i \in \mathbb{N}$

Es kommt ein neuer Gast? Hat Hilberts Hotel ein Zimmer?

→ Ja, durch Zimmer neu verteilen:
- Altgast i bekommt Zimmer $i + 1$
- Dann ist Zimmer 1 frei!
- Dort kommt der neue Gast unter.

Motivation: Hilberts Hotel (2)

Hochschule RheinMain

Angenommen, es kommt nicht nur ein Gast, sondern ein Bus mit unendlich vielen (die mit natürlichen Zahlen durchnummeriert sind, z.B. Neugast i mit $i \in \mathbb{N}$).

Kann das Hotel diese Gäste aufnehmen?

→ Ja, durch Zimmer neu verteilen:
- Jeder alte Gast i zieht in Zimmer $2i$
- Unendlich viele frei Zimmer!
- Neugast i zieht in Zimmer $2i - 1$.

Motivation: Hilberts Hotel (3)

Hochschule RheinMain

Und wenn unendlich viele Busse (i mit $i \in \mathbb{N}$) mit jeweils unendlich vielen Gästen (durchnummeriert: Gast j aus Bus i mit $j \in \mathbb{N}$) kommen?

→ Geht immer noch durch Zimmer neu verteilen:
- Altgast i zieht in Zimmer 2^i
- Gast j aus Bus i zieht in Zimmer p_i^j, mit p_i ist die $i + 1$. Primzahl
- Alle bekommen unterschiedliche Zimmernummern!
- Es sind sogar noch jede Menge Zimmer frei, z.B. alle mit Nummer 6^i $i \in \mathbb{N}$.

Hilberts Hotel: Fazit

Hochschule RheinMain

- Anscheinend ist unendlich = unendlich, man findet immer noch so viel Platz
- Aber: Der Schein trügt!
- Einschränkung bei Hilberts Hotel: Wir haben immer angenommen, dass wir Zimmer, Gäste, Busse durchnummerieren können!

Gleichmächtige Mengen

Hochschule RheinMain

Definition

Zwei Mengen M und N werden genau dann als gleichmächtig bezeichnet, wenn es eine Bijektion $f : M \to N$ gibt.

Bemerkung:
Die Relation „sind gleichmächtig" auf Mengen ist eine Äquivalenzrelation.

Abzählbarkeit

Hochschule RheinMain

Definition

Eine Menge M heißt abzählbar, wenn M endlich oder gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist (im zweiten Fall sagt man auch, dass M abzählbar unendlich ist).

Satz

Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind gleichmächtig, d.h. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar.

Beweis.

- Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = 2 \cdot x + 1$ für $x \geq 0$ und $f(x) = -2 \cdot x$ für $x < 0$.
- f bildet negative Zahlen auf gerade und nicht-negative auf ungerade Zahlen ab.
- f ist injektiv: Sei $f(a) = f(b)$. Dann ist das Vorzeichen von a und b gleich.
  Wenn beide negativ sind, dann $-2a = -2b$ und damit $a = b$.
  Wenn beide nicht-negativ sind, dann $2a + 1 = 2b + 1$ und damit $a = b$.
- f ist surjektiv: Sei $c \in \mathbb{N}$. Wenn c gerade ist, dann ist $-c/2 \in \mathbb{Z}$ und $f(-c/2) = c$.
  Wenn c ungerade ist, dann ist $(c-1)/2 \in \mathbb{Z}$ und $f((c-1)/2) = c$. □

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Zeige, dass die Menge aller Vielfachen von 3 abzählbar ist.

- $M = \{k \cdot 3 \mid k \in \mathbb{N}\}$
- Sei $f : \mathbb{N} \to M$ mit
$$f(i) = i \cdot 3$$
- f ist bijektiv, denn:
  - f ist injektiv: für $i \neq j$ gilt: $f(i) = 3i \neq 3j = f(j)$
  - f ist surjektiv: Wenn $c \in M$, dann ist $c = k \cdot 3$ und $f(k) = c$.

Abzählbarkeit der rationalen Zahlen

Satz

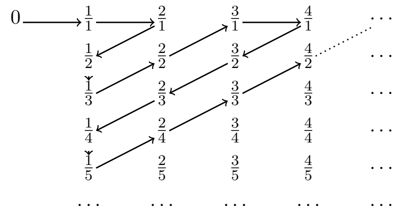
Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar, d.h. gleichmächtig zu $\mathbb{N}$.

Beweis. Man muss die Brüche abzählen (Cantorsches Abzählbarschema)

Zunächst die nicht-negativen Brüche:

0	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\cdots$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\cdots$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\cdots$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Abzählen durch Ablaufen der Diagonalen:



Entferne nicht gekürzte Brüche und füge hinter jeden Bruch $\frac{p}{q}$ $(\neq 0)$ den negativen Bruch $-\frac{p}{q}$ hinzu. Das ergibt $0 \to \frac{1}{1} \to -\frac{1}{1} \to \frac{2}{1} \to -\frac{2}{1} \to \frac{1}{2} \to -\frac{1}{2} \to \frac{1}{3} \to \cdots$ □

Überabzählbarkeit

Satz von Cantor

Die Potenzmenge der natürlichen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist nicht abzählbar. Es gilt sogar: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ jeder Menge M hat eine größere Mächtigkeit als M.

Beweis. Für endliche Mengen ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} > |M|$. Für unendliche Mengen:
Nehme an, es gibt Bijektion $f : M \to \mathcal{P}(M)$. Definiere $A := \{x \in M \mid x \notin f(x)\}$.
D.h. A enthält alle Elemente x aus M, die durch f auf Teilmengen von M abgebildet werden, die x nicht selbst enthalten.
Da $A \subseteq M$ und f surjektiv ist, gibt es ein $a \in M$ mit $f(a) = A$.

- Wenn $a \in f(a) = A$, dann ist das ein Widerspruch, da A nur Elemente enthält, für die $x \notin f(x)$ gilt, also hier insbesondere $a \notin f(a)$ gilt.
- Wenn $a \notin f(a) = A$, dann ist das ein Widerspruch, da $a \in A$ gelten müsste, denn da $a \notin f(a)$ gilt, ist die Aussageform in der Definition von A für $x = a$ erfüllt.

Beides Mal ein Widerspruch. Annahme war falsch, die Bijektion gibt es nicht. □

Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Satz

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.
Es gilt sogar: Das reelle Intervall $[0, 1)$ ist nicht abzählbar.

Beweis durch Widerspruch. Nehme an, es gibt Bijektion $f : \mathbb{N} \to [0, 1)$. Wir schreiben die Dezimalbrüche $f(1), f(2), f(3), \ldots$ in dieser Reihenfolge untereinander auf:

$$
\begin{array}{lll}
f(1) = & 0, & d_{1,1}\ d_{1,2}\ d_{1,3}\ d_{1,4}\ d_{1,5}\cdots \\
f(2) = & 0, & d_{2,1}\ d_{2,2}\ d_{2,3}\ d_{2,4}\ d_{2,5}\cdots \\
f(3) = & 0, & d_{3,1}\ d_{3,2}\ d_{3,3}\ d_{3,4}\ d_{3,5}\cdots \\
f(4) = & 0, & d_{4,1}\ d_{4,2}\ d_{4,3}\ d_{4,4}\ d_{4,5}\cdots \\
f(5) = & 0, & d_{5,1}\ d_{5,2}\ d_{5,3}\ d_{5,4}\ d_{5,5}\cdots \\
\ldots & &
\end{array}
$$

Dabei sind $d_{i,j}$ die einzelnen Ziffern, der Nachkommastellen.

Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ (2)

Konstruiere neuen Dezimalbruch $b = 0, b_1 b_2 \ldots$:
Wähle für jede der Ziffern b_i immer so, dass gilt $b_i \neq d_{i,i}$ (das geht immer).

$$
\begin{array}{lll}
b = & 0, & b_1\ \ b_2\ \ b_3\ \ b_4\ \ b_5\cdots \\
 & & \\
f(1) = & 0, & \mathbf{d_{1,1}}\ d_{1,2}\ d_{1,3}\ d_{1,4}\ d_{1,5}\cdots \\
f(2) = & 0, & d_{2,1}\ \mathbf{d_{2,2}}\ d_{2,3}\ d_{2,4}\ d_{2,5}\cdots \\
f(3) = & 0, & d_{3,1}\ d_{3,2}\ \mathbf{d_{3,3}}\ d_{3,4}\ d_{3,5}\cdots \\
f(4) = & 0, & d_{4,1}\ d_{4,2}\ d_{4,3}\ \mathbf{d_{4,4}}\ d_{4,5}\cdots \\
f(5) = & 0, & d_{5,1}\ d_{5,2}\ d_{5,3}\ d_{5,4}\ \mathbf{d_{5,5}}\cdots \\
\ldots & &
\end{array}
$$

Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = b$, denn b kommt offensichtlich in der Tabelle nicht vor, denn b ist an der i. Nachkommastelle verschieden von $f(i)$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass f surjektiv ist. Daher kann f nicht existieren.

Überabzählbarkeit

Hochschule RheinMain

Definition

Eine Menge die nicht abzählbar ist, nennt man überabzählbar.

Satz

Die reellen Zahlen, das reelle Intervall $[0, 1)$ als auch die Potenzmenge der natürlichen Zahlen, die Potenzmenge der ganzen Zahlen, die Potenzmenge der rationalen Zahlen sind allesamt überabzählbar.

Schlussbemerkung

Hochschule RheinMain

Der der letzte Satz zeigt auch, dass die überabzählbaren Mengen nicht alle gleichmächtig sind.

So ist z.B. die Potenzmenge der reellen Zahlen wieder mächtiger als die reellen Zahlen selbst.

Es gibt eine Theorie, die sich mit diesen verschiedenen Unendlichkeiten beschäftigt und daraus wieder Zahlen macht (diese heißen Kardinalzahlen).

Interessanterweise kann man auch mit diesen Zahlen wieder rechnen.