Diskrete Strukturen

für die Studiengänge

- Angewandte Informatik
- Technische Informatik

03 Mengen

Prof. Dr. David Sabel

Wintersemester 2024/25

Stand der Folien: 18. November 2024

Hochschule RheinMain

Inhalt

MENGEN BESCHREIBEN

- Was sind Mengen?
- Grundlegende Notationen
- Mengen beschreiben durch Aufzählen
- Mengen beschreiben durch Eigenschaften

Was sind Mengen?

Hochschule RheinMain

Georg Cantors Definition

„Unter einer ‘Menge’ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohl-unterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‘Elemente’ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Baut man darauf auf, so kann dies zu Widersprüchen führen!

Russelsche Antinomie

- Menge $R := \{x \mid x \notin x\}$
- R ist die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.
- Aber weder $R \in R$ noch $R \notin R$ kann gelten (Widerspruch!).

Was sind Mengen?

Hochschule RheinMain

Georg Cantors Definition

„Unter einer ‘Menge’ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohl-unterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‘Elemente’ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Baut man darauf auf, so kann dies zu Widersprüchen führen!

Russelsche Antinomie

- Menge $R := \{x \mid x \notin x\}$
- R ist die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.
- Aber weder $R \in R$ noch $R \notin R$ kann gelten (Widerspruch!).

→ Definition von Mengen ist schwierig (axiomatische Mengenlehre)

Wir machen keine Mengendefinition, sondern beschreiben Mengen durch Aufzählen / durch Eigenschaften

Grundlegende Begriffe und Notationen

- Die Objekte einer Menge nennt man Elemente.
- Eine Menge können wir aufschreiben, indem wir die Elemente aufzählen.

Definition (Notation für Mengen)

- Elemente einer Menge werden mit Kommas getrennt und durch geschweifte Klammern $\{$ und $\}$ umschlossen.
- Wenn Objekt m in Menge M enthalten ist, schreiben wir $m \in M$, sonst $m \notin M$.
- Die **leere Menge** $\emptyset$ oder $\{\}$ ist die Menge, welche keine Elemente enthält.

Grundlegende Begriffe und Notationen

- Die Objekte einer Menge nennt man Elemente.
- Eine Menge können wir aufschreiben, indem wir die Elemente aufzählen.

Definition (Notation für Mengen)

- Elemente einer Menge werden mit Kommas getrennt und durch geschweifte Klammern $\{$ und $\}$ umschlossen.
- Wenn Objekt m in Menge M enthalten ist, schreiben wir $m \in M$, sonst $m \notin M$.
- Die **leere Menge** $\emptyset$ oder $\{\}$ ist die Menge, welche keine Elemente enthält.

Beispiele:

- $\{1, 2, 3\}$ die Menge der Zahlen 1,2 und 3
- $\{\text{Schwarz}, \text{Weiß}\}$ ist die Menge der Farben Schwarz und Weiß
- $4 \in \{2, 4, 6, 9\}$ und $5 \notin \{2, 4, 6, 9\}$
- $4 \notin \emptyset$ und $\text{Weiß} \notin \{\}$

Gleichheit und Teilmengen

Hochschule RheinMain

Definition

- Menge M ist eine **Teilmenge** von N ($M \subseteq N$) wenn $\forall x \in M : x \in N$ gilt.
- Menge M ist eine **echte Teilmenge** von N, ($M \subset N$) wenn $M \subseteq N \land \exists y \in N : y \notin M$.
- Mengen M und N sind **gleich** ($M = N$), wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gilt.

→ Die Reihenfolge der Elemente spielt in einer Menge keine Rolle.

→ Ebenso werden Elemente in einer Menge nicht mehrfach betrachtet.

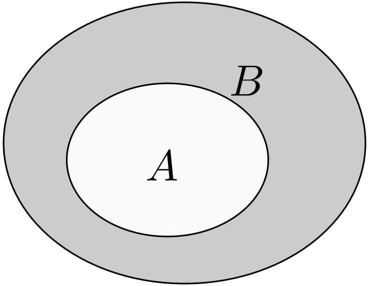
Beispiele:

- $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$

Venn-Diagramme

Graphische Darstellung von Mengen und deren Beziehungen (benannt nach John Venn)

Gilt $A \subset B$ so zeichnet man:



Zahlenmengen

Definition (Zahlenmengen)

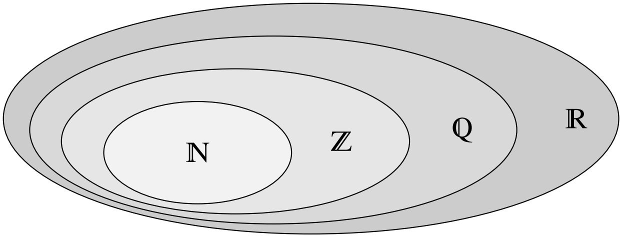
Wir definieren Symbole für bekannte Zahlenmengen:

- Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Menge der natürlichen Zahlen und 0: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$
- Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} :=$ alle gekürzten Brüche, bzw. endliche oder periodische Dezimalzahlen.
- Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R} :=$ alle Dezimalzahlen.

Zahlenmengen (2)

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, denn

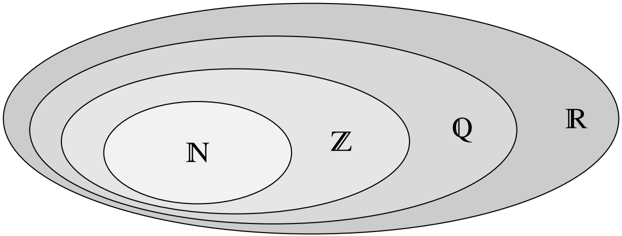
- $? \in \mathbb{Z}$ aber $? \notin \mathbb{N}$
- $? \in \mathbb{Q}$ aber $? \notin \mathbb{Z}$
- $? \in \mathbb{R}$ aber $? \notin \mathbb{Q}$



Zahlenmengen (2)

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, denn

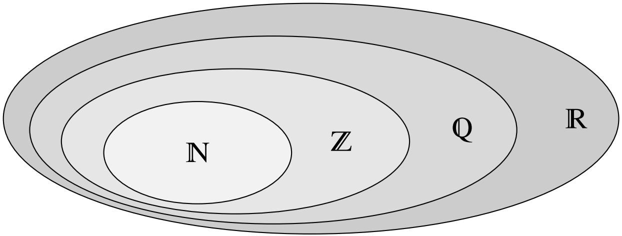
- $-1 \in \mathbb{Z}$ aber $-1 \notin \mathbb{N}$
- $?$ $\in \mathbb{Q}$ aber $?$ $\notin \mathbb{Z}$
- $?$ $\in \mathbb{R}$ aber $?$ $\notin \mathbb{Q}$



Zahlenmengen (2)

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, denn

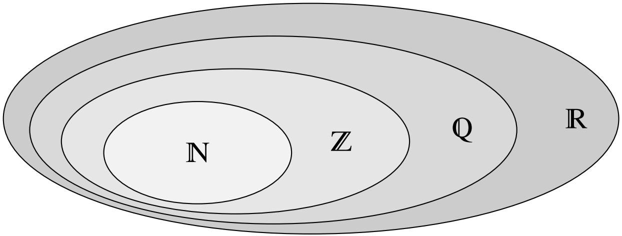
- $-1 \in \mathbb{Z}$ aber $-1 \notin \mathbb{N}$
- $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ aber $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$
- **?** $\in \mathbb{R}$ aber **?** $\notin \mathbb{Q}$



Zahlenmengen (2)

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, denn

- $-1 \in \mathbb{Z}$ aber $-1 \notin \mathbb{N}$
- $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ aber $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



Mengenbeschreibung durch Eigenschaft

Hochschule RheinMain

Definition (Mengenbeschreibung durch Eigenschaft)

Sei M eine bereits definierte Menge und $P(x)$ eine Aussageform (mit x aus M).
Dann beschreibt

$$\{x \in M \mid P(x)\}$$

die Teilmenge von M, die alle Elemente x enthält, die $P(x)$ erfüllen.

Dabei steht „$|$“ für „mit der Eigenschaft“

Mengenbeschreibung durch Eigenschaft

Hochschule RheinMain

Definition (Mengenbeschreibung durch Eigenschaft)

Sei M eine bereits definierte Menge und $P(x)$ eine Aussageform (mit x aus M). Dann beschreibt

$$\{x \in M \mid P(x)\}$$

die Teilmenge von M, die alle Elemente x enthält, die $P(x)$ erfüllen.

Dabei steht „$|$" für „mit der Eigenschaft"

Beispiele:

- Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen: $\{x \in \mathbb{N} \mid \text{ungerade}(x)\}$ (wenn ungerade(x) entsprechende Aussageform ist)
- Natürliche Zahlen als Teilmenge der ganzen Zahlen: $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$
- Primzahlen: $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 1 \text{ und } x \text{ ist nur durch 1 und sich selbst teilbar}\}$

Weitere Schreibweisen

Hochschule RheinMain

Erweiterung der Mengenbeschreibung durch Eigenschaft:

$$\{h(x) \mid x \in X, P(x)\}$$

wobei

- h ist eine Funktion, die auf x angewendet wird
- $P(x)$ ist eine Aussageform (mit x aus X)
- zu beachten ist, dass $x \in X$ hinter $\mid$ steht.

Beispiele:

- Menge aller Quadratzahlen größer als 999:

$$\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x^2 > 999\}$$

- Die Menge aller Kubikzahlen (mit leerer Aussageform $=$ immer wahr)

$$\{x^3 \mid x \in \mathbb{N}\}$$

Aufgabe

Stelle die folgenden Mengen durch Aufzählen der Elemente dar:

- $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ teilt die Zahl 42$\}$
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ ist ungerade und $-4 \leq x < 5\}$

Aufgabe

Stelle die folgenden Mengen durch Aufzählen der Elemente dar:

- $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ teilt die Zahl } 42\} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist ungerade und } -4 \leq x < 5\}$

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Stelle die folgenden Mengen durch Aufzählen der Elemente dar:

- $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ teilt die Zahl } 42\} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist ungerade und } -4 \leq x < 5\} = \{-3, -1, 1, 3\}$

Schreibweise für Intervalle

Hochschule RheinMain

Definition (Intervalle)

Für $a < b \in \mathbb{R}$ definieren wir Schreibweisen für Intervalle:

Geschlossenes Intervall:	$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
Offenes Intervall:	$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Linksseitig halboffenes Intervall:	$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
Rechtsseitig halboffenes Intervall:	$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Manchmal eckige Klammern „falsch herum" statt runder Klammern:

$]a, b[$, $]a, b]$ und $[a, b[$

Weitere Schreibweisen und Vereinfachungen

- $x \in \{x \in M \mid P(x)\}$ kann man auch direkt $x \in M \wedge P(x)$ schreiben.
  Wenn M klar ist, kann man auch nur $P(x)$ schreiben.
- statt $\{x \in M \mid P(x)\}$ schreiben wir auch $\{x \mid x \in M \wedge P(x)\}$ oder
  – wenn M klar ist – $\{x \mid P(x)\}$

OPERATIONEN AUF MENGEN

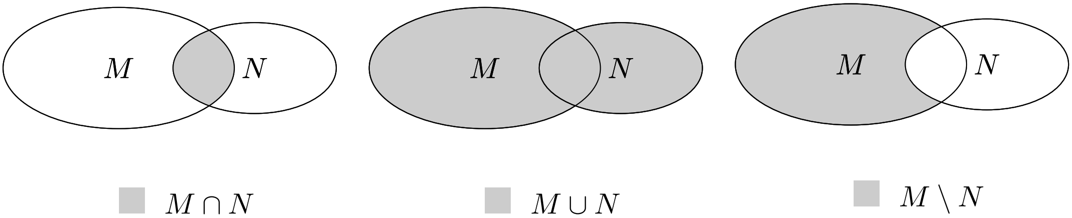
- Schnitt
- Vereinigung
- Differenz
- Komplement

Operationen auf Mengen

Hochschule RheinMain

Definition (Schnitt, Vereinigung, Differenz)

1. Schnitt: $M \cap N := \{x \mid x \in M \land x \in N\}$
2. Vereinigung: $M \cup N := \{x \mid x \in M \lor x \in N\}$
3. Differenzmenge (M ohne N): $M \setminus N := \{x \mid x \in M \land x \notin N\}$



Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\{1,2,3\} \cap \{2,4,6\} = \{2\}$
- $\{1,2,3\} \cup \{2,4,6\} = \{1,2,3,4,6\}$
- $\{1,2,3\} \setminus \{2,4,6\} = \{1,3\}$

Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\{1,2,3\} \cap \{2,4,6\} = \{2\}$
- $\{1,2,3\} \cup \{2,4,6\} = \{1,2,3,4,6\}$
- $\{1,2,3\} \setminus \{2,4,6\} = \{1,3\}$

Mit M = Alle Informatikstudierenden, N= Alle Erstsemester

- $M \cap N$ = Alle Informatikstudierenden im ersten Semester
- $M \cup N$ = Alle Studierende, die im ersten Semester sind oder Informatik studieren (oder beides)
- $M \setminus N$ = Alle Informatik-Studierende, die nicht im ersten Semester studieren

Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\{1,2,3\} \cap \{2,4,6\} = \{2\}$
- $\{1,2,3\} \cup \{2,4,6\} = \{1,2,3,4,6\}$
- $\{1,2,3\} \setminus \{2,4,6\} = \{1,3\}$

Mit M = Alle Informatikstudierenden, N= Alle Erstsemester

- $M \cap N$ = Alle Informatikstudierenden im ersten Semester
- $M \cup N$ = Alle Studierende, die im ersten Semester sind
  oder Informatik studieren (oder beides)
- $M \setminus N$ = Alle Informatik-Studierende, die nicht im ersten Semester studieren

Mit C = Menge aller durch 3 teilbaren Zahlen und D = Menge aller geraden Zahlen

- $C \cap D$ = Menge aller durch 6 teilbaren Zahlen.
- $C \cup D$ = Menge aller durch 2 oder 3 teilbaren Zahlen
- $C \setminus D$ = Menge aller Zahlen, die durch 3 aber nicht durch 6 teilbar sind.

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.
Bestimme

- $A \cap B$
- $A \cap C$
- $B \cap C$
- $A \cup B$
- $A \cup B \cup C$
- $A \setminus B$
- $A \setminus C$
- $A \setminus (B \cap C)$

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.
Bestimme

- $A \cap B \quad = \emptyset$
- $A \cap C$
- $B \cap C$
- $A \cup B$
- $A \cup B \cup C$
- $A \setminus B$
- $A \setminus C$
- $A \setminus (B \cap C)$

Aufgabe

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.
Bestimme

- $A \cap B \quad = \emptyset$
- $A \cap C \quad = \{12\}$
- $B \cap C$
- $A \cup B$
- $A \cup B \cup C$
- $A \setminus B$
- $A \setminus C$
- $A \setminus (B \cap C)$

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.
Bestimme

- $A \cap B \;= \emptyset$
- $A \cap C \;= \{12\}$
- $B \cap C = \{6, 18\}$
- $A \cup B$
- $A \cup B \cup C$
- $A \setminus B$
- $A \setminus C$
- $A \setminus (B \cap C)$

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.
Bestimme

- $A \cap B \quad = \emptyset$
- $A \cap C \quad = \{12\}$
- $B \cap C = \{6, 18\}$
- $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \cup B \cup C$
- $A \setminus B$
- $A \setminus C$
- $A \setminus (B \cap C)$

Aufgabe

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.
Bestimme

- $A \cap B \;= \emptyset$
- $A \cap C \;= \{12\}$
- $B \cap C = \{6, 18\}$
- $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \cup B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \setminus B$
- $A \setminus C$
- $A \setminus (B \cap C)$

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.
Bestimme

- $A \cap B \ = \emptyset$
- $A \cap C \ = \{12\}$
- $B \cap C = \{6, 18\}$
- $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \cup B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \setminus B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
- $A \setminus C$
- $A \setminus (B \cap C)$

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.
Bestimme

- $A \cap B \;= \emptyset$
- $A \cap C \;= \{12\}$
- $B \cap C = \{6, 18\}$
- $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \cup B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \setminus B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
- $A \setminus C = \{4, 8, 16, 20\}$
- $A \setminus (B \cap C)$

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Sei $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ und $C = \{6, 12, 18\}$.
Bestimme

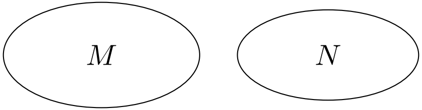
- $A \cap B \;= \emptyset$
- $A \cap C \;= \{12\}$
- $B \cap C = \{6, 18\}$
- $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \cup B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
- $A \setminus B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
- $A \setminus C = \{4, 8, 16, 20\}$
- $A \setminus (B \cap C) = \{4, 8, 12, 16, 20\} \setminus \{6, 18\} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Disjunkte Mengen

Hochschule RheinMain

Definition

Mengen M und N sind disjunkt, wenn sie kein gemeinsames Element haben, d.h. $M \cap N = \emptyset$.



Beispiele:

- $\{1,2,3\}$ und $\{4,5,6\}$ sind disjunkt
- Die Menge aller roten Socken und die Menge aller grünen Hemden sind disjunkt
- $\{x \in U \mid P(x)\}$ und $\{x \in U \mid \neg P(x)\}$ sind für jede Menge U und Aussageform $P(x)$ disjunkt

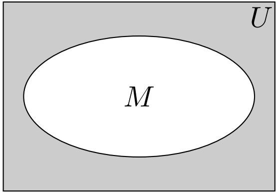
Komplement

Hochschule RheinMain

Definition

Sei U ein Universum und $M \subseteq U$ eine Teilmenge.

Das Komplement $\overline{M}$ von M ist definiert als: $\overline{M} := U \setminus M$.



$\overline{M}$

Manchmal: $M^{\mathcal{C}}$ statt $\overline{M}$.

Beispiele:

- Für U = alle Menschen und E = Volljährige

  $\overline{E}$ = Kinder und Jugendliche

- Für $U = \mathbb{N}$ und G = alle geraden natürlichen Zahlen

  $\overline{G}$ = alle ungerade natürlichen Zahlen

MENGEN UND LOGIK

- Korrespondenz Logik un d Mengen
- Satz von de Morgan
- Rechengesetze

Mengen und Logik

Mengenoperationen werden letztlich auf Logikoperationen zurückgeführt, denn:

Für ein Universum U und Teilmengen M, N davon gilt:

- Schnitt: $M \cap N := \{x \in U \mid x \in M \wedge x \in N\}$
- Vereinigung: $M \cup N := \{x \in U \mid x \in M \vee x \in N\}$
- Differenz: $M \setminus N := \{x \in U \mid x \in M \wedge \neg(x \in N)\}$
- Komplement: $\overline{M} := \{x \in U \mid \neg(x \in M)\}$

Da $\cap, \cup, \overline{\cdot}$ auf die logischen Verknüpfungen $\wedge, \vee, \neg$ zurückgeführt werden können, übertragen sich die Gesetze der Logik ebenfalls auf die Mengenoperationen!

Satz von De Morgan

Hochschule RheinMain

Satz von De Morgan

Seien M und N Teilmengen einer Menge U. Dann gilt:

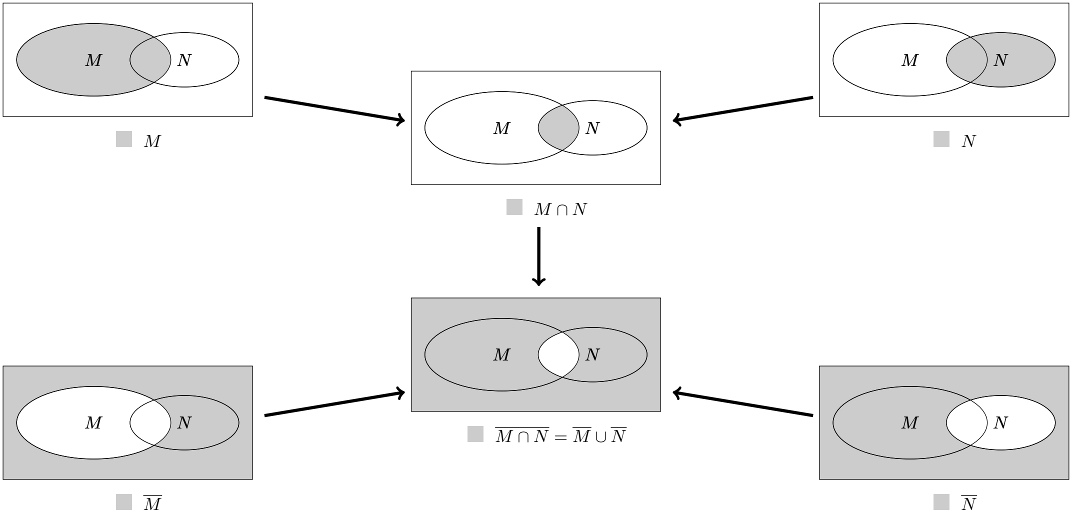
1. $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$
2. $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$

Beweis. Wir zeigen den ersten Teil:

$$
\begin{array}{ll}
\overline{M \cap N} & \\
= \{x \in U \mid \neg(x \in (M \cap N))\} & \text{(Einsetzen } \overline{\cdot}\text{)} \\
= \{x \in U \mid \neg(x \in \{x \in U \mid x \in M \wedge x \in N\})\} & \text{(Einsetzen } \cap\text{)} \\
= \{x \in U \mid \neg(x \in M \wedge x \in N)\} & \text{(Vereinfachung)} \\
= \{x \in U \mid \neg(x \in M) \vee \neg(x \in N)\} & \text{(logischer De Morgan)} \\
= \{x \in U \mid x \in \{x \in U \mid \neg(x \in M)\} \vee x \in \{x \in U \mid \neg(x \in N)\}\} & \text{(Vereinfachung)} \\
= \{x \in U \mid \neg(x \in M)\} \cup \{x \in U \mid \neg(x \in N)\} & \text{(Einsetzen } \cup\text{)} \\
= \overline{M} \cup \overline{N} & \text{(Einsetzen } \overline{\cdot}\text{)}
\end{array}
$$

□

1. De Morgansches Gesetz: Venn-Diagramme



Rechengesetze für Mengen

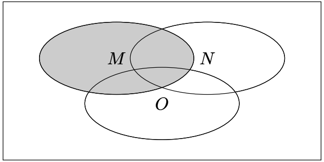
Hochschule RheinMain

Rechengesetze für Mengen

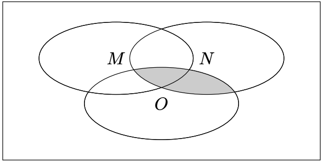
Für alle Teilmengen M, N, O der Grundmenge U gelten die folgenden Gesetze:

1. Kommutativgesetze: $M \cap N = N \cap M$ und $M \cup N = N \cup M$
2. Assoziativgesetze: $((M \cap N) \cap O) = (M \cap (N \cap O))$ und
   $((M \cup N) \cup O) = (M \cup (N \cup O))$
3. Distributivgesetze: $M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$ und
   $M \cap (N \cup O) = (M \cap N) \cup (M \cap O)$
4. Existenz neutraler Elemente: $M \cap U = M$ und $M \cup \emptyset = M$
5. Existenz des Komplements: $M \cap \overline{M} = \emptyset$ und $M \cup \overline{M} = U$

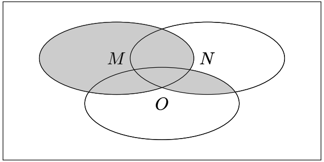
1. Distributivgesetz: Venn-Diagramme



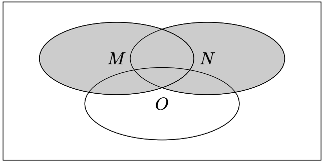
M



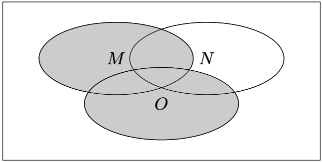
$N \cap O$



$M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O))$



$M \cup N$



$M \cup O$

Weitere Gesetze

Satz

Seien M, N Teilmengen von U. Dann gilt:

1. Absorptionsgesetze: $M \cap (M \cup N) = M$ und $M \cup (M \cap N) = M$
2. Idempotenzgesetze: $M \cup M = M$ und $M \cap M = M$
3. Involutionsgesetz (doppeltes Komplement): $\overline{\overline{M}} = M$
4. Extremalgesetze: $M \cup U = U$ und $M \cap \emptyset = \emptyset$

KARTESISCHES PRODUKT

- Paare und Tupel
- Binäres kartesisches Produkt
- Allgemeines kartesisches Produkt

Paare und Tupel

Hochschule RheinMain

Definition

Seien $M_1, \ldots, M_n$ Mengen und $x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n$. Dann nennt man $(x_1, \ldots, x_n)$ ein n-Tupel (oder kurz, ein Tupel).
Für $n = 2$ spricht man auch von einem (geordneten) Paar.
3-Tupel werden auch als Tripel bezeichnet.

- Die Reihenfolge der Elemente ist relevant: $(1, \text{Grün}, 3) \neq (1, 3, \text{Grün})$.
- Mehrfaches Auftreten gleicher Elemente ist erlaubt und verschieden: $(1, 2, 3) \neq (1, 1, 2, 2, 3)$!

Kartesisches Produkt

Hochschule RheinMain

Definition

Für Mengen M und N ist das kartesische Produkt $M \times N$ (auch Kreuzprodukt):

$$M \times N = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$$

Wenn M oder N leere Menge, ist das Kreuzprodukt leer (d.h. $M \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times M$).

Beachte: Das erweitert erneut die Schreibweise für Mengen mit Eigenschaft

Beispiele:

- Für $M = \{1\}$ und $N = \{4\}$ ist $M \times N = \{(1, 4)\}$ und $N \times M = \{(4, 1)\}$.
- Für $M = \{1, 2\}$ und $N = \{4, 5, 6\}$ ist

$$\begin{aligned} M \times N &= \{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6)\} \text{ und} \\ N \times M &= \{(4,1),(4,2),(5,1),(5,2),(6,1),(6,2)\} \end{aligned}$$

Weitere Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ beschreibt die Felder eines Schachbretts

Weitere Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ beschreibt die Felder eines Schachbretts
- $\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} \times \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$ beschreibt die Spielkarten eines Skatblatts

Weitere Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ beschreibt die Felder eines Schachbretts
- $\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} \times \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$ beschreibt die Spielkarten eines Skatblatts
- Für $M = \{1, 2\}$, $N = \{A, B, C\}$, $O = \{\text{Rot}, \text{Grün}\}$ ist

$$\begin{aligned}(M \times N) \times O = \{&((1, A), \text{Rot}), ((1, B), \text{Rot}), ((1, C), \text{Rot}),\\ &((2, A), \text{Rot}), ((2, B), \text{Rot}), ((2, C), \text{Rot}),\\ &((1, A), \text{Grün}), ((1, B), \text{Grün}), ((1, C), \text{Grün}),\\ &((2, A), \text{Grün}), ((2, B), \text{Grün}), ((2, C), \text{Grün})\} \text{ und}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M \times (N \times O) = \{&(1, (A, \text{Rot})), (1, (A, \text{Grün})), (1, (B, \text{Rot})),\\ &(1, (B, \text{Grün})), (1, (C, \text{Rot})), (1, (C, \text{Grün})),\\ &(2, (A, \text{Rot})), (2, (A, \text{Grün})), (2, (B, \text{Rot})),\\ &(2, (B, \text{Grün})), (2, (C, \text{Rot})), (2, (C, \text{Grün}))\}\end{aligned}$$

Weitere Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ beschreibt die Felder eines Schachbretts
- $\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} \times \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$ beschreibt die Spielkarten eines Skatblatts
- Für $M = \{1, 2\}$, $N = \{A, B, C\}$, $O = \{\text{Rot}, \text{Grün}\}$ ist

$$\begin{aligned}(M \times N) \times O = \{&((1, A), \text{Rot}), ((1, B), \text{Rot}), ((1, C), \text{Rot}),\\ &((2, A), \text{Rot}), ((2, B), \text{Rot}), ((2, C), \text{Rot}),\\ &((1, A), \text{Grün}), ((1, B), \text{Grün}), ((1, C), \text{Grün}),\\ &((2, A), \text{Grün}), ((2, B), \text{Grün}), ((2, C), \text{Grün})\} \text{ und}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M \times (N \times O) = \{&(1, (A, \text{Rot})), (1, (A, \text{Grün})), (1, (B, \text{Rot})),\\ &(1, (B, \text{Grün})), (1, (C, \text{Rot})), (1, (C, \text{Grün})),\\ &(2, (A, \text{Rot})), (2, (A, \text{Grün})), (2, (B, \text{Rot})),\\ &(2, (B, \text{Grün})), (2, (C, \text{Rot})), (2, (C, \text{Grün}))\}\end{aligned}$$

- Das Kreuzprodukt $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ist eine Repräsentation der rationalen Zahlen.

Aufgabe

Berechne $M \times N$ und $N \times M$ für $M = \{1, 2, 3, 5\}$ und $N = \{8, 13\}$!

$M \times N =$

$N \times M =$

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Berechne $M \times N$ und $N \times M$ für $M = \{1, 2, 3, 5\}$ und $N = \{8, 13\}$!

$$M \times N = \{(1, 8), (1, 13), (2, 8), (2, 13), (3, 8), (3, 13), (5, 8), (5, 13)\}$$

$$N \times M =$$

Aufgabe

Berechne $M \times N$ und $N \times M$ für $M = \{1, 2, 3, 5\}$ und $N = \{8, 13\}$!

$$M \times N = \{(1, 8), (1, 13), (2, 8), (2, 13), (3, 8), (3, 13), (5, 8), (5, 13)\}$$

$$N \times M = \{(8, 1), (8, 2), (8, 3), (8, 5), (13, 1), (13, 2), (13, 3), (13, 5)\}$$

Eigenschaften des kartesischen Produkts

Hochschule RheinMain

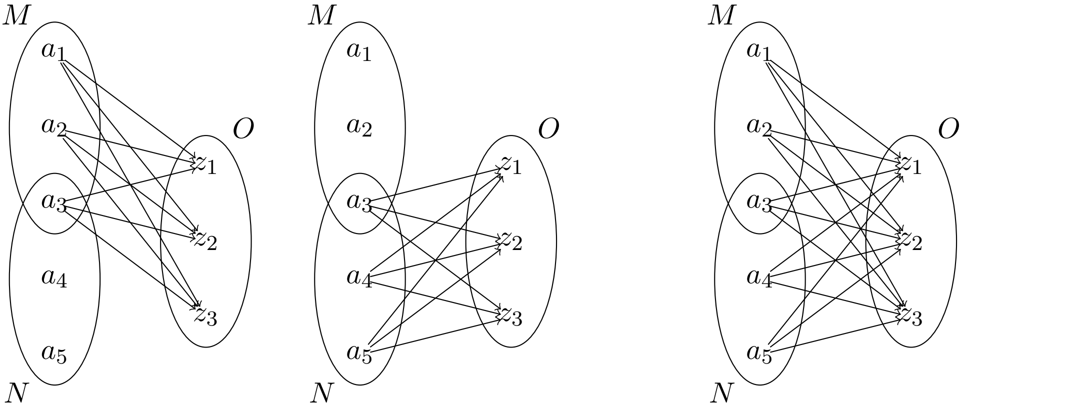
Das kartesische Produkt ist **nicht** kommutativ und **nicht** assoziativ.

Satz

- Distributivgesetze für $\cup$ und $\times$:
  $(M \cup N) \times O = (M \times O) \cup (N \times O)$ und $M \times (N \cup O) = (M \times N) \cup (M \times O)$
- Distributivgesetze für $\cap$ und $\times$:
  $(M \cap N) \times O = (M \times O) \cap (N \times O)$ und $M \times (N \cap O) = (M \times N) \cap (M \times O)$
- Distributivgesetze für $\setminus$ und $\times$:
  $(M \setminus N) \times O = (M \times O) \setminus (N \times O)$ und $M \times (N \setminus O) = (M \times N) \setminus (M \times O)$

Veranschaulichung 1. Distributivgesetz

Hochschule RheinMain



$M \times O$ $\quad$ $N \times O$ $\quad$ $(M \cup N) \times O = (M \times O) \cup (N \times O)$

Allgemeines kartesisches Produkt

Hochschule RheinMain

Definition

Für Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist das kartesische Produkt $M_1 \times \cdots \times M_n$ definiert als

$$M_1 \times \cdots \times M_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n\}$$

Ist eine der Mengen M_i leer, so gilt $M_1 \times \cdots \times M_n = \emptyset$.

Notation für das n-fache kartesische Produkt von M mit sich selbst: M^n

Z.B. schreiben wir $\mathbb{R}^3$ für $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Beispiele

Hochschule RheinMain

- Für $M = \{0,1\}$ ist

$$M^3 = M \times M \times M = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

- Für $M = \{a,b\}, N = \{C,D\}, O = \{1,2\}$ ist

$$\begin{aligned} M \times N \times O = \{&(a,C,1),(a,C,2),(a,D,1),(a,D,2),\\ &(b,C,1),(b,C,2),(b,D,1),(b,D,2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O \times M \times N = \{&(1,a,C),(1,a,D),(1,b,C),(1,b,D),\\ &(2,a,C),(2,a,D),(2,b,C),(2,b,D)\} \end{aligned}$$

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beschreibt die Menge aller dreidimensionalen Punkte im Raum
- $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ beschreibt **?**

Beispiele

Hochschule RheinMain

- Für $M = \{0,1\}$ ist

  $$M^3 = M \times M \times M = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

- Für $M = \{a,b\}, N = \{C,D\}, O = \{1,2\}$ ist

  $$\begin{aligned} M \times N \times O = \{&(a,C,1),(a,C,2),(a,D,1),(a,D,2),\\ &(b,C,1),(b,C,2),(b,D,1),(b,D,2)\}\end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} O \times M \times N = \{&(1,a,C),(1,a,D),(1,b,C),(1,b,D),\\ &(2,a,C),(2,a,D),(2,b,C),(2,b,D)\}\end{aligned}$$

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beschreibt die Menge aller dreidimensionalen Punkte im Raum
- $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ beschreibt alle dreidimensionalen Punkte eines Würfels mit Seitenlänge 1, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt

MÄCHTIGKEITEN UND ZÄHLFORMELN

- Mächtigkeit
- Summenformel
- Siebformel
- Produktformel
- Potenzmenge
- Binomialkoeffizienten

Mächtigkeit

Hochschule RheinMain

Definition

Für eine Menge M, bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente von M.

$|M|$ heißt die Mächtigkeit (oder Kardinalität) von M.

Wenn $|M| \in \mathbb{N}_0$, dann ist M endlich, ansonsten ist M unendlich (Notation $|M| = \infty$)

Beispiele:

- $|\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}| = 6$
- $|\emptyset| = 0$
- $|\{\emptyset, 1, \{2, 3, 4, 5\}\}| = 3$ (denn die Menge hat die 3 Elemente $\emptyset$, 1 und $\{2, 3, 4, 5\}$).
- $|\mathbb{N}| = \infty, |\mathbb{R}| = \infty$
- $|\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}| = 0, |\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}| = \infty$

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Was ist die Mächtigkeit von

- $\{A, C, F, G, H\}$?
- $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl} \wedge 1 \leq x \leq 20\}$?

Gebe Mengen M_1 und M_2 an, sodass gilt: $|M_1| = 5$, $|M_2| = 6$, $|M_1 \cup M_2| = 7$.

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Was ist die Mächtigkeit von

- $\{A, C, F, G, H\}$?

  $|\{A, C, F, G, H\}| = 5$

- $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl} \wedge 1 \leq x \leq 20\}$?

Gebe Mengen M_1 und M_2 an, sodass gilt: $|M_1| = 5$, $|M_2| = 6$, $|M_1 \cup M_2| = 7$.

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Was ist die Mächtigkeit von

- $\{A, C, F, G, H\}$?

  $|\{A, C, F, G, H\}| = 5$

- $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl} \land 1 \leq x \leq 20\}$?

  $|\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}| = 8$

Gebe Mengen M_1 und M_2 an, sodass gilt: $|M_1| = 5$, $|M_2| = 6$, $|M_1 \cup M_2| = 7$.

Aufgabe

Was ist die Mächtigkeit von

- $\{A, C, F, G, H\}$?

  $|\{A, C, F, G, H\}| = 5$

- $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl} \wedge 1 \leq x \leq 20\}$?

  $|\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}| = 8$

Gebe Mengen M_1 und M_2 an, sodass gilt: $|M_1| = 5$, $|M_2| = 6$, $|M_1 \cup M_2| = 7$.

Z.B. $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $M_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Einfache Rechnenregeln zur Mächtigkeit

Hochschule RheinMain

Satz

Seien M, N endliche Mengen mit $M \subseteq N$. Dann gilt $|N \setminus M| = |N| - |M|$.

Satz (Mächtigkeit des Komplements)

Sei U ein endliches Universum und M eine Teilmenge von U. Dann gilt $|\overline{M}| = |U \setminus M| = |U| - |M|$.

Beispiel:

$$\begin{aligned}|\text{Volljährige}| &= |\overline{\text{Kinder und Jugendliche}}| \\ &= |\text{Menschen} \setminus \text{Kinder und Jugendliche}| \\ &= |\text{Menschen}| - |\text{Kinder und Jugendliche}|\end{aligned}$$

Summenformel

Hochschule RheinMain

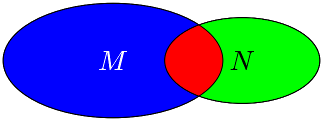
Satz (Summenformel)

Seien M und N endliche Mengen. Dann gilt:

$$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$$

Beweis:

- $M \cup N$ besteht aus drei disjunkten Mengen:
  $M \setminus N$ und $N \setminus M$ und $M \cap N$
- Daher gilt
  $$\begin{aligned} &|M \cup N| = |M \setminus N| + |N \setminus M| + |M \cap N| \\ &= |M \setminus (M \cap N)| + |N \setminus (M \cap N)| + |M \cap N| \\ &= |M| - |M \cap N| + |N| - |M \cap N| + |M \cap N| \\ &= |M| + |N| - |M \cap N|. \qquad \square \end{aligned}$$



Beispiel:

$M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{2, 3, 4\}$

$$\begin{aligned} |M \cup N| &= |M| + |N| - |M \cap N| \\ &= 3 + 3 - 2 = 4 \end{aligned}$$

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Für die Essensbestellung werden die Teilnehmenden eines Seminars nach ihren Essensvorlieben (deutsch oder italienisch) befragt.

- 20 Personen melden sich für italienisch,
- 10 Personen melden sich für deutsch,
- 5 Personen haben sich sowohl für italienisch als auch für deutsch gemeldet.

Wie viele Personen wurden befragt (alle haben geantwortet)?

Aufgabe

Für die Essensbestellung werden die Teilnehmenden eines Seminars nach ihren Essensvorlieben (deutsch oder italienisch) befragt.

- 20 Personen melden sich für italienisch,
- 10 Personen melden sich für deutsch,
- 5 Personen haben sich sowohl für italienisch als auch für deutsch gemeldet.

Wie viele Personen wurden befragt (alle haben geantwortet)?

→ Aus der Aufgabenstellung $|I| = 20, |D| = 10, |I \cap D| = 5$

Aufgabe

Für die Essensbestellung werden die Teilnehmenden eines Seminars nach ihren Essensvorlieben (deutsch oder italienisch) befragt.

- 20 Personen melden sich für italienisch,
- 10 Personen melden sich für deutsch,
- 5 Personen haben sich sowohl für italienisch als auch für deutsch gemeldet.

Wie viele Personen wurden befragt (alle haben geantwortet)?

→ Aus der Aufgabenstellung $|I| = 20, |D| = 10, |I \cap D| = 5$

→ Mit der Summenformel $|I \cup D| = |I| + |D| - |I \cap D| = 20 + 10 - 5 = 25$

Summenformel bei 3 Mengen

Hochschule RheinMain

Die Summenformel für drei endliche Mengen M, N und O lautet:

$$|M \cup N \cup O| = |M| + |N| + |O| - |M \cap N| - |M \cap O| - |N \cap O| + |M \cap N \cap O|$$

Elemente, die in genau	Beitrag zu $\|M\| + \|N\| + \|O\|$	Beitrag zu $-\|M \cap N\| - \|M \cap O\| - \|N \cap O\|$	Beitrag zu $\|M \cap N \cap O\|$
einer Menge sind	1	0	0
zwei Mengen sind	2	-1	0
drei Mengen sind	3	-3	1

Jedes Element wird daher in der Formel genau einmal gezählt.

Allgemeine Summenformel: Siebformel

Hochschule RheinMain

Satz (Siebformel)

Seien $M_1, \dots, M_n$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$|M_1 \cup \dots \cup M_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \cdots$$

wobei α_i die Summe aller Mächtigkeiten aller Schnitte von i Mengen ist, d.h. α_i berechnet sich durch die folgenden Schritte:

- Für je i Mengen der Mengen $M_1, \dots, M_n$ bilde deren Schnitt.
- Bestimme die Mächtigkeiten der Schnittmengen.
- Summiere die Mächtigkeiten der Schnittmengen.

Aufgabe

Wie lautet die Siebformel für vier Mengen?

Aufgabe

Wie lautet die Siebformel für vier Mengen?

$$
\begin{aligned}
& |M_1 \cup \cdots \cup M_4| \\
= \quad & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4
\end{aligned}
$$

Aufgabe

Wie lautet die Siebformel für vier Mengen?

$$
\begin{aligned}
& |M_1 \cup \dots \cup M_4| \\
= \;& \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \\
= \;& |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4| \\
& -(|M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + |M_1 \cap M_4| + |M_2 \cap M_3| + |M_2 \cap M_4| + |M_3 \cap M_4|) \\
& +(|M_1 \cap M_2 \cap M_3| + |M_2 \cap M_3 \cap M_4| + |M_1 \cap M_3 \cap M_4| + |M_1 \cap M_2 \cap M_4|) \\
& -|M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4|
\end{aligned}
$$

Produktformel

Hochschule RheinMain

Satz

Seien M und N endliche Mengen, dann gilt $|M \times N| = |M| \cdot |N|$.
Für k endliche Mengen $M_1, \ldots, M_k$ gilt $|M_1 \times \cdots \times M_k| = |M_1| \cdot \cdots \cdot |M_k|$.

Beweis.

- Sei $|M| = m$ und $|N| = n$.
- Für jedes Paar $(x, y) \in M \times N$ hat man m Möglichkeiten für x.
- Ist x festgelegt, so hat man n weitere Möglichkeiten um y festzulegen.
- Also gibt es $m \cdot n$ Möglichkeiten. $\square$

Beispiele

Hochschule RheinMain

- Für vierstellige PINs am Geldautomat gibt es

$$|\{0,\ldots,9\}^4| = 10^4 = 10000$$

  Möglichkeiten.

- Ein Schachbrett hat

$$|\{A,\ldots,H\} \times \{1,\ldots,8\}| = |\{A,\ldots,H\}| \cdot |\{1,\ldots,8\}| = 8 \cdot 8 = 64$$

  Felder.

Aufgabe

Wie viele Karten hat ein Skatblatt, welches durch

$$\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} \times \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$$

repräsentiert wird?

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Wie viele Karten hat ein Skatblatt, welches durch

$$\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} \times \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$$

repräsentiert wird?

$$|\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}| \cdot |\{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}| = 4 \cdot 8 = 32$$

Anwendung: Produktformel

Binäre Tupel sind Tupel, die nur aus 0en und 1en bestehen.

D.h. ein binäres n-Tupel ist von der Form $(b_1, \ldots, b_n)$ mit $b_i \in \{0, 1\}$.

Beispiel:

- Die Menge aller binären 3-Tupel ist $\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$.
- Das sind 8 Stück. Wie sieht es allgemein aus?

Satz

Die Anzahl der binären n-Tupel ist 2^n.

Beweis. Verwende die Produktformel für das n-fache Kreuzprodukt von $\{0, 1\}$:

$$|\underbrace{\{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{n \text{ Mal}}| = |\{0,1\}^n| = |\{0,1\}|^n = 2^n$$

Potenzmenge

Hochschule RheinMain

Definition

Sei M eine Menge.
Die Menge aller Teilmengen von M nennt man Potenzmenge von M.
Wir schreiben $\mathcal{P}(M)$ für die Potenzmenge.

$$\mathcal{P}(M) := \{M' \mid M' \subseteq M\}$$

Beispiel: $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Mächtigkeit der Potenzmenge

Hochschule RheinMain

Satz

Jede n-elementige Menge hat genau 2^n Teilmengen, d.h.
für endliche Mengen M gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis.

- Sei $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine beliebige Nummerierung der n Elemente von M.
- Für jede Teilmenge N von M erzeuge ein binäres n-Tupel $B_N = (b_{N,1}, \ldots, b_{N,n})$ wobei $b_{N,i} = 0$, wenn $x_i \notin N$ und $b_{N,i} = 1$ wenn $x_i \in N$.
- Für jedes n-Tupel gibt es genau eine Teilmenge
- Anzahl der n-Tupel ist 2^n. $\square$

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Sei $M = \{a, b, c\}$, wobei die Elemente in der Reihenfolge a, b, c nummeriert sind.
Welche binären 3-Tupel stellen die Teilmengen $\emptyset$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$ und $\{a, b, c\}$ entsprechend dem letzten Beweis jeweils dar?

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Sei $M = \{a, b, c\}$, wobei die Elemente in der Reihenfolge a, b, c nummeriert sind. Welche binären 3-Tupel stellen die Teilmengen $\emptyset$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$ und $\{a, b, c\}$ entsprechend dem letzten Beweis jeweils dar?

$\emptyset$	$(0, 0, 0)$
$\{b, c\}$	$(0, 1, 1)$
$\{a, c\}$	$(1, 0, 1)$
$\{a, b, c\}$	$(1, 1, 1)$

Binomialkoeffizienten

Hochschule RheinMain

Definition

Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge wird mit

$$\binom{n}{k} \quad \text{(gesprochen „}n\text{ über }k\text{“)}$$

bezeichnet. Diese Zahlen heißen Binomialkoeffizienten.

Beispiel:

$\{1,2,3,4\}$ hat $\binom{4}{2} = 6$ zweielementige Teilmengen: $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}$ und $\{3,4\}$

Weitere Beispiele

Hochschule RheinMain

$\binom{n}{0} = 1$ für jedes n, da es genau eine nullelementige Teilmenge gibt – die leere Menge

$\binom{n}{n} = 1$ für jedes n, da es genau eine n-elementige Teilmenge gibt – die gesamte Menge

$\binom{0}{0} = 1$ da die leere Menge sich selbst als Teilmenge hat

$\binom{0}{n} = 0$ für jedes $n > 0$, da die leere Menge nur sich selbst als Teilmenge hat

$\binom{n}{1} = n$ für jedes n, da es für jedes Element eine einelementige Menge gibt, und diese eine Teilmenge ist (gilt auch für $n = 0$!)

Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten

Hochschule RheinMain

Satz

Sei $1 \leq k \leq n$ mit $k, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Beweis.

- Sei M eine n-elementige Menge und $m \in M$.
- Sei $M_k = \{M' \subseteq M \mid |M'| = k\}$ = alle k-elementigen Teilmengen von M, d.h. $\binom{n}{k} = |M_k|$
- Teile die Mengen in M_k in zwei disjunkte Mengen auf:

  $A = \{M' \in M_k \mid m \notin M'\} \quad B = \{M' \in M_k \mid m \in M'\}$
- $|A|$ = Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $M \setminus \{m\} = \binom{n-1}{k}$
- $|B|$ = Anzahl der $k-1$-elementigen Teilmengen von $M \setminus \{m\} = \binom{n-1}{k-1}$ $\square$

Explizite Formel für Binomialkoeffizienten

Hochschule RheinMain

Fakultät von natürlichen Zahlen

$$n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

Wir definieren zusätzlich $0! := 1$.

Satz

Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$. Dann gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Beispiel

Hochschule RheinMain

Bei Lotto „6 aus 49“ werden 6 Zahlen aus 49 gegebenen Zahlen gezogen.

Möglichkeiten: $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} == \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13.983.816$

Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige: $1/13.983.816 = 0,000000071 \cdots$