Hochschule RheinMain

Diskrete Strukturen

für die Studiengänge
- Angewandte Informatik
- Technische Informatik

03 Mengen

Prof. Dr. David Sabel
Wintersemester 2024/25

Stand der Folien: 18. November 2024

Inhalt

Hochschule RheinMain

Hochschule RheinMain

MENGEN BESCHREIBEN

- Was sind Mengen?
- Grundlegende Notationen
- Mengen beschreiben durch Aufzählen
- Mengen beschreiben durch Eigenschaften

Was sind Mengen?

Hochschule RheinMain

Georg Cantors Definition

„Unter einer ‘Menge’ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohl-unterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‘Elemente’ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Baut man darauf auf, so kann dies zu Widersprüchen führen!

Russelsche Antinomie
- Menge $R := \{x \mid x \notin x\}$
- R ist die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.
- Aber weder $R \in R$ noch $R \notin R$ kann gelten (Widerspruch!).

⟶ Definition von Mengen ist schwierig (axiomatische Mengenlehre)

Wir machen keine Mengendefinition, sondern beschreiben Mengen durch Aufzählen / durch Eigenschaften

Grundlegende Begriffe und Notationen

- Die Objekte einer Menge nennt man Elemente.
- Eine Menge können wir aufschreiben, indem wir die Elemente aufzählen.

Definition (Notation für Mengen)

- Elemente einer Menge werden mit Kommas getrennt und durch geschweifte Klammern $\{$ und $\}$ umschlossen.
- Wenn Objekt m in Menge M enthalten ist, schreiben wir $m \in M$, sonst $m \notin M$.
- Die **leere Menge** $\emptyset$ oder $\{\}$ ist die Menge, welche keine Elemente enthält.

Beispiele:

- $\{1, 2, 3\}$ die Menge der Zahlen 1,2 und 3
- $\{\text{Schwarz}, \text{Weiß}\}$ ist die Menge der Farben Schwarz und Weiß
- $4 \in \{2, 4, 6, 9\}$ und $5 \notin \{2, 4, 6, 9\}$
- $4 \notin \emptyset$ und Weiß $\notin \{\}$

Gleichheit und Teilmengen

Definition

- Menge M ist eine **Teilmenge** von N ($M \subseteq N$) wenn $\forall x \in M : x \in N$ gilt.
- Menge M ist eine **echte Teilmenge** von N, ($M \subset N$) wenn $M \subseteq N \land \exists y \in N : y \notin M$.
- Mengen M und N sind **gleich** ($M = N$), wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gilt.

→ Die Reihenfolge der Elemente spielt in einer Menge keine Rolle.

→ Ebenso werden Elemente in einer Menge nicht mehrfach betrachtet.

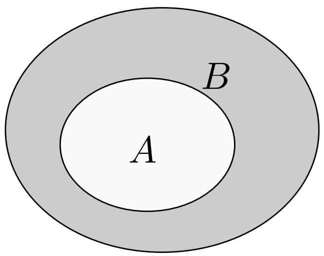
Beispiele:

- $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$

Venn-Diagramme

Graphische Darstellung von Mengen und deren Beziehungen (benannt nach John Venn)

Gilt $A \subset B$ so zeichnet man:



Zahlenmengen

Definition (Zahlenmengen)

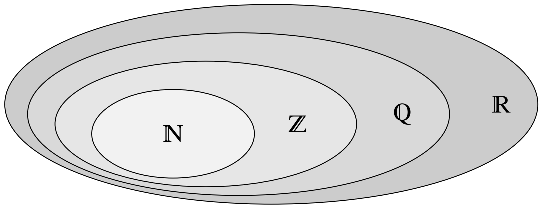
Wir definieren Symbole für bekannte Zahlenmengen:

- Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Menge der natürlichen Zahlen und 0: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$
- Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} :=$ alle gekürzten Brüche, bzw. endliche oder periodische Dezimalzahlen.
- Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R} :=$ alle Dezimalzahlen.

Zahlenmengen (2)

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, denn

- $? -1 \in \mathbb{Z}$ aber $? -1 \notin \mathbb{N}$
- $?\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ aber $?\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$
- $?\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ aber $?\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



Mengenbeschreibung durch Eigenschaft

Definition (Mengenbeschreibung durch Eigenschaft)

Sei M eine bereits definierte Menge und $P(x)$ eine Aussageform (mit x aus M). Dann beschreibt

$$\{x \in M \mid P(x)\}$$

die Teilmenge von M, die alle Elemente x enthält, die $P(x)$ erfüllen.

Dabei steht „|“ für „mit der Eigenschaft“

Beispiele:

- Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen: $\{x \in \mathbb{N} \mid \text{ungerade}(x)\}$ (wenn ungerade(x) entsprechende Aussageform ist)
- Natürliche Zahlen als Teilmenge der ganzen Zahlen: $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$
- Primzahlen: $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 1 \text{ und } x \text{ ist nur durch 1 und sich selbst teilbar}\}$

Weitere Schreibweisen

Erweiterung der Mengenbeschreibung durch Eigenschaft:

$$\{h(x) \mid x \in X, P(x)\}$$

wobei

- h ist eine Funktion, die auf x angewendet wird
- $P(x)$ ist eine Aussageform (mit x aus X)
- zu beachten ist, dass $x \in X$ hinter | steht.

Beispiele:

- Menge aller Quadratzahlen größer als 999:
  $$\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x^2 > 999\}$$
- Die Menge aller Kubikzahlen (mit leerer Aussageform = immer wahr)
  $$\{x^3 \mid x \in \mathbb{N}\}$$

Aufgabe

Stelle die folgenden Mengen durch Aufzählen der Elemente dar:

- $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ teilt die Zahl } 42\} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$
- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist ungerade und } -4 \leq x < 5\} = \{-3, -1, 1, 3\}$

Schreibweise für Intervalle

Definition (Intervalle)

Für $a < b \in \mathbb{R}$ definieren wir Schreibweisen für Intervalle:

Geschlossenes Intervall:	$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
Offenes Intervall:	$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Linksseitig halboffenes Intervall:	$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
Rechtsseitig halboffenes Intervall:	$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Manchmal eckige Klammern „falsch herum“ statt runder Klammern:

$]a, b[$, $]a, b]$ und $[a, b[$

Weitere Schreibweisen und Vereinfachungen

- $x \in \{x \in M \mid P(x)\}$ kann man auch direkt $x \in M \wedge P(x)$ schreiben. Wenn M klar ist, kann man auch nur $P(x)$ schreiben.
- statt $\{x \in M \mid P(x)\}$ schreiben wir auch $\{x \mid x \in M \wedge P(x)\}$ oder – wenn M klar ist – $\{x \mid P(x)\}$

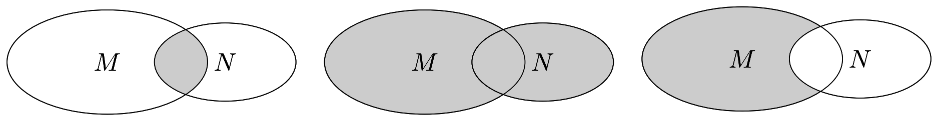
OPERATIONEN AUF MENGEN

- Schnitt
- Vereinigung
- Differenz
- Komplement

Operationen auf Mengen

Definition (Schnitt, Vereinigung, Differenz)

1. Schnitt: $M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$
2. Vereinigung: $M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$
3. Differenzmenge (M ohne N): $M \setminus N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$



$M \cap N$ $\quad$ $M \cup N$ $\quad$ $M \setminus N$

Beispiele

- $\{1,2,3\} \cap \{2,4,6\} = \{2\}$
- $\{1,2,3\} \cup \{2,4,6\} = \{1,2,3,4,6\}$
- $\{1,2,3\} \setminus \{2,4,6\} = \{1,3\}$

Mit M = Alle Informatikstudierenden, N= Alle Erstsemester

- $M \cap N$ = Alle Informatikstudierenden im ersten Semester
- $M \cup N$ = Alle Studierende, die im ersten Semester sind oder Informatik studieren (oder beides)
- $M \setminus N$ = Alle Informatik-Studierende, die nicht im ersten Semester studieren

Mit C = Menge aller durch 3 teilbaren Zahlen und D = Menge aller geraden Zahlen

- $C \cap D$ = Menge aller durch 6 teilbaren Zahlen.
- $C \cup D$ = Menge aller durch 2 oder 3 teilbaren Zahlen
- $C \setminus D$ = Menge aller Zahlen, die durch 3 aber nicht durch 6 teilbar sind.

Aufgabe

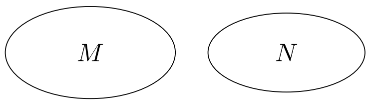
Sei $A = \{4,8,12,16,20\}$, $B = \{2,6,10,14,18\}$ und $C = \{6,12,18\}$.
Bestimme

- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cap C = \{12\}$
- $B \cap C = \{6,18\}$
- $A \cup B = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$
- $A \cup B \cup C = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$
- $A \setminus B = \{4,8,12,16,20\}$
- $A \setminus C = \{4,8,16,20\}$
- $A \setminus (B \cap C) = \{4,8,12,16,20\} \setminus \{6,18\} = \{4,8,12,16,20\}$

Disjunkte Mengen

Definition

Mengen M und N sind disjunkt, wenn sie kein gemeinsames Element haben, d.h. $M \cap N = \emptyset$.



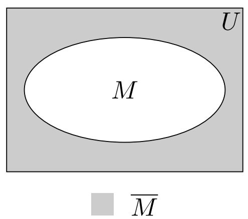
Beispiele:

- $\{1,2,3\}$ und $\{4,5,6\}$ sind disjunkt
- Die Menge aller roten Socken und die Menge aller grünen Hemden sind disjunkt
- $\{x \in U \mid P(x)\}$ und $\{x \in U \mid \neg P(x)\}$ sind für jede Menge U und Aussageform $P(x)$ disjunkt

Komplement

Definition

Sei U ein Universum und $M \subseteq U$ eine Teilmenge.
Das Komplement $\overline{M}$ von M ist definiert als: $\overline{M} := U \setminus M$.



Beispiele:

- Für U = alle Menschen und E = Volljährige

  $\overline{E}$ = Kinder und Jugendliche

- Für $U = \mathbb{N}$ und G = alle geraden natürlichen Zahlen

  $\overline{G}$ = alle ungerade natürlichen Zahlen

Manchmal: $M^{\mathcal{C}}$ statt $\overline{M}$.

MENGEN UND LOGIK

- Korrespondenz Logik un d Mengen
- Satz von de Morgan
- Rechengesetze

Mengen und Logik

Mengenoperationen werden letztlich auf Logikoperationen zurückgeführt, denn:

Für ein Universum U und Teilmengen M, N davon gilt:

- Schnitt: $M \cap N := \{x \in U \mid x \in M \land x \in N\}$
- Vereinigung: $M \cup N := \{x \in U \mid x \in M \lor x \in N\}$
- Differenz: $M \setminus N := \{x \in U \mid x \in M \land \neg(x \in N)\}$
- Komplement: $\overline{M} := \{x \in U \mid \neg(x \in M)\}$

Da $\cap, \cup, \overline{\cdot}$ auf die logischen Verknüpfungen $\land, \lor, \neg$ zurückgeführt werden können, übertragen sich die Gesetze der Logik ebenfalls auf die Mengenoperationen!

Satz von De Morgan

Satz von De Morgan

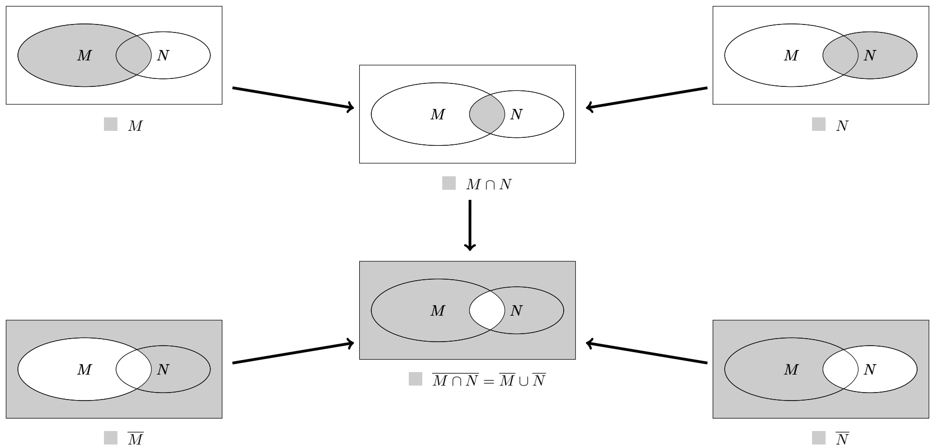
Seien M und N Teilmengen einer Menge U. Dann gilt:

1. $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$
2. $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$

Beweis. Wir zeigen den ersten Teil:

$$
\begin{aligned}
& \overline{M \cap N} \\
= {} & \{x \in U \mid \neg(x \in (M \cap N))\} && \text{(Einsetzen } \overline{\cdot}\text{)} \\
= {} & \{x \in U \mid \neg(x \in \{x \in U \mid x \in M \land x \in N\})\} && \text{(Einsetzen } \cap\text{)} \\
= {} & \{x \in U \mid \neg(x \in M \land x \in N)\} && \text{(Vereinfachung)} \\
= {} & \{x \in U \mid \neg(x \in M) \lor \neg(x \in N)\} && \text{(logischer De Morgan)} \\
= {} & \{x \in U \mid x \in \{x \in U \mid \neg(x \in M)\} \lor x \in \{x \in U \mid \neg(x \in N)\}\} && \text{(Vereinfachung)} \\
= {} & \{x \in U \mid \neg(x \in M)\} \cup \{x \in U \mid \neg(x \in N)\} && \text{(Einsetzen } \cup\text{)} \\
= {} & \overline{M} \cup \overline{N} && \text{(Einsetzen } \overline{\cdot}\text{)} \quad \square
\end{aligned}
$$

1. De Morgansches Gesetz: Venn-Diagramme



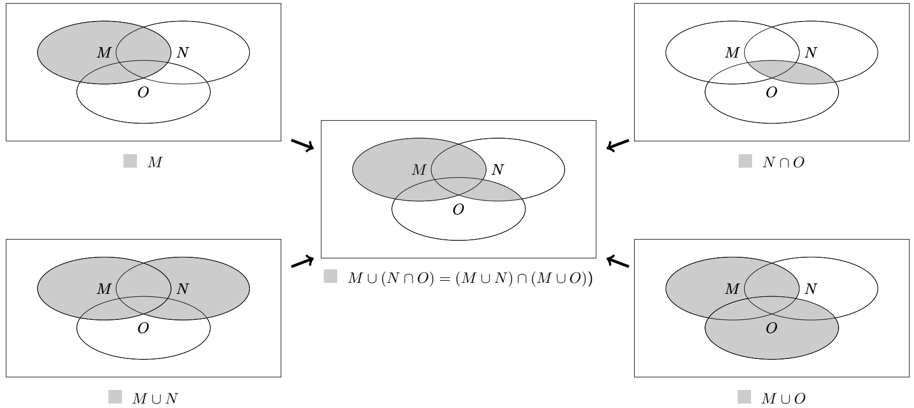
Rechengesetze für Mengen

Rechengesetze für Mengen

Für alle Teilmengen M, N, O der Grundmenge U gelten die folgenden Gesetze:

1. Kommutativgesetze: $M \cap N = N \cap M$ und $M \cup N = N \cup M$
2. Assoziativgesetze: $((M \cap N) \cap O) = (M \cap (N \cap O))$ und $((M \cup N) \cup O) = (M \cup (N \cup O))$
3. Distributivgesetze: $M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$ und $M \cap (N \cup O) = (M \cap N) \cup (M \cap O)$
4. Existenz neutraler Elemente: $M \cap U = M$ und $M \cup \emptyset = M$
5. Existenz des Komplements: $M \cap \overline{M} = \emptyset$ und $M \cup \overline{M} = U$

1. Distributivgesetz: Venn-Diagramme



Weitere Gesetze

Satz

Seien M, N Teilmengen von U. Dann gilt:

1. Absorptionsgesetze: $M \cap (M \cup N) = M$ und $M \cup (M \cap N) = M$
2. Idempotenzgesetze: $M \cup M = M$ und $M \cap M = M$
3. Involutionsgesetz (doppeltes Komplement): $\overline{\overline{M}} = M$
4. Extremalgesetze: $M \cup U = U$ und $M \cap \emptyset = \emptyset$

KARTESISCHES PRODUKT

- Paare und Tupel
- Binäres kartesisches Produkt
- Allgemeines kartesisches Produkt

Paare und Tupel

Hochschule RheinMain

Definition

Seien $M_1, \ldots, M_n$ Mengen und $x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n$. Dann nennt man $(x_1, \ldots, x_n)$ ein n-Tupel (oder kurz, ein Tupel).
Für $n = 2$ spricht man auch von einem (geordneten) Paar.
3-Tupel werden auch als Tripel bezeichnet.

- Die Reihenfolge der Elemente ist relevant: $(1, \text{Grün}, 3) \neq (1, 3, \text{Grün})$.
- Mehrfaches Auftreten gleicher Elemente ist erlaubt und verschieden: $(1, 2, 3) \neq (1, 1, 2, 2, 3)$!

Kartesisches Produkt

Hochschule RheinMain

Definition

Für Mengen M und N ist das kartesische Produkt $M \times N$ (auch Kreuzprodukt):

$$M \times N = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$$

Wenn M oder N leere Menge, ist das Kreuzprodukt leer (d.h. $M \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times M$).

Beachte: Das erweitert erneut die Schreibweise für Mengen mit Eigenschaft

Beispiele:

- Für $M = \{1\}$ und $N = \{4\}$ ist $M \times N = \{(1, 4)\}$ und $N \times M = \{(4, 1)\}$.
- Für $M = \{1, 2\}$ und $N = \{4, 5, 6\}$ ist

$$\begin{aligned} M \times N &= \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6)\} \text{ und} \\ N \times M &= \{(4,1), (4,2), (5,1), (5,2), (6,1), (6,2)\} \end{aligned}$$

Weitere Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ beschreibt die Felder eines Schachbretts
- $\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} \times \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$ beschreibt die Spielkarten eines Skatblatts
- Für $M = \{1, 2\}$, $N = \{A, B, C\}$, $O = \{\text{Rot}, \text{Grün}\}$ ist

$$\begin{aligned} (M \times N) \times O = \{&((1, A), \text{Rot}), ((1, B), \text{Rot}), ((1, C), \text{Rot}), \\ &((2, A), \text{Rot}), ((2, B), \text{Rot}), ((2, C), \text{Rot}), \\ &((1, A), \text{Grün}), ((1, B), \text{Grün}), ((1, C), \text{Grün}), \\ &((2, A), \text{Grün}), ((2, B), \text{Grün}), ((2, C), \text{Grün})\} \text{ und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \times (N \times O) = \{&(1, (A, \text{Rot})), (1, (A, \text{Grün})), (1, (B, \text{Rot})), \\ &(1, (B, \text{Grün})), (1, (C, \text{Rot})), (1, (C, \text{Grün})), \\ &(2, (A, \text{Rot})), (2, (A, \text{Grün})), (2, (B, \text{Rot})), \\ &(2, (B, \text{Grün})), (2, (C, \text{Rot})), (2, (C, \text{Grün}))\} \end{aligned}$$

- Das Kreuzprodukt $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ist eine Repräsentation der rationalen Zahlen.

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Berechne $M \times N$ und $N \times M$ für $M = \{1, 2, 3, 5\}$ und $N = \{8, 13\}$!

$$M \times N = \{(1,8), (1,13), (2,8), (2,13), (3,8), (3,13), (5,8), (5,13)\}$$

$$N \times M = \{(8,1), (8,2), (8,3), (8,5), (13,1), (13,2), (13,3), (13,5)\}$$

Eigenschaften des kartesischen Produkts

Hochschule **RheinMain**

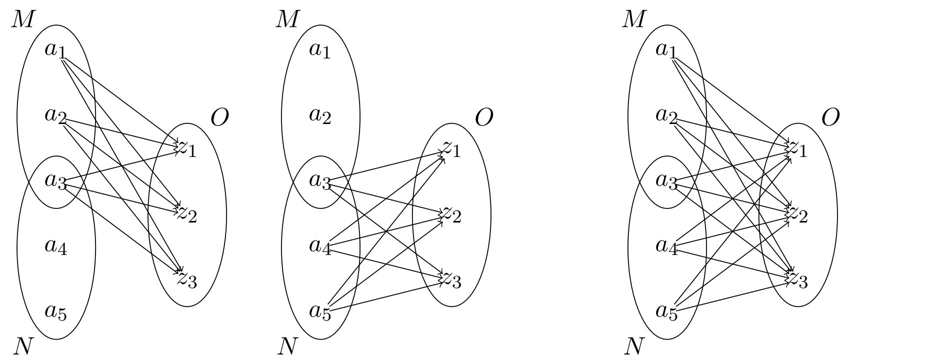
Das kartesische Produkt ist **nicht** kommutativ und **nicht** assoziativ.

Satz

- Distributivgesetze für $\cup$ und $\times$:
  $(M \cup N) \times O = (M \times O) \cup (N \times O)$ und $M \times (N \cup O) = (M \times N) \cup (M \times O)$
- Distributivgesetze für $\cap$ und $\times$:
  $(M \cap N) \times O = (M \times O) \cap (N \times O)$ und $M \times (N \cap O) = (M \times N) \cap (M \times O)$
- Distributivgesetze für $\setminus$ und $\times$:
  $(M \setminus N) \times O = (M \times O) \setminus (N \times O)$ und $M \times (N \setminus O) = (M \times N) \setminus (M \times O)$

Veranschaulichung 1. Distributivgesetz

Hochschule **RheinMain**



$M \times O$ $\quad$ $N \times O$ $\quad$ $(M \cup N) \times O = (M \times O) \cup (N \times O)$

Allgemeines kartesisches Produkt

Hochschule **RheinMain**

Definition

Für Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ist das kartesische Produkt $M_1 \times \cdots \times M_n$ definiert als

$$M_1 \times \cdots \times M_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n\}$$

Ist eine der Mengen M_i leer, so gilt $M_1 \times \cdots \times M_n = \emptyset$.

Notation für das n-fache kartesische Produkt von M mit sich selbst: M^n

Z.B. schreiben wir $\mathbb{R}^3$ für $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Beispiele

Hochschule **RheinMain**

- Für $M = \{0, 1\}$ ist

  $M^3 = M \times M \times M = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$
- Für $M = \{a, b\}, N = \{C, D\}, O = \{1, 2\}$ ist

$$\begin{aligned} M \times N \times O = \{&(a,C,1), (a,C,2), (a,D,1), (a,D,2), \\ &(b,C,1), (b,C,2), (b,D,1), (b,D,2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O \times M \times N = \{&(1,a,C), (1,a,D), (1,b,C), (1,b,D), \\ &(2,a,C), (2,a,D), (2,b,C), (2,b,D)\} \end{aligned}$$

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beschreibt die Menge aller dreidimensionalen Punkte im Raum
- $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ beschreibt **?** alle dreidimensionalen Punkte eines Würfels mit Seitenlänge 1, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt

MÄCHTIGKEITEN UND ZÄHLFORMELN

- Mächtigkeit
- Summenformel
- Siebformel
- Produktformel
- Potenzmenge
- Binomialkoeffizienten

Mächtigkeit

Definition

Für eine Menge M, bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente von M.

$|M|$ heißt die Mächtigkeit (oder Kardinalität) von M.

Wenn $|M| \in \mathbb{N}_0$, dann ist M endlich, ansonsten ist M unendlich (Notation $|M| = \infty$)

Beispiele:

- $|\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}| = 6$
- $|\emptyset| = 0$
- $|\{\emptyset, 1, \{2, 3, 4, 5\}\}| = 3$ (denn die Menge hat die 3 Elemente $\emptyset$, 1 und $\{2, 3, 4, 5\}$).
- $|\mathbb{N}| = \infty, |\mathbb{R}| = \infty$
- $|\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}| = 0, |\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}| = \infty$

Aufgabe

Was ist die Mächtigkeit von

- $\{A, C, F, G, H\}$?

  $|\{A, C, F, G, H\}| = 5$

- $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl} \wedge 1 \leq x \leq 20\}$?

  $|\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}| = 8$

Gebe Mengen M_1 und M_2 an, sodass gilt: $|M_1| = 5$, $|M_2| = 6$, $|M_1 \cup M_2| = 7$.

Z.B. $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $M_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Einfache Rechnenregeln zur Mächtigkeit

Satz

Seien M, N endliche Mengen mit $M \subseteq N$. Dann gilt $|N \setminus M| = |N| - |M|$.

Satz (Mächtigkeit des Komplements)

Sei U ein endliches Universum und M eine Teilmenge von U. Dann gilt $|\overline{M}| = |U \setminus M| = |U| - |M|$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} |\text{Volljährige}| &= |\overline{\text{Kinder und Jugendliche}}| \\ &= |\text{Menschen} \setminus \text{Kinder und Jugendliche}| \\ &= |\text{Menschen}| - |\text{Kinder und Jugendliche}| \end{aligned}$$

Summenformel

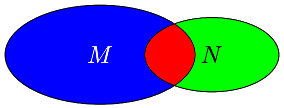
Satz (Summenformel)

Seien M und N endliche Mengen. Dann gilt:

$$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$$

Beweis:

- $M \cup N$ besteht aus drei disjunkten Mengen: $M \setminus N$ und $N \setminus M$ und $M \cap N$
- Daher gilt
  $|M \cup N| = |M \setminus N| + |N \setminus M| + |M \cap N|$
  $= |M \setminus (M \cap N)| + |N \setminus (M \cap N)| + |M \cap N|$
  $= |M| - |M \cap N| + |N| - |M \cap N| + |M \cap N|$
  $= |M| + |N| - |M \cap N|.$ □



Beispiel:
$M = \{1,2,3\}$ und $N = \{2,3,4\}$
$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$
$= 3 + 3 - 2 = 4$

Aufgabe

Für die Essensbestellung werden die Teilnehmenden eines Seminars nach ihren Essensvorlieben (deutsch oder italienisch) befragt.

- 20 Personen melden sich für italienisch,
- 10 Personen melden sich für deutsch,
- 5 Personen haben sich sowohl für italienisch als auch für deutsch gemeldet.

Wie viele Personen wurden befragt (alle haben geantwortet)?

→ Aus der Aufgabenstellung $|I| = 20, |D| = 10, |I \cap D| = 5$

→ Mit der Summenformel $|I \cup D| = |I| + |D| - |I \cap D| = 20 + 10 - 5 = 25$

Summenformel bei 3 Mengen

Die Summenformel für drei endliche Mengen M, N und O lautet:

$$|M \cup N \cup O| = |M| + |N| + |O| - |M \cap N| - |M \cap O| - |N \cap O| + |M \cap N \cap O|$$

Elemente, die in genau	Beitrag zu $\|M\| + \|N\| + \|O\|$	Beitrag zu $-\|M \cap N\| - \|M \cap O\| - \|N \cap O\|$	Beitrag zu $\|M \cap N \cap O\|$
einer Menge sind	1	0	0
zwei Mengen sind	2	-1	0
drei Mengen sind	3	-3	1

Jedes Element wird daher in der Formel genau einmal gezählt.

Allgemeine Summenformel: Siebformel

Satz (Siebformel)

Seien $M_1, \ldots, M_n$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$|M_1 \cup \cdots \cup M_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \cdots$$

wobei α_i die Summe aller Mächtigkeiten aller Schnitte von i Mengen ist, d.h. α_i berechnet sich durch die folgenden Schritte:

- Für je i Mengen der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ bilde deren Schnitt.
- Bestimme die Mächtigkeiten der Schnittmengen.
- Summiere die Mächtigkeiten der Schnittmengen.

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Wie lautet die Siebformel für vier Mengen?

$$
\begin{aligned}
& |M_1 \cup \cdots \cup M_4| \\
= \; & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \\
= \; & |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4| \\
& -(|M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + |M_1 \cap M_4| + |M_2 \cap M_3| + |M_2 \cap M_4| + |M_3 \cap M_4|) \\
& +(|M_1 \cap M_2 \cap M_3| + |M_2 \cap M_3 \cap M_4| + |M_1 \cap M_3 \cap M_4| + |M_1 \cap M_2 \cap M_4|) \\
& -|M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4|
\end{aligned}
$$

Produktformel

Hochschule RheinMain

Satz

Seien M und N endliche Mengen, dann gilt $|M \times N| = |M| \cdot |N|$.
Für k endliche Mengen $M_1, \ldots, M_k$ gilt $|M_1 \times \cdots \times M_k| = |M_1| \cdot \cdots \cdot |M_k|$.

Beweis.

- Sei $|M| = m$ und $|N| = n$.
- Für jedes Paar $(x, y) \in M \times N$ hat man m Möglichkeiten für x.
- Ist x festgelegt, so hat man n weitere Möglichkeiten um y festzulegen.
- Also gibt es $m \cdot n$ Möglichkeiten. □

Beispiele

Hochschule RheinMain

- Für vierstellige PINs am Geldautomat gibt es
$$|\{0, \ldots, 9\}^4| = 10^4 = 10000$$
Möglichkeiten.

- Ein Schachbrett hat
$$|\{A, \ldots, H\} \times \{1, \ldots, 8\}| = |\{A, \ldots, H\}| \cdot |\{1, \ldots, 8\}| = 8 \cdot 8 = 64$$
Felder.

Aufgabe

Hochschule RheinMain

Wie viele Karten hat ein Skatblatt, welches durch

$$\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} \times \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$$

repräsentiert wird?

$$|\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}| \cdot |\{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}| = 4 \cdot 8 = 32$$

Anwendung: Produktformel

Binäre Tupel sind Tupel, die nur aus 0en und 1en bestehen.

D.h. ein binäres n-Tupel ist von der Form $(b_1, \dots, b_n)$ mit $b_i \in \{0, 1\}$.

Beispiel:

- Die Menge aller binären 3-Tupel ist $\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$.
- Das sind 8 Stück. Wie sieht es allgemein aus?

Satz

Die Anzahl der binären n-Tupel ist 2^n.

Beweis. Verwende die Produktformel für das n-fache Kreuzprodukt von $\{0, 1\}$:

$$|\underbrace{\{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{n \text{ Mal}}| = |\{0,1\}^n| = |\{0,1\}|^n = 2^n$$

Potenzmenge

Definition

Sei M eine Menge.
Die Menge aller Teilmengen von M nennt man Potenzmenge von M.
Wir schreiben $\mathcal{P}(M)$ für die Potenzmenge.

$$\mathcal{P}(M) := \{M' \mid M' \subseteq M\}$$

Beispiel: $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Mächtigkeit der Potenzmenge

Satz

Jede n-elementige Menge hat genau 2^n Teilmengen, d.h.
für endliche Mengen M gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis.

- Sei $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine beliebige Nummerierung der n Elemente von M.
- Für jede Teilmenge N von M erzeuge ein binäres n-Tupel $B_N = (b_{N,1}, \dots, b_{N,n})$ wobei $b_{N,i} = 0$, wenn $x_i \notin N$ und $b_{N,i} = 1$ wenn $x_i \in N$.
- Für jedes n-Tupel gibt es genau eine Teilmenge
- Anzahl der n-Tupel ist 2^n. □

Aufgabe

Sei $M = \{a, b, c\}$, wobei die Elemente in der Reihenfolge a, b, c nummeriert sind.
Welche binären 3-Tupel stellen die Teilmengen $\emptyset$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$ und $\{a, b, c\}$ entsprechend dem letzten Beweis jeweils dar?

$\emptyset$	$(0,0,0)$
$\{b,c\}$	$(0,1,1)$
$\{a,c\}$	$(1,0,1)$
$\{a,b,c\}$	$(1,1,1)$

Binomialkoeffizienten

Definition
Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge wird mit

$$\binom{n}{k} \quad (\text{ gesprochen „}n\text{ über }k\text{“})$$

bezeichnet. Diese Zahlen heißen Binomialkoeffizienten.

Beispiel:

$\{1,2,3,4\}$ hat $\binom{4}{2} = 6$ zweielementige Teilmengen: $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}$ und $\{3,4\}$

Weitere Beispiele

$\binom{n}{0} = 1$ für jedes n, da es genau eine nullelementige Teilmenge gibt – die leere Menge

$\binom{n}{n} = 1$ für jedes n, da es genau eine n-elementige Teilmenge gibt – die gesamte Menge

$\binom{0}{0} = 1$ da die leere Menge sich selbst als Teilmenge hat

$\binom{0}{n} = 0$ für jedes $n > 0$, da die leere Menge nur sich selbst als Teilmenge hat

$\binom{n}{1} = n$ für jedes n, da es für jedes Element eine einelementige Menge gibt, und diese eine Teilmenge ist (gilt auch für $n = 0$!)

Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten

Satz
Sei $1 \leq k \leq n$ mit $k, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Beweis.

- Sei M eine n-elementige Menge und $m \in M$.
- Sei $M_k = \{M' \subseteq M \mid |M'| = k\}$ = alle k-elementigen Teilmengen von M, d.h. $\binom{n}{k} = |M_k|$
- Teile die Mengen in M_k in zwei disjunkte Mengen auf:
  $A = \{M' \in M_k \mid m \not\in M'\} \quad B = \{M' \in M_k \mid m \in M'\}$
- $|A|$ = Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $M \setminus \{m\} = \binom{n-1}{k}$
- $|B|$ = Anzahl der $k-1$-elementigen Teilmengen von $M \setminus \{m\} = \binom{n-1}{k-1}$ □

Explizite Formel für Binomialkoeffizienten

Fakultät von natürlichen Zahlen

$$n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

Wir definieren zusätzlich $0! := 1$.

Satz
Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$. Dann gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Beispiel

Hochschule RheinMain

Bei Lotto „6 aus 49“ werden 6 Zahlen aus 49 gegebenen Zahlen gezogen.

Möglichkeiten: $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} == \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13.983.816$

Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige: $1/13.983.816 = 0,000000071 \cdots$