Hochschule RheinMain

Diskrete Strukturen

für die Studiengänge
- Angewandte Informatik
- Technische Informatik

02 Logik

Prof. Dr. David Sabel
Wintersemester 2024/25

Stand der Folien: 17. November 2024

Inhalt

Hochschule RheinMain

Einführendes zur Logik

Hochschule RheinMain

- Wichtige Grundlage der Informatik:
  - Kontrollfluss in Programmen wird durch Logik gesteuert
  - Digitale Schaltungen basieren auf Schaltungslogik
  - Logische Programmiersprachen basieren auf Logiken
  - Inferenzsysteme verwenden logische Schlüsse
  - Spezifikationen in der Programmverifikation werden in Logiken formuliert
  - ...
- Eine Logik ist formal aufgebaut aus
  - Syntax: Wie sehen formal aus?
  - Semantik: Welche Bedeutung haben (syntaktisch richtige) Formeln?

Aussagen

Hochschule RheinMain

Definition (Aussage)

Eine **Aussage** ist ein sprachlicher Satz, der entweder **falsch** oder **wahr** ist (aber nie beides gleichzeitig).

Definition (Wahrheitswerte)

Eine wahre Aussage hat den Wahrheitswert „w“ (oder „1“ oder „true“)
Eine falsche Aussage hat den Wahrheitswert „f“ (oder „0“ oder „false“).

Beispiele für Aussagen

Hochschule RheinMain

- Wiesbaden ist die Landeshauptstadt von Hessen. (w)
- Es gibt beliebig große Primzahlen. (w)
- 10+20 = 42 (f)
- Alle Informatikstudierende lieben die Mathematik (unklar, vermutlich f)
- Jede gerade Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen (unbekannt). Dies ist die Goldbach-Vermutung, die bis heute unbewiesen ist.
- Jedes Java-Programm terminiert. (f)

Keine Aussagen

Hochschule RheinMain

- Guten Morgen!
- 5+3
- Wann ist die Vorlesung endlich vorbei?
- Keine Aussage ist folgendes Paradoxon:

  „Ich lüge gerade.“

  Sowohl die Annahme, es sei wahr, als auch die Annahme, es sei falsch, führen zu einem Widerspruch!

Welche der folgenden Sätze sind Aussagen?

Hochschule RheinMain

- Die Erde ist eine Scheibe.
- Lasst uns feiern!
- 2 ist eine Primzahl.
- Wann machen wir Pause?
- Dieser Satz ist falsch.
- Die Kreiszahl π enthält jede beliebige Ziffernfolge.

Wahrheitsgehalt der Aussagen?

Syntax der Aussagenlogik

Hochschule RheinMain

Aussagen werden durch Variablen $A, B, \ldots$ repräsentiert (= aussagenlogische Variablen)

Definition (Aussagenlogische Formeln)

Aussagenlogische Variablen und Wahrheitswerte sind aussagenlogische Formeln

Wenn F und G aussagenlogische Formeln sind, dann auch

$(\neg F)$	(Negation)	„nicht F“
$(F \wedge G)$	(Konjunktion) logisches Und	„F und G“
$(F \vee G)$	(Disjunktion) logisches Oder	„F oder G“
$(F \oplus G)$	(Kontravalenz), exklusives Oder	„F entweder oder G“
$(F \rightarrow G)$	(Implikation)	„wenn F, dann G“
$(F \leftrightarrow G)$	(Äquivalenz) Biimplikation	„F genau dann, wenn G“

Beispiel: $(A \vee (B \wedge \neg(C \rightarrow w)))$

Junktoren

Hochschule RheinMain

Die aussagenlogischen Operatoren $\neg, \vee, \wedge, \ldots$ nennt man auch Junktoren

Wir zählen auch w und f zu den Junktoren (0-stellige Junktoren).

Bedeutung der Junktoren: Sie sind Funktionen auf Wahrheitswerten, d.h. für Eingaben berechnen sie Ausgaben.

Wir legen sie fest durch Wahrheitstabellen.

Eselsbrücke: $\vee$ „Oder ist oben offen“

Semantik der Negation

Hochschule RheinMain

A	$\neg A$
w	f
f	w

D.h. $\neg A$ ist genau dann eine wahre Aussage, wenn A falsch ist.

Z.B. ist $\neg$(Die Erde ist eine Scheibe) eine wahre Aussage.

Semantik der Konjunktion

Hochschule RheinMain

A	B	$(A \wedge B)$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

D.h. $(A \wedge B)$ ist genau dann eine wahre Aussage,
wenn **beide** Aussagen A und B wahr sind.

Semantik der Disjunktion

Hochschule RheinMain

A	B	$(A \vee B)$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

D.h. $(A \vee B)$ ist genau dann eine wahre Aussage,
wenn **mindestens eine** der beiden Aussagen A oder B wahr ist.

Semantik der Kontravalenz

Hochschule RheinMain

A	B	$(A \oplus B)$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	f

D.h. $(A \oplus B)$ ist genau dann eine wahre Aussage,
wenn **genau eine** der beiden Aussagen A oder B wahr ist.

Semantik der Implikation

Hochschule RheinMain

Die Implikation hat die folgende Semantik:

A	B	$(A \to B)$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

D.h. $(A \to B)$ ist genau dann wahr,
wenn A **falsch** ist **oder** A und B **beide wahr** sind.

Semantik der Äquivalenz

Hochschule RheinMain

A	B	$(A \leftrightarrow B)$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

D.h. $(A \leftrightarrow B)$ ist genau dann wahr,
wenn A und B **denselben Wahrheitswert** haben.

Semantik der aussagenlogischen Formeln

Hochschule RheinMain

Der Wahrheitswert der Formeln hängt ab vom Wahrheitswert der Variablen.

Eine **Belegung** $\mathcal{B}$ weist (endlich vielen) aussagenlogischen Variablen einen Wahrheitswert zu.

Belegung $\mathcal{B}$ für F weist mindestens allen Variablen aus F einen Wahrheitswert zu.

$\mathcal{B}(F)$: „Wahrheitswert von F unter der Belegung $\mathcal{B}$“

1. Ersetze A durch $\mathcal{B}(A)$ in F.
2. Werte danach die Junktoren von innen nach außen aus.

Beispiel

Hochschule RheinMain

Formel $F = ((A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(C \rightarrow A))$.

Belegung $\mathcal{B}_1 = \{A \mapsto f, B \mapsto f, C \mapsto w\}$

Berechne $\mathcal{B}_1(F)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_1(F) = &\quad \mathcal{B}_1((A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(C \rightarrow A)) \\
= &\quad ((\mathcal{B}_1(A) \wedge \neg\mathcal{B}_1(B)) \rightarrow \neg(\mathcal{B}_1(C) \rightarrow \mathcal{B}_1(A))) \\
= &\quad ((f \wedge \neg f) \rightarrow \neg(w \rightarrow f)) \\
= &\quad ((f \wedge w) \rightarrow \neg(w \rightarrow f)) \\
= &\quad (f \rightarrow \neg(w \rightarrow f)) \\
= &\quad (f \rightarrow \neg f) \\
= &\quad (f \rightarrow w) \\
= &\quad w
\end{aligned}
$$

Wiederholung

Hochschule RheinMain

		Negation	Konjunktion	Disjunktion	Kontravalenz	Implikation	Äquivalenz
A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
f	f	w	f	f	f	w	w
f	w		f	w	w	w	f
w	f	f	f	w	w	f	f
w	w		w	w	f	w	w

Wahrheitswert für alle Belegungen

Hochschule RheinMain

Verwende eine Wahrheitstabelle:

- Spalten für alle Variablen
- Spalten für alle Teilformeln
- Zeilen für jede mögliche Belegung der Variablen
- Sukzessive Auswertung der Teilformeln, bis man bei der Gesamtformel ist.

Beispiel

Hochschule RheinMain

Formel $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
Schritt 1:

A	B	C	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$A \vee C$	$\neg(A \vee C)$	$(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$

Beispiel

Hochschule RheinMain

Formel $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
Schritt 2:

A	B	C	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$A \vee C$	$\neg(A \vee C)$	$(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
f	f	f					
f	f	w					
f	w	f					
f	w	w					
w	f	f					
w	f	w					
w	w	f					
w	w	w					

Beispiel

Hochschule RheinMain

Formel $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
Schritt 3:

A	B	C	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$A \vee C$	$\neg(A \vee C)$	$(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
f	f	f	w				
f	f	w	w				
f	w	f	f				
f	w	w	f				
w	f	f	w				
w	f	w	w				
w	w	f	f				
w	w	w	f				

Beispiel

Hochschule RheinMain

Formel $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
Schritt 4:

A	B	C	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$A \vee C$	$\neg(A \vee C)$	$(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
f	f	f	w	f			
f	f	w	w	f			
f	w	f	f	f			
f	w	w	f	f			
w	f	f	w	w			
w	f	w	w	w			
w	w	f	f	f			
w	w	w	f	f			

Beispiel

Hochschule RheinMain

Formel $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
Schritt 5:

A	B	C	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$A \vee C$	$\neg(A \vee C)$	$(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
f	f	f	w	f	f		
f	f	w	w	f	w		
f	w	f	f	f	f		
f	w	w	f	f	w		
w	f	f	w	w	w		
w	f	w	w	w	w		
w	w	f	f	f	w		
w	w	w	f	f	w		

Beispiel

Hochschule RheinMain

Formel $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
Schritt 6:

A	B	C	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$A \vee C$	$\neg(A \vee C)$	$(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
f	f	f	w	f	f	w	
f	f	w	w	f	w	f	
f	w	f	f	f	f	w	
f	w	w	f	f	w	f	
w	f	f	w	w	w	f	
w	f	w	w	w	w	f	
w	w	f	f	f	w	f	
w	w	w	f	f	w	f	

Beispiel

Hochschule RheinMain

Formel $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
Schritt 7:

A	B	C	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$A \vee C$	$\neg(A \vee C)$	$(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee C)$
f	f	f	w	f	f	w	w
f	f	w	w	f	w	f	w
f	w	f	f	f	f	w	w
f	w	w	f	f	w	f	w
w	f	f	w	w	w	f	f
w	f	w	w	w	w	f	f
w	w	f	f	f	w	f	w
w	w	w	f	f	w	f	w

Hochschule RheinMain

GESETZE DER AUSSAGENLOGIK

- Gesetze von de Morgan
- Gesetze der Booleschen Algebra
- Dualität
- Weitere Rechengesetze

Prioritäten, Klammerregeln

Hochschule RheinMain

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $(((\neg A) \vee B) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Prioritäten, Klammerregeln

Hochschule RheinMain

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $(((\neg A) \vee B) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg \;>\; \wedge \;>\; \oplus \;>\; \vee \;>\; \rightarrow \;>\; \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Prioritäten, Klammerregeln

Hochschule RheinMain

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $(((\neg A) \vee B) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg \;>\; \wedge \;>\; \oplus \;>\; \vee \;>\; \rightarrow \;>\; \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Beispiel: $\neg A \vee B \wedge C \rightarrow D$

Prioritäten, Klammerregeln

Hochschule RheinMain

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $(((\neg A) \vee B) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg \;>\; \wedge \;>\; \oplus \;>\; \vee \;>\; \rightarrow \;>\; \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Beispiel: $\neg A \vee B \wedge C \rightarrow D$

Prioritäten, Klammerregeln

Hochschule RheinMain

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $(((\neg A) \vee B) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg \;>\; \wedge \;>\; \oplus \;>\; \vee \;>\; \rightarrow \;>\; \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Beispiel: $(\neg A) \vee B \wedge C \rightarrow D$

Prioritäten, Klammerregeln

Hochschule RheinMain

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $(((\neg A) \vee B) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg \ > \ \wedge \ > \ \oplus \ > \ \vee \ > \ \rightarrow \ > \ \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Beispiel: $(\neg A) \vee B \wedge C \rightarrow D$

Prioritäten, Klammerregeln

Hochschule RheinMain

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $(((\neg A) \vee B) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg \;>\; \wedge \;>\; \oplus \;>\; \vee \;>\; \rightarrow \;>\; \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Beispiel: $(\neg A) \vee (B \wedge C) \rightarrow D$

Prioritäten, Klammerregeln

Hochschule RheinMain

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $(((\neg A) \vee B) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg \ > \ \wedge \ > \ \oplus \ > \ \vee \ > \ \rightarrow \ > \ \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Beispiel: $(\neg A) \vee (B \wedge C) \rightarrow D$

Prioritäten, Klammerregeln

Hochschule RheinMain

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $(((\neg A) \vee B) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg \;>\; \wedge \;>\; \oplus \;>\; \vee \;>\; \rightarrow \;>\; \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Beispiel: $((\neg A) \vee (B \wedge C)) \rightarrow D$

Prioritäten, Klammerregeln

Hochschule RheinMain

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $(((\neg A) \vee B) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg \;>\; \wedge \;>\; \oplus \;>\; \vee \;>\; \rightarrow \;>\; \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Beispiel: $((\neg A) \vee (B \wedge C)) \rightarrow D$

Prioritäten, Klammerregeln

Hochschule RheinMain

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $(((\neg A) \vee B) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg \;>\; \wedge \;>\; \oplus \;>\; \vee \;>\; \rightarrow \;>\; \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Beispiel: $(((\neg A) \vee (B \wedge C)) \rightarrow D)$

Prioritäten, Klammerregeln

Hochschule RheinMain

Problem: Unklar was $\neg A \vee B \wedge C$ meint:

- $\neg((A \vee B) \wedge C)$
- $\neg(A \vee (B \wedge C))$
- $((\neg(A \vee B)) \wedge C)$
- $(((\neg A) \vee B) \wedge C)$
- $((\neg A) \vee (B \wedge C))$

Wir legen die Prioritäten fest als:

$$\neg \;>\; \wedge \;>\; \oplus \;>\; \vee \;>\; \rightarrow \;>\; \leftrightarrow$$

Höhere Priorität $>$ bedeutet „bindet die Operanden vorher“.

Beispiel: $(((\neg A) \vee (B \wedge C)) \rightarrow D)$

Assoziativität: $A \vee B \vee C = (A \vee B) \vee C$ oder $\ldots = A \vee (B \vee C)$? später...

Hochschule RheinMain

Definition (Tautologie)

Eine aussagenlogische Formel, die für **jede** Belegung **wahr** ist, nennt man eine **Tautologie** (oder allgemeingültige Formel)

Tautologien sind die **Sätze der Logik**.

Beispiel: $(A \wedge B) \rightarrow A$ ist eine Tautologie, denn

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \rightarrow A$
f	f	f	w
f	w	f	w
w	f	f	w
w	w	w	w

Widerspruch

Hochschule RheinMain

Definition (Widerspruch)

Eine aussagenlogische Formel, die für **jede** Belegung **falsch** ist, nennt man eine **Kontradiktion** (oder Widerspruch)

Beispiel:
$A \wedge \neg A$ ist eine Kontradiktion, denn

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
f	w	f
w	f	f

Erfüllbarkeit und Widerlegbarkeit

Hochschule RheinMain

Definition (Erfüllbarkeit und Widerlegbarkeit)

Sei F eine aussagenlogische Formel

- Wenn F für **mindestens eine** Belegung **wahr** ist, dann heißt F **erfüllbar**.
- Wenn F für **mindestens eine** Belegung **falsch** ist, dann heißt F **widerlegbar**

Beispiele:

- $(A \wedge B) \rightarrow A$ ist eine Tautologie, damit auch erfüllbar, aber nicht widerlegbar.
- $A \wedge \neg A$ eine Kontradiktion, damit auch widerlegbar, aber nicht erfüllbar.
- $A \wedge B$ ist erfüllbar und widerlegbar, denn

A	B	$A \wedge B$
f	f	f
w	w	w

Logische Äquivalenz

Hochschule RheinMain

Definition

Zwei Formeln F und G heißen **logisch äquivalent** geschrieben $F \equiv G$, wenn für jede Belegung $\mathcal{B}$ gilt $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$.

Logische Äquivalenz

Hochschule RheinMain

Definition

Zwei Formeln F und G heißen **logisch äquivalent** geschrieben $F \equiv G$, wenn für jede Belegung $\mathcal{B}$ gilt $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$.

Nachweis $F \equiv G$: Wahrheitstabelle mit allen Belegungen und mit Spalten für F und G. Diese dann vergleichen

Logische Äquivalenz

Hochschule RheinMain

Definition

Zwei Formeln F und G heißen **logisch äquivalent** geschrieben $F \equiv G$, wenn für jede Belegung $\mathcal{B}$ gilt $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G)$.

Nachweis $F \equiv G$: Wahrheitstabelle mit allen Belegungen und mit Spalten für F und G.
Diese dann vergleichen

Beispiel: $A \to B \equiv \neg A \vee B$ gilt, denn:

A	B	$\neg A$	$A \to B$	$\neg A \vee B$
f	f	w	w	w
f	w	w	w	w
w	f	f	f	f
w	w	f	w	w

Nachweis von $\equiv$ mit syntaktischer Äquivalenz

Hochschule RheinMain

Satz

Zwei Formeln F und G sind genau dann logisch äquivalent,
wenn $(F \leftrightarrow G)$ eine Tautologie ist.

Beweis (Skizze): Zwei Richtungen.

- „Wenn $F \equiv G$, dann ist $(F \leftrightarrow G)$ eine Tautologie.“
- „Wenn $(F \leftrightarrow G)$ eine Tautologie ist, dann gilt $F \equiv G$.“

In beiden Fällen kann man über alle Belegungen argumentieren (siehe Skript).

Austausch von logisch äquivalenten Formeln

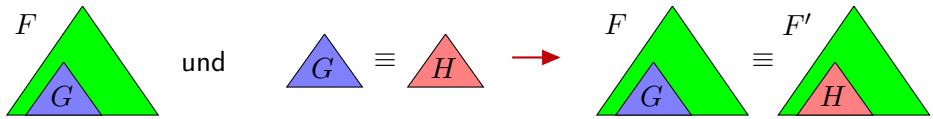
Hochschule RheinMain

Logische äquivalente (Teil-)Formeln darf man austauschen:

Satz

Sei F eine aussagenlogische Formel, die die Formel G als Teilformel enthält. Sei $G \equiv H$. Dann gilt $F \equiv F'$, wobei F' aus F entsteht, indem die Teilformel G durch H ersetzt wird.

Skizze dazu:



Beweis: Argumentiere über die Berechnung mit der Wahrheitstabelle.

Substitution von Variablen mit Formeln

Hochschule RheinMain

Definition (Substitution)

Seien $F, G_1, \ldots, G_n$ Formeln und $A_1, \ldots, A_n$ aussagenlogische Variablen. Dann bezeichne $F[G_1/A_1, \ldots, G_n/A_n]$ die Formel, die entsteht, indem jeweils für $1 \leq i \leq n$ alle Vorkommen von A_i in F durch die Formel G_i ersetzt werden.

Bemerkung: Die Substitution ist parallel durchzuführen, denn

$$F[G/A][H/B] \neq F[G/A, H/B] \text{ wenn } B \text{ in } G \text{ vorkommt}$$

Satz

Seien F, G, H aussagenlogische Formeln, A eine aussagenlogische Variable.
Wenn $F \equiv G$ gilt, dann gilt auch $F[H/A] \equiv G[H/A]$

Gesetze von de Morgan

Hochschule RheinMain

Satz von den Morgan

Seien F und G aussagenlogische Formeln. Dann gilt

Erstes de Morgansches Gesetz: $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$

Zweites de Morgansche Gesetz: $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$

Beweis. Es genügt, die Teilformeln F und G wie aussagenlogische Variablen zu behandeln (wegen letztem Satz).

Wahrheitstabelle:

F	G	$(F \wedge G)$	$\neg(F \wedge G)$	$\neg F$	$\neg G$	$\neg F \vee \neg G$
f	f	f	w	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w
w	f	f	w	f	w	w
w	w	w	f	f	f	f

Das zweite Gesetz lässt sich analog beweisen. □

Rechengesetze für $\neg$, $\wedge$, $\vee$

Hochschule RheinMain

Satz (Rechengesetze für $\wedge, \vee, \neg$)

Für alle aussagenlogischen Formeln F, G, H gelten die folgenden Gesetze:

- Kommutativgesetze: $F \wedge G \equiv G \wedge F$ und $F \vee G \equiv G \vee F$
- Assoziativgesetz: $(F \wedge G) \wedge H \equiv F \wedge (G \wedge H)$ und $(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$
- Distributivgesetze: $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$ und $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$
- Existenz neutraler Elemente: $F \wedge w \equiv F$ und $F \vee f \equiv F$
- Existenz des Komplements: $F \wedge \neg F \equiv f$ und $F \vee \neg F \equiv w$

Alle Gesetze können mit Wahrheitstabellen bewiesen werden.
Wir machen es nur für das 1. Distributivgesetz

Beweis der 1. Distributivgesetz

Hochschule RheinMain

F	G	H	$G \wedge H$	$F \vee (G \wedge H)$	$F \vee G$	$F \vee H$	$(F \vee G) \wedge (F \vee H)$
f	f	f	f	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	w	f
f	w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w
w	w	w	w	w	w	w	w

Klammerregeln

Hochschule RheinMain

Satz

$\oplus$ ist kommutativ und assoziativ.

Beweis. Übungsaufgabe

Da $\vee, \wedge, \oplus$ assoziativ sind, lassen wir Klammern manchmal weg und schreiben $F \vee G \vee H$, $F \wedge G \wedge H$ bzw. $F \oplus G \oplus H$.

Boolesche Algebra

Hochschule RheinMain

Eine Menge mit ausgezeichneten Elementen w, f und Operationen $\wedge, \vee, \neg$ auf dieser Menge, für welche die

- Kommutativgesetze,
- Assoziativgesetze,
- Distributivgesetze,
- Existenz neutraler Elemente und
- Existenz des Komplements

gelten, nennt man Boolesche Algebra (benannt George Boole).

D.h. insbesondere $(\{f, w\}, \wedge, \vee, \neg)$ wie zuvor definiert, ist eine Boolesche Algebra. Es gibt auch weitere Boolesche Algebren.

Dualität

Hochschule RheinMain

Die Rechengesetze bestehen immer aus zwei symmetrischen Teilen:
Man erhält den einen Teil aus dem Anderen, indem man $\wedge$ mit $\vee$ sowie f mit w vertauscht.

Diese Eigenschaft der Booleschen Algebra nennt man **Dualität**

Ein Satz ist **dual** zu einem anderen Satz, wenn man ihn erhält, indem man $\wedge$ mit $\vee$ sowie f mit w vertauscht.

Weitere Rechengesetze

Hochschule RheinMain

Satz (weitere Rechengesetze)

Für alle aussagenlogischen Formeln F und G gilt:

- Absorptionsgesetze: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$ und $F \vee (F \wedge G) \equiv F$
- Idempotenzgesetze: $F \vee F \equiv F$ und $F \wedge F \equiv F$
- Involutionsgesetz (doppelte Negation): $\neg(\neg F) \equiv F$
- Extremalgesetze: $F \vee w \equiv w$ und $F \wedge f \equiv f$

Weitere Rechengesetze

Hochschule RheinMain

Satz (weitere Rechengesetze)

Für alle aussagenlogischen Formeln F und G gilt:

- Absorptionsgesetze: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$ und $F \vee (F \wedge G) \equiv F$

Beweis. Involutionsgesetz und die Extremalgesetze können mit einer Wahrheitstabelle verifiziert werden.

1. Absorptionsgesetz:

$$
\begin{array}{lll}
 & F \wedge (F \vee G) & \\
\equiv & (F \vee f) \wedge (F \vee G) & \text{(Existenz neutraler Elemente)} \\
\equiv & (F \vee (f \wedge G)) & \text{(Distributivgesetz)} \\
\equiv & (F \vee (G \wedge f)) & \text{(Kommutativgesetz)} \\
\equiv & (F \vee f) & \text{(Extremalgesetz)} \\
\equiv & F & \text{(Existenz neutraler Elemente)}
\end{array}
$$

Weitere Rechengesetze

Hochschule RheinMain

Satz (weitere Rechengesetze)

Für alle aussagenlogischen Formeln F und G gilt:

- Absorptionsgesetze: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$ und $F \vee (F \wedge G) \equiv F$

Beweis. Involutionsgesetz und die Extremalgesetze können mit einer Wahrheitstabelle verifiziert werden.

1. Absorptionsgesetz:

$$
\begin{aligned}
& F \wedge (F \vee G) \\
\equiv\ & (F \vee f) \wedge (F \vee G) && \text{(Existenz neutraler Elemente)} \\
\equiv\ & (F \vee (f \wedge G)) && \text{(Distributivgesetz)} \\
\equiv\ & (F \vee (G \wedge f)) && \text{(Kommutativgesetz)} \\
\equiv\ & (F \vee f) && \text{(Extremalgesetz)} \\
\equiv\ & F && \text{(Existenz neutraler Elemente)}
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Dualität können wir in allen Zwischenschritten $\wedge$ mit $\vee$ und f mit w vertauschen, was direkt das zweite Absorptionsgesetz zeigt.

Weitere Rechengesetze

Hochschule RheinMain

Satz (weitere Rechengesetze)

Für alle aussagenlogischen Formeln F und G gilt:

- Absorptionsgesetze: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$ und $F \vee (F \wedge G) \equiv F$

Beweis. Involutionsgesetz und die Extremalgesetze können mit einer Wahrheitstabelle verifiziert werden.

1. Absorptionsgesetz:

$$
\begin{aligned}
& F \vee (F \wedge G) \\
\equiv\ & (F \wedge w) \vee (F \wedge G) && \text{(Existenz neutraler Elemente)} \\
\equiv\ & (F \wedge (f \vee G)) && \text{(Distributivgesetz)} \\
\equiv\ & (F \wedge (G \vee w)) && \text{(Kommutativgesetz)} \\
\equiv\ & (F \wedge w) && \text{(Extremalgesetz)} \\
\equiv\ & F && \text{(Existenz neutraler Elemente)}
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Dualität können wir in allen Zwischenschritten $\wedge$ mit $\vee$ und f mit w vertauschen, was direkt das zweite Absorptionsgesetz zeigt.

Weitere Rechengesetze (2)

Hochschule RheinMain

Satz (weitere Rechengesetze)

Für alle aussagenlogischen Formeln F und G gilt:

- Idempotenzgesetze: $F \vee F \equiv F$ und $F \wedge F \equiv F$

Beweis des 1. Idempotenzgesetz:

$$
\begin{array}{ll}
F \vee F & \\
\equiv F \vee (F \wedge w) & \text{(Existenz neutraler Elemente)} \\
\equiv F & \text{(Absorptionsgesetz)}
\end{array}
$$

Da das 1. Absorptionsgesetz dual zum 2. Absorptionsgesetz ist, folgt das 2. Idempotenzgesetz mittels der Dualität.

Vereinfachen von Formeln mit den Rechengesetzen

Hochschule RheinMain

Wir vereinfachen die Formel $\neg(A \vee \neg B) \vee (A \wedge B)$

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg(A \vee \neg B) \vee (A \wedge B) & \\
\equiv & (\neg A \wedge \neg\neg B) \vee (A \wedge B) & \text{(De Morgansches Gesetz)} \\
\equiv & (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B) & \text{(Involutionsgesetz)} \\
\equiv & (B \wedge \neg A) \vee (B \wedge A) & \text{(Kommutativgesetz, 2 Mal)} \\
\equiv & B \wedge (\neg A \vee A) & \text{(Distributivgesetz)} \\
\equiv & B \wedge (A \vee \neg A) & \text{(Kommutativgesetz)} \\
\equiv & B \wedge w & \text{(Komplement)} \\
\equiv & B & \text{(Neutrale Elemente)}
\end{array}
$$

Hochschule RheinMain

VOLLSTÄNDIGKEIT VON JUNKTOREN

- Boolesche Funktionen
- Vollständige Menge von Junktoren

Boolesche Funktionen

Hochschule RheinMain

Formel F mit Variablen $A_1, \ldots, A_n$ ist wie Boolesche Funktion $h(A_1, \ldots, A_n)$

Boolesche Funktionen

Hochschule RheinMain

Formel F mit Variablen $A_1, \ldots, A_n$ ist wie Boolesche Funktion $h(A_1, \ldots, A_n)$
Umgekehrte Frage: Welche Boolesche Funktionen gibt es?

Boolesche Funktionen

Hochschule RheinMain

Formel F mit Variablen $A_1, \ldots, A_n$ ist wie Boolesche Funktion $h(A_1, \ldots, A_n)$
Umgekehrte Frage: Welche Boolesche Funktionen gibt es?
0-stellig: $h_1 = w$ und $h_2 = f$.

Boolesche Funktionen

Hochschule RheinMain

Formel F mit Variablen $A_1, \ldots, A_n$ ist wie Boolesche Funktion $h(A_1, \ldots, A_n)$
Umgekehrte Frage: Welche Boolesche Funktionen gibt es?
0-stellig: $h_1 = w$ und $h_2 = f$.
1-stellig: Vier Funktionen: Identität, konstant f, konstant w, Negation

Boolesche Funktionen

Hochschule RheinMain

Formel F mit Variablen $A_1, \ldots, A_n$ ist wie Boolesche Funktion $h(A_1, \ldots, A_n)$
Umgekehrte Frage: Welche Boolesche Funktionen gibt es?
0-stellig: $h_1 = w$ und $h_2 = f$.
1-stellig: Vier Funktionen: Identität, konstant f, konstant w, Negation
2-stellig: ...

Boolesche Funktionen

Hochschule RheinMain

Formel F mit Variablen $A_1, \ldots, A_n$ ist wie Boolesche Funktion $h(A_1, \ldots, A_n)$
Umgekehrte Frage: Welche Boolesche Funktionen gibt es?
0-stellig: $h_1 = w$ und $h_2 = f$.
1-stellig: Vier Funktionen: Identität, konstant f, konstant w, Negation
2-stellig: ...

Satz

Für jede Boolesche Funktion h gibt es eine aussagenlogische Formel, die h berechnet.

Beweisidee:

- Gegeben: Wahrheitstabelle für h.
- Für jede „w"-Zeile: Bilde Konjunktion entsprechend der Belegung.
- Gesamtformel F: Disjunktion der Konjunktionen.
- $\mathcal{B}(F)$ ist genau dann wahr, wenn $h(\mathcal{B}(A_1), \ldots, \mathcal{B}(A_n))$ wahr ist.

Passende Formel zur Booleschen Funktion: Beispiel

Hochschule RheinMain

A	B	C	$h(A,B,C)$
f	f	f	w
f	f	w	f
f	w	f	w
f	w	w	f
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	f
w	w	w	w

Passende Formel zur Booleschen Funktion: Beispiel

Hochschule RheinMain

A	B	C	$h(A,B,C)$
f	f	f	w
f	f	w	f
f	w	f	w
f	w	w	f
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	f
w	w	w	w

$$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

Passende Formel zur Booleschen Funktion: Beispiel

Hochschule RheinMain

A	B	C	$h(A,B,C)$
f	f	f	w
f	f	w	f
f	w	f	w
f	w	w	f
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	f
w	w	w	w

$$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

$$\neg A \wedge B \wedge \neg C$$

Passende Formel zur Booleschen Funktion: Beispiel

Hochschule RheinMain

A	B	C	$h(A,B,C)$
f	f	f	w
f	f	w	f
f	w	f	w
f	w	w	f
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	f
w	w	w	w

$$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

$$\neg A \wedge B \wedge \neg C$$

$$A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

Passende Formel zur Booleschen Funktion: Beispiel

Hochschule RheinMain

A	B	C	$h(A,B,C)$
f	f	f	w
f	f	w	f
f	w	f	w
f	w	w	f
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	f
w	w	w	w

$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

$\neg A \wedge B \wedge \neg C$

$A \wedge \neg B \wedge \neg C$

$A \wedge \neg B \wedge C$

Passende Formel zur Booleschen Funktion: Beispiel

Hochschule RheinMain

A	B	C	$h(A,B,C)$
f	f	f	w
f	f	w	f
f	w	f	w
f	w	w	f
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	f
w	w	w	w

$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

$\neg A \wedge B \wedge \neg C$

$A \wedge \neg B \wedge \neg C$

$A \wedge \neg B \wedge C$

$A \wedge B \wedge C$

Passende Formel zur Booleschen Funktion: Beispiel

Hochschule RheinMain

A	B	C	$h(A,B,C)$	
f	f	f	w	$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$
f	f	w	f	
f	w	f	w	$\neg A \wedge B \wedge \neg C$
f	w	w	f	
w	f	f	w	$A \wedge \neg B \wedge \neg C$
w	f	w	w	$A \wedge \neg B \wedge C$
w	w	f	f	
w	w	w	w	$A \wedge B \wedge C$

$$F = (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C)$$

Eine solche Disjunktion von Konjunktionen nennt man auch Disjunktive Normalform.

Vollständige Mengen an Junktoren

Hochschule RheinMain

Definition (Vollständige Menge)

Eine Menge M von Junktoren heißt vollständig, wenn für jede aussagenlogische Formel eine logisch äquivalente Formel existiert, die nur die Junktoren aus M benutzt.

Beispiele:

- $\{w, f, \vee, \wedge\}$ nicht vollständig, denn z.B. für $\neg A$ keine logisch äquivalente Formel
- $\{\vee, \wedge, \neg\}$ vollständig, denn

$$w \equiv A \vee \neg A \qquad f \equiv A \wedge \neg A \qquad F \to G \equiv \neg F \vee G$$
$$F \leftrightarrow G \equiv F \to G \wedge G \to F \qquad F \oplus G \equiv (F \vee G) \wedge \neg(F \wedge G)$$

- $\{\neg, \vee\}$ und $\{\neg, \wedge\}$ jeweils vollständig, denn

$$F \wedge G \equiv \neg(\neg F \vee \neg G) \qquad F \vee G \equiv \neg(\neg F \wedge \neg G)$$

Hochschule RheinMain

ANWENDUNGEN DER AUSSAGENLOGIK

- Digitale Schaltungen
- SAT-Solving

Anwendung der Aussagenlogik: Schaltungsentwurf

Hochschule RheinMain

Schaltkreise sind aussagenlogische Formeln.

Beispiel: 2-aus-3-Schaltung: Die Wahrheitstabelle der gesuchten Funktion h:

A	B	C	$h(A,B,C)$
f	f	f	f
f	f	w	f
f	w	f	f
f	w	w	w
w	f	f	f
w	f	w	w
w	w	f	w
w	w	w	w

Disjunktive NF $F := (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

Anwendung der Aussagenlogik: Schaltungsentwurf (2)

Hochschule RheinMain

$$F := (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

kann man vereinfachen:

$$
\begin{aligned}
& (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) && \\
\equiv\ & (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee ((A \wedge B) \vee (\neg C \wedge C)) && \text{(Ausklammern von } A \wedge B\text{)} \\
\equiv\ & (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee ((A \wedge B) \wedge w) && \text{(Existenz des Komplements)} \\
\equiv\ & (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B) && \text{(Idempotenzgesetz)} \\
\equiv\ & (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge ((\neg B \wedge C) \vee B)) && \text{(Ausklammern von } A\text{)} \\
\equiv\ & (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge ((B \vee \neg B) \wedge (B \vee C))) && \text{(Ausmultiplizieren)} \\
\equiv\ & (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge (w \wedge (B \vee C))) && \text{(Existenz des Komplements)} \\
\equiv\ & (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge (B \vee C)) && \text{(Idempotenzgesetz)} \\
\equiv\ & (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge C) && \text{(Ausmultiplizieren)} \\
\equiv\ & (C \wedge ((\neg A \wedge B) \vee A)) \vee (A \wedge B) && \text{(Ausklammern von } C\text{)} \\
\equiv\ & (C \wedge ((A \vee \neg A) \wedge (A \vee B))) \vee (A \wedge B) && \text{(Ausmultiplizieren)} \\
\equiv\ & (C \wedge (w \wedge (A \vee B))) \vee (A \wedge B) && \text{(Existenz des Komplements)} \\
\equiv\ & (C \wedge ((A \vee B))) \vee (A \wedge B) && \text{(Idempotenzgesetz)} \\
\equiv\ & (C \wedge A) \vee (C \wedge B) \vee (A \wedge B) && \text{(Ausmultiplizieren)}
\end{aligned}
$$

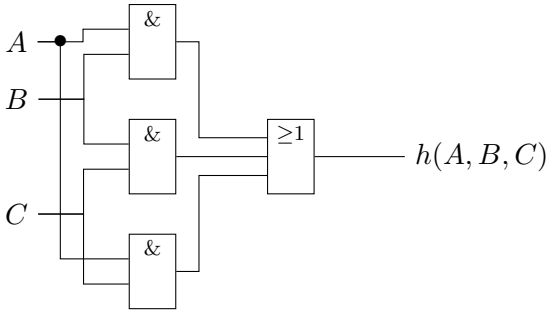
Es gibt dafür spezielle Verfahren (KV-Diagramme) und Tools z.B. wolframalpha.com.

Anwendung der Aussagenlogik: Schaltungsentwurf (3)

Hochschule RheinMain

$$F \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Schaltkreis dazu



Dabei ist:

ein Und-Gatter

ein Oder-Gatter

Anwendung der Aussagenlogik: SAT-Solving

Hochschule RheinMain

- Idee: Kodiere Problem als aussagenlogische Formel
- Ziel: Finde erfüllende Belegung eine Formel (nennt man auch Modell)
- Erfüllende Belegung = Lösung des Problems / Rätsels etc.
- Softwarewerkzeug zum Finden des Modells: SAT-Solver (SAT = satisfiability)
- Wir betrachten als Beispiel ein Rätsel von Raymond Smullyan.

Wer ist der Pfefferdieb?

Hochschule RheinMain

Es gibt drei Verdächtige: Den Hutmacher, den Schnapphasen und die Haselmaus.

1. Genau einer von ihnen ist der Dieb.
2. Unschuldige sagen immer die Wahrheit
3. Schnapphase: Der Hutmacher ist unschuldig.
4. Hutmacher: Die Haselmaus ist unschuldig

Wer ist der Pfefferdieb?

Hochschule RheinMain

Es gibt drei Verdächtige: Den Hutmacher, den Schnapphasen und die Haselmaus.

1. Genau einer von ihnen ist der Dieb.
2. Unschuldige sagen immer die Wahrheit
3. Schnapphase: Der Hutmacher ist unschuldig.
4. Hutmacher: Die Haselmaus ist unschuldig

Rätsel kodieren mit Aussagenlogik:
Variablen H, S und M für Hutmacher / Schnapphase / Maus ist schuldig.

Wer ist der Pfefferdieb?

Hochschule RheinMain

Es gibt drei Verdächtige: Den Hutmacher, den Schnapphasen und die Haselmaus.

1. Genau einer von ihnen ist der Dieb.
2. Unschuldige sagen immer die Wahrheit
3. Schnapphase: Der Hutmacher ist unschuldig.
4. Hutmacher: Die Haselmaus ist unschuldig

Rätsel kodieren mit Aussagenlogik:
Variablen H, S und M für Hutmacher / Schnapphase / Maus ist schuldig.

- Für 1.: $(H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S)$

Wer ist der Pfefferdieb?

Hochschule RheinMain

Es gibt drei Verdächtige: Den Hutmacher, den Schnapphasen und die Haselmaus.

1. Genau einer von ihnen ist der Dieb.
2. Unschuldige sagen immer die Wahrheit
3. Schnapphase: Der Hutmacher ist unschuldig.
4. Hutmacher: Die Haselmaus ist unschuldig

Rätsel kodieren mit Aussagenlogik:

Variablen H, S und M für Hutmacher / Schnapphase / Maus ist schuldig.

- Für 1.: $(H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S)$
- Für 2. und 3.: $\neg S \rightarrow \neg H$

Wer ist der Pfefferdieb?

Hochschule RheinMain

Es gibt drei Verdächtige: Den Hutmacher, den Schnapphasen und die Haselmaus.

1. Genau einer von ihnen ist der Dieb.
2. Unschuldige sagen immer die Wahrheit
3. Schnapphase: Der Hutmacher ist unschuldig.
4. Hutmacher: Die Haselmaus ist unschuldig

Rätsel kodieren mit Aussagenlogik:

Variablen H, S und M für Hutmacher / Schnapphase / Maus ist schuldig.

- Für 1.: $(H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S)$
- Für 2. und 3.: $\neg S \rightarrow \neg H$
- Für 2. und 4.: $\neg H \rightarrow \neg M$

Wer ist der Pfefferdieb?

Hochschule RheinMain

Es gibt drei Verdächtige: Den Hutmacher, den Schnapphasen und die Haselmaus.

1. Genau einer von ihnen ist der Dieb.
2. Unschuldige sagen immer die Wahrheit
3. Schnapphase: Der Hutmacher ist unschuldig.
4. Hutmacher: Die Haselmaus ist unschuldig

Rätsel kodieren mit Aussagenlogik:

Variablen H, S und M für Hutmacher / Schnapphase / Maus ist schuldig.

- Für 1.: $(H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S)$
- Für 2. und 3.: $\neg S \rightarrow \neg H$
- Für 2. und 4.: $\neg H \rightarrow \neg M$

Gesamtformel:

$(H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (\neg S \rightarrow \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M)$

Modell berechnen mit SAT-Solver

Hochschule RheinMain

Vereinfachen

$$
\begin{aligned}
& (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (\neg S \rightarrow \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M) \\
\equiv\ & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M) \\
\equiv\ & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M) \\
\equiv\ & (H \vee M \vee S) \wedge (\neg H \vee \neg M) \wedge (\neg H \vee \neg S) \wedge (\neg M \vee \neg S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M)
\end{aligned}
$$

Dies ist eine Konjunktive Normalform (eine Disjunktion von Konjunktionen)

Modell berechnen mit SAT-Solver

Hochschule RheinMain

Vereinfachen

$$
\begin{aligned}
& (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (\neg S \to \neg H) \wedge (\neg H \to \neg M) \\
\equiv\ & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (\neg H \to \neg M) \\
\equiv\ & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M) \\
\equiv\ & (H \vee M \vee S) \wedge (\neg H \vee \neg M) \wedge (\neg H \vee \neg S) \wedge (\neg M \vee \neg S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M)
\end{aligned}
$$

Dies ist eine Konjunktive Normalform (eine Disjunktion von Konjunktionen)

Eingabe für SAT-Solver im DIMACS-Format
($1 = H$, $2 = M$, $3 = S$)

```
p cnf 3 6
1 2 3 0
-1 -3 0
-1 -2 0
-2 -3 0
-1 3 0
1 -2 0
```

Modell berechnen mit SAT-Solver

Hochschule RheinMain

Vereinfachen

$$
\begin{aligned}
& (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (\neg S \rightarrow \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M) \\
\equiv\ & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M) \\
\equiv\ & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M) \\
\equiv\ & (H \vee M \vee S) \wedge (\neg H \vee \neg M) \wedge (\neg H \vee \neg S) \wedge (\neg M \vee \neg S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M)
\end{aligned}
$$

Dies ist eine Konjunktive Normalform (eine Disjunktion von Konjunktionen)

Eingabe für SAT-Solver im DIMACS-Format
(1 = H, 2 = M, 3 = S)

```
p cnf 3 6
1 2 3 0
-1 -3 0
-1 -2 0
-2 -3 0
-1 3 0
1 -2 0
```

Ausgabe (z.B. msoos.github.io/cryptominisat_web)

```
SAT -1 -2 3
```

Erfüllende Belegung ist:
$\{H \mapsto f, M \mapsto f, S \mapsto w\}$

D.h. ?

Modell berechnen mit SAT-Solver

Hochschule RheinMain

Vereinfachen

$$
\begin{aligned}
& (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (\neg S \rightarrow \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M) \\
\equiv\ & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow \neg M) \\
\equiv\ & (H \vee M \vee S) \wedge \neg(H \wedge M) \wedge \neg(H \wedge S) \wedge \neg(M \wedge S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M) \\
\equiv\ & (H \vee M \vee S) \wedge (\neg H \vee \neg M) \wedge (\neg H \vee \neg S) \wedge (\neg M \vee \neg S) \wedge (S \vee \neg H) \wedge (H \vee \neg M)
\end{aligned}
$$

Dies ist eine Konjunktive Normalform (eine Disjunktion von Konjunktionen)

Eingabe für SAT-Solver im DIMACS-Format ($1 = H$, $2 = M$, $3 = S$)

```
p cnf 3 6
1 2 3 0
-1 -3 0
-1 -2 0
-2 -3 0
-1 3 0
1 -2 0
```

Ausgabe (z.B. msoos.github.io/cryptominisat_web)

```
SAT -1 -2 3
```

Erfüllende Belegung ist:
$\{H \mapsto f, M \mapsto f, S \mapsto w\}$

D.h. der Schnapphase war es!

Hochschule RheinMain

FORMELN MIT QUANTOREN

- Aussageformen
- All- und Existenzquantoren
- Prädikatenlogische Formeln

Quantoren: Einführung

Hochschule RheinMain

- Wir machen die Betrachtung nicht ganz formal
- Lernziel: Umgang mit Quantoren beherrschen
- Genaue Semantik ist Inhalt vertiefender Veranstaltungen

Objektvariablen und Aussageformen

Hochschule RheinMain

- Bisher: Aussagen wie „2 ist eine Primzahl“
- Es fehlt: Konstrukte wie „x ist eine Primzahl“: Wahrheitsgehalt hängt von x ab!
- „x ist eine Primzahl“ ist keine Aussage!

Objektvariablen und Aussageformen

Hochschule RheinMain

- Bisher: Aussagen wie „2 ist eine Primzahl“
- Es fehlt: Konstrukte wie „x ist eine Primzahl“: Wahrheitsgehalt hängt von x ab!
- „x ist eine Primzahl“ ist keine Aussage!
- Aussageform: Sätze mit Variablen für Objekte
- Setzt man Werte für die Variablen ein, erhält man Aussagen.

Objektvariablen und Aussageformen

Hochschule RheinMain

- Bisher: Aussagen wie „2 ist eine Primzahl“
- Es fehlt: Konstrukte wie „x ist eine Primzahl“: Wahrheitsgehalt hängt von x ab!
- „x ist eine Primzahl“ ist keine Aussage!
- Aussageform: Sätze mit Variablen für Objekte
- Setzt man Werte für die Variablen ein, erhält man Aussagen.

Aussageform „x ist eine Primzahl“

- 2 für x einsetzen: Man erhält eine wahre Aussage
- 4 für x einsetzen: Man erhält eine falsche Aussage

Objektvariablen und Aussageformen

Hochschule RheinMain

- Bisher: Aussagen wie „2 ist eine Primzahl“
- Es fehlt: Konstrukte wie „x ist eine Primzahl“: Wahrheitsgehalt hängt von x ab!
- „x ist eine Primzahl“ ist keine Aussage!
- Aussageform: Sätze mit Variablen für Objekte
- Setzt man Werte für die Variablen ein, erhält man Aussagen.

Aussageform „x ist eine Primzahl“

- 2 für x einsetzen: Man erhält eine wahre Aussage
- 4 für x einsetzen: Man erhält eine falsche Aussage
- Grün für x einsetzen: Das ist nicht gewollt!
- Die Menge der Werte für x sollte einschränkbar sein.

Ein solche Menge für Objektvariablen nennt man **Universum**

Universumsbeispiele, Aussageform

Hochschule RheinMain

- „x ist eine Primzahl“ ⟶ sinnvolles Universum für x: $\mathbb{N}$
- „x ist eine Farbe der additiven Farbmischung“
  ⟶ sinnvolles Universum für x: alle Farben
- „Man benötigt x Fußballspieler:innen pro Team, damit ein Spiel angepfiffen werden darf.“
  ⟶ sinnvolles Universum: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

Definition (Aussageform)

Seien $x_1, \ldots, x_n$ Variablen und $U_1, \ldots, U_n$ Universen. Dann ist eine **Aussageform** ein Satz mit Variablen $x_1, \ldots, x_n$, sodass nach Ersetzen aller Variablen x_i durch Objekte $u_i \in U_i$ ein Satz entsteht der wahr oder falsch ist.

Prädikatensymbole

Hochschule RheinMain

- In der Aussagenlogik: Variablen $A, B, \ldots$ für Aussagen
- Jetzt: Variablen $P, Q, \ldots$ für Aussageformen
- Um die Anzahl und Namen der Objektvariablen von P festzulegen: $P(x_1, \ldots, x_n)$
  P ist dann n-stellig.
- $P, Q, \ldots$ nennt man auch Prädikatensymbole

Beispiel:

- $P_1(x) =$ „x ist Primzahl“
- Verwende dann $P_1(x)$ in den Formeln
- $P_1(2)$ meint dann die Aussage „2 ist Primzahl“.

Beispiel mit 3-stelligem Prädikatensymbol:

- $Q(x, y, z) := x + y = z$
- $Q(1, 2, 3)$ ist eine wahre Aussage, $Q(2, 2, 3)$ ist eine falsche Aussage

Allaussagen

Hochschule RheinMain

Allaussagen sind Aussagen über alle Elemente eines Universums.

Beispiele:

- Alle Primzahlen > 10 sind ungerade.
- In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkel 180 Grad.
- Jede der Zahlen 15, 27, 69 ist ungerade.

Allaussagen

Hochschule RheinMain

Allaussagen sind Aussagen über alle Elemente eines Universums.

Beispiele:

- Alle Primzahlen > 10 sind ungerade.
- In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkel 180 Grad.
- Jede der Zahlen 15, 27, 69 ist ungerade.

Solche Allaussagen können stets in die Form

Für alle x aus einem Universum U gilt .....

gebracht werden.

Allaussagen

Hochschule RheinMain

Allaussagen sind Aussagen über alle Elemente eines Universums.

Beispiele:

- Alle Primzahlen > 10 sind ungerade.
  Für alle x aus $\mathbb{N}$ gilt: Wenn $x > 10$ und x Primzahl, dann ist x ungerade.
- In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkel 180 Grad.
- Jede der Zahlen 15, 27, 69 ist ungerade.

Solche Allaussagen können stets in die Form

Für alle x aus einem Universum U gilt .....

gebracht werden.

Allaussagen

Hochschule RheinMain

Allaussagen sind Aussagen über alle Elemente eines Universums.

Beispiele:

- Alle Primzahlen > 10 sind ungerade.
  Für alle x aus $\mathbb{N}$ gilt: Wenn $x > 10$ und x Primzahl, dann ist x ungerade.
- In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkel 180 Grad.
  Für alle x aus der Menge der Dreiecke gilt: Winkelsumme von x ist 180 Grad.
- Jede der Zahlen 15, 27, 69 ist ungerade.

Solche Allaussagen können stets in die Form

Für alle x aus einem Universum U gilt .....

gebracht werden.

Allaussagen

Hochschule RheinMain

Allaussagen sind Aussagen über alle Elemente eines Universums.

Beispiele:

- Alle Primzahlen > 10 sind ungerade.
  Für alle x aus $\mathbb{N}$ gilt: Wenn $x > 10$ und x Primzahl, dann ist x ungerade.
- In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkel 180 Grad.
  Für alle x aus der Menge der Dreiecke gilt: Winkelsumme von x ist 180 Grad.
- Jede der Zahlen 15, 27, 69 ist ungerade.
  Für alle x aus $\{15, 27, 69\}$ gilt: x ist ungerade.

Solche Allaussagen können stets in die Form

Für alle x aus einem Universum U gilt .....

gebracht werden.

Allquantor

Hochschule RheinMain

„Für alle x aus einem Universum U gilt $P(x)$“

wird mit neuer Syntax (dem Allquantor $\forall$) ausgedrückt als

$$\forall x \in U : P(x)$$

Semantik des Allquantors

$\forall x \in U : P(x)$ ist genau dann wahr,
wenn $P(u)$ für jedes $u \in U$ eine wahre Aussage ist.

Beachte: $\forall x \in U : P(x)$ ist wieder eine Aussage (wenn es keine anderen Variablen als x gibt)!

Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$
- $\forall x \in \{17, 39, 47\}$: ungerade(x)
- $\forall x \in \mathbb{N}$: Wenn x Primzahl, dann ist x ungerade
- $\forall x \in \{2, 3, 4, 5\}$: gerade(x)

Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ (w)
- $\forall x \in \{17, 39, 47\}$: ungerade(x)
- $\forall x \in \mathbb{N}$: Wenn x Primzahl, dann ist x ungerade
- $\forall x \in \{2, 3, 4, 5\}$: gerade(x)

Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0 \ (w)$
- $\forall x \in \{17, 39, 47\}$: ungerade(x) (w)
- $\forall x \in \mathbb{N}$: Wenn x Primzahl, dann ist x ungerade
- $\forall x \in \{2, 3, 4, 5\}$: gerade(x)

Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ (w)
- $\forall x \in \{17, 39, 47\}$: ungerade(x) (w)
- $\forall x \in \mathbb{N}$: Wenn x Primzahl, dann ist x ungerade (f)
- $\forall x \in \{2, 3, 4, 5\}$: gerade(x)

Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ (w)
- $\forall x \in \{17, 39, 47\}$: ungerade(x) (w)
- $\forall x \in \mathbb{N}$: Wenn x Primzahl, dann ist x ungerade (f)
- $\forall x \in \{2, 3, 4, 5\}$: gerade(x) (f)

Allquantor bei endlichem Universum

Hochschule RheinMain

Satz

Sei $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ ein endliches Universum. Dann gilt
$\forall u \in U : P(u) \equiv P(u_1) \wedge \cdots \wedge P(u_n)$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \forall x \in \{2,3,4,5\} : \text{gerade}(x) \\ \equiv \quad & \text{gerade}(2) \wedge \text{gerade}(3) \wedge \text{gerade}(4) \wedge \text{gerade}(5) \end{aligned}$$

Existenzaussagen

Hochschule RheinMain

Existenzaussagen fordern, dass mindestens ein Element eines Universums eine gewisse Eigenschaft hat.

Beispiele für Existenzaussagen sind:

- Es gibt eine gerade Primzahl.
- Sei $U = \{1, 3, 5, 7, 8\}$. Dann gibt es ein $x \in U$, für das gilt: x ist gerade.

Existenzaussagen

Hochschule RheinMain

Existenzaussagen fordern, dass mindestens ein Element eines Universums eine gewisse Eigenschaft hat.

Beispiele für Existenzaussagen sind:

- Es gibt eine gerade Primzahl.
- Sei $U = \{1, 3, 5, 7, 8\}$. Dann gibt es ein $x \in U$, für das gilt: x ist gerade.

Solche Existenzaussagen können stets in die Form

Es gibt ein x aus einem Universum U, für das gilt .....

gebracht werden.

Existenzaussagen

Hochschule RheinMain

Existenzaussagen fordern, dass mindestens ein Element eines Universums eine gewisse Eigenschaft hat.

Beispiele für Existenzaussagen sind:

- Es gibt eine gerade Primzahl.
  Es gibt ein $x \in \mathbb{N}$, für das gilt: x ist gerade Primzahl
- *Sei $U = \{1, 3, 5, 7, 8\}$. Dann gibt es ein $x \in U$, für das gilt: x ist gerade.*

Solche Existenzaussagen können stets in die Form

Es gibt ein x aus einem Universum U, für das gilt .....

gebracht werden.

Existenzaussagen

Hochschule RheinMain

Existenzaussagen fordern, dass mindestens ein Element eines Universums eine gewisse Eigenschaft hat.

Beispiele für Existenzaussagen sind:

- Es gibt eine gerade Primzahl.
  Es gibt ein $x \in \mathbb{N}$, für das gilt: x ist gerade Primzahl
- *Sei $U = \{1, 3, 5, 7, 8\}$. Dann gibt es ein $x \in U$, für das gilt: x ist gerade.*
  Es gibt ein $x \in \{1, 3, 5, 7, 8\}$, für das gilt: x ist gerade

Solche Existenzaussagen können stets in die Form

Es gibt ein x aus einem Universum U, für das gilt .....

gebracht werden.

Existenzquantor

Hochschule RheinMain

Es gibt ein x aus einem Universum U, für das gilt: $P(x)$

wird mit neuer Syntax (dem Existenzquantor $\exists$) ausgedrückt als

$$\exists x \in U : P(x)$$

Semantik des Existenzquantors

$\exists x \in U : P(x)$ ist genau dann wahr,
wenn $P(u)$ für mindestens ein $u \in U$ eine wahre Aussage ist.

Beachte: $\exists x \in U : P(x)$ ist wieder eine Aussage (wenn es keine anderen Variablen als x gibt)!

Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$
- $\exists x \in \{2, 4, 5, 9\} : \text{gerade}(x)$
- $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 2$
- $\exists x \in \{3, 5, 7, 9\} : \text{gerade}(x)$

Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2 \ (w)$
- $\exists x \in \{2, 4, 5, 9\} : \text{gerade}(x)$
- $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 2$
- $\exists x \in \{3, 5, 7, 9\} : \text{gerade}(x)$

Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2 \ (w)$
- $\exists x \in \{2, 4, 5, 9\} : \mathsf{gerade}(x) \ (w)$
- $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 2$
- $\exists x \in \{3, 5, 7, 9\} : \mathsf{gerade}(x)$

Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2 \ (w)$
- $\exists x \in \{2, 4, 5, 9\} : \text{gerade}(x) \ (w)$
- $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 2 \ (f)$
- $\exists x \in \{3, 5, 7, 9\} : \text{gerade}(x)$

Beispiele

Hochschule RheinMain

- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2 \ (w)$
- $\exists x \in \{2, 4, 5, 9\} : \text{gerade}(x) \ (w)$
- $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 2 \ (f)$
- $\exists x \in \{3, 5, 7, 9\} : \text{gerade}(x) \ (f)$

Existenzquantor bei endlichem Universum

Hochschule RheinMain

Satz

Sei $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ ein endliches Universum. Dann gilt
$\exists u \in U : P(u) \equiv P(u_1) \vee \cdots \vee P(u_n)$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \exists x \in \{2,3,4,5\} : \text{gerade}(x) \\ \equiv \quad & \text{gerade}(2) \vee \text{gerade}(3) \vee \text{gerade}(4) \vee \text{gerade}(5) \end{aligned}$$

Syntax der prädikatenlogischen Formeln

Hochschule RheinMain

Zusammenfassend definieren wir:

Definition (Prädikatenlogische Formeln)

Atomare Aussagen sind prädikatenlogische Formeln.
Wenn P n-stelliges Prädikat, dann ist $P(x_1, \ldots, x_n)$ eine prädikatenlogische Formel.
Wenn F und G prädikatenlogische Formeln und U ein Universum. dann sind

$$(\neg F),\ (F \wedge G),\ (F \vee G),\ (F \oplus G),\ (F \to G),\ (F \leftrightarrow G),\ \forall x \in U : F,\ \exists x \in U : F$$

prädikatenlogische Formeln.

Bemerkung Auch 0-stellige Prädikate sind erlaubt. Wenn nur solche vorkommen (und keine Quantoren), dann haben wir wieder eine aussagenlogische Formel

Für den Wahrheitswert eine Formel betrachten wir nur geschlossene Formeln, d.h. alle x sind unter einem Quantor $\exists x \ldots$ oder $\forall x \ldots$

Beispiele

Hochschule RheinMain

- Wenn zwei Zahlen nicht größer oder kleiner zueinander sind, dann müssen sie gleich sein:

$$\forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : (\neg(x < y) \land \neg(y < x)) \rightarrow x = y$$

- Für jede natürliche Zahl, gibt es eine größere natürliche Zahl, die Primzahl ist

$$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x < y \land y \text{ ist Primzahl}$$

Wenn das Universum U klar ist, dann lassen wir es manchmal weg und schreiben

$$\forall x : F \text{ statt } \forall x \in U : F$$
$$(\text{bzw. } \exists x : F \text{ statt } \exists x \in U : F)$$

Negation von All- und Existenzaussagen

Hochschule RheinMain

Satz

- $\neg \forall x \in U : P(x) \equiv \exists x \in U : \neg P(x)$
- $\neg \exists x \in U : P(x) \equiv \forall x \in U : \neg P(x).$

Beispiele für das Schieben der Negation:

- Negation von „Alle Menschen sind schlau“ ist:
  „Es gibt (mindestens) einen nicht schlauen Menschen“
- Negation von „Es gibt eine schwere Klausur“ ist:
  „Alle Klausuren sind nicht schwer“.
- $\neg(\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 2) \quad \equiv \quad \forall x \in \mathbb{N} : x^2 \neq 2$
- $\neg(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 2) \quad \equiv \quad \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$

Quantorregeln

Hochschule RheinMain

Satz

Es gilt

- $(\forall x \in U : P(x)) \wedge (\forall x \in U : Q(x)) \equiv (\forall x \in U : (P(x) \wedge Q(x)))$
- $(\exists x \in U : P(x)) \vee (\exists x \in U : Q(x)) \equiv (\exists x \in U : (P(x) \vee Q(x)))$

Beispiele:

- „Alle Autos haben ein Lenkrad und alle Autos haben mindestens drei Räder“ ist äuqivalent zu
  „Alle Autos haben ein Lenkrad und mindestens drei Räder.“.
- $(\exists x \in \mathbb{N} : x > 10) \vee (\exists x \in \mathbb{N} : x < 5) \quad \equiv \quad (\exists x \in \mathbb{N} : x > 10 \vee x < 5)$.

Falsche Verschiebungen

Hochschule RheinMain

Beachte:

- $\forall x \in U : (P(x) \vee Q(x))$ **ist nicht gleich zu** $(\forall x \in U : P(x)) \vee (\forall x \in U : Q(x))$
- $\exists x \in U : (P(x) \wedge Q(x))$ **ist nicht gleich zu** $(\exists x \in U : P(x)) \wedge (\exists x \in U : Q(x))$

Beispiele:

- „Für alle Primzahlen p gilt: p ist ungerade oder $p = 2$“ ist wahr, aber „(Alle Primzahlen sind ungerade) oder (Alle Primzahlen sind gleich zu 2)“ ist falsch.
- „Es gibt ein Auto mit drei Rädern und es gibt ein Auto mit vier Rädern“ ist nicht gleich zu „Es gibt ein Auto mit drei und mit vier Rädern“.

Vertauschungsregeln

Hochschule RheinMain

Satz

Für Universen U_1, U_2 und Formeln F gelten die folgenden Äquivalenzen:

- $\forall x \in U_1 : \forall y \in U_2 : F \equiv \forall y \in U_2 : \forall x \in U_1 : F$
- $\exists x \in U_1 : \exists y \in U_2 : F \equiv \exists y \in U_2 : \exists x \in U_1 : F$

Beispiel: $\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x \geq y \vee x < y \quad \equiv \quad \forall y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x \geq y \vee x < y$

Vertauschungsregeln

Hochschule RheinMain

Satz

Für Universen U_1, U_2 und Formeln F gelten die folgenden Äquivalenzen:

- $\forall x \in U_1 : \forall y \in U_2 : F \equiv \forall y \in U_2 : \forall x \in U_1 : F$
- $\exists x \in U_1 : \exists y \in U_2 : F \equiv \exists y \in U_2 : \exists x \in U_1 : F$

Beispiel: $\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x \geq y \vee x < y \quad \equiv \quad \forall y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x \geq y \vee x < y$

Gilt **nicht** für unterschiedliche Quantoren:

- $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x^2 = y$ ist wahr, aber $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x^2 = y$ ist falsch
- „Es gibt einen Studierenden, der alle Aufgaben in der Klausur lösen kann.“
  ist nicht äquivalent zu
  „Jede Aufgabe der Klausur kann durch irgendeinen Studierenden gelöst werden.“

Schlussbemerkung

Hochschule RheinMain

In vielen sprachlichen und mathematischen Sätzen wird oft implizit allquantifiziert wird, ohne dass der Quantor genannt wird.

Beispiel:

„Die erste binomische Formel lautet:
Für reellwertige a, b gilt $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$“

Implizit ist gemeint, dass diese Gleichung für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt.