

Haskell's Typklassensystem

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik



Letzte Änderung der Folien: 26. November 2021 ♦ Die Folien basieren zum Teil auf Material von Dr. Steffen Jost, dem an dieser Stelle für die Verwendungserlaubnis herzlich gedankt sei.

Klassen & Instanzen

Motivation, Klassendefinition, Instanzen, Vererbung

Ziele

- Klassen, Methoden, Instanzen, Vererbung
- Verwendung eigener Typklassen
- Standardklassen und Methoden in Haskell: Eq, Ord, Read, Show, Num
- Kinds und Konstruktorklassen
- Neuere Klassen: Monoid, Semigroup, Foldable
- Auflösung der Überladung: Übersetzung in typklassenfreies Haskell

Polymorphismus (1)

Parametrischer Polymorphismus:

- Funktion f ist für eine Menge von verschiedenen Typen definiert
- Verhalten ist für alle Typen gleich
- Implementierung ist unabhängig von den konkreten Typen
- Beispiele:
 - $(++) :: [a] \rightarrow [a] \rightarrow [a]$
kann für beliebige Listen verwendet werden
 - $(\backslash x \rightarrow x) :: a \rightarrow a$
kann auf beliebiges Argument angewendet werden
 - $\text{map} :: (a \rightarrow b) \rightarrow [a] \rightarrow [b]$
kann für passende Funktion und Listen verwendet werden

Polymorphismus (2)

Ad hoc Polymorphismus:

- Eine Funktion (bzw. Funktionsname) f wird mehrfach für verschiedene Datentypen definiert.
- I.a. ist die Stelligkeit unabhängig vom Typ.
- Implementierungen von f für verschiedene Typen sind unterschiedlich.
- Ad hoc-Polymorphismus nennt man auch Überladung.
- Beispiele
 - `+` für Integer- und für Double-Werte.
 - `==` für `Bool` und `Integer`
 - `map` für Listen und Bäume

Haskells Typklassen implementieren Ad hoc Polymorphismus

Polymorphismus (3)

Manchmal kann man parametrischen Polymorphismus verwenden, indem man zusätzliche Parameter übergibt:

Beispiel: Sortieren von Listen

- `sort :: [a] -> [a]`
geht nicht, da Sortierung abhängig vom Elementtyp
- `sortBy :: (a -> a -> Ordering) -> [a] -> [a]`
geht, da Vergleichsfunktion als Argument mitgeliefert wird.
- `sort :: Ord a => [a] -> [a]`
geht, da der Constraint `Ord a` besagt, dass man nur solche Typen a verwenden kann, für die man die Vergleichsfunktion kennt.

Bei der Auflösung der Überladung (Haskell mit Typklassen \rightarrow Haskell ohne Typklassen) wird (mehr oder weniger) aus `sort` das `sortBy` gemacht (sehen wir später)

Typklassen und Instanzen

Typklasse:

- Namen
- Klassenfunktionen

Instanzen:

- Typen, die zur Typklasse gehören
- mit der jeweils spezifischen Implementierung der Klassenfunktionen

Beispiel

- Typklasse: `GenericTree`
- Klassenfunktionen, z.B. `gmap`, `fold`
- (Typ-)Instanzen: Listen, `B Baum`, ...
- Klassenfunktion-Instanzen: `map`, `bmap`, `foldr`, `foldb`

Typklassen

In der Klassendefinition wird festgelegt:

- Typ der Klassenfunktionen
- Optional: Default-Implementierungen der Klassenfunktionen

Pseudo-Syntax für den Kopf:

```
class [OBERKLASSE =>] Klassenname a where
  ... Typdeklarationen und Default-Implementierungen ...
```

- definiert die Klasse `Klassenname`
- a ist der Parameter für den Typ. Es ist **nur eine** solche Variable erlaubt (Es gibt Erweiterungen...)
- `OBERKLASSE` ist eine Klassenbedingung (optional)
- Einrückung beachten!

Die Klasse Eq

Definition der Typklasse Eq:

```
class Eq a where
  (==), (/=) :: a -> a -> Bool

  x /= y = not (x == y)
  x == y = not (x /= y)
```

- Keine Klassenbedingung
- Klassenmethoden sind == und /=
- Es gibt Default-Implementierungen für beide Klassenmethoden
- Instanzen müssen mindestens == oder /= definieren
- Bemerkung: Aktuelles, angenommenes Proposal des Core Libraries Committees:
/= aus der Klasse entfernen und
als normale Funktion außerhalb der Klasse definieren
(<https://github.com/haskell/core-libraries-committee/issues/3>)

Typklasseninstanz (1)

- Instanzen definieren die Klassenmethoden für einen konkreten Typ
- Instanzen können Default-Implementierungen **überschreiben**

Syntax für Instanzen:

```
instance [KLASSENBEDINGUNGEN => ] KLASSENINSTANZ where
  ...Implementierung der Klassenmethoden ...
```

- KLASSENINSTANZ besteht aus Klasse und der Instanz,
z.B. Eq [a] oder Eq Int
- KLASSENBEDINGUNGEN optional

Typklasseninstanz (2)

Beispiele:

```
instance Eq Int where
  (==) = primEQInt

instance Eq Bool where
  x == y = (x && y) || (not x && not y)
  x /= y = not (x == y)

instance Eq Wochentag where
  Montag == Montag = True
  Dienstag == Dienstag = True
  Mittwoch == Mittwoch = True
  Donnerstag == Donnerstag = True
  Freitag == Freitag = True
  Samstag == Samstag = True
  Sonntag == Sonntag = True
  _ == _ = False
```

Typklasseninstanz (3)

Beispiel mit Klassenbedingung:

```
instance Eq a => Eq [a] where
  [] == [] = True
  (x:xs) == (y:ys) = (x == y) && (xs == ys)
  _ == _ = False
```

- Für die Abfrage `x == y` muss der Gleichheitstest auf Listenelementen vorhanden sein
- `Eq a => Eq [a]` drückt diese Bedingung aus.
- „Typ [a] ist nur dann eine Instanz von Eq,
wenn Typ a bereits Instanz von Eq ist“

Fehlende Definitionen

```
class Eq a where
  (==), (/=) :: a -> a -> Bool

  x /= y = not (x == y)
  x == y = not (x /= y)
```

Beispiel:

```
data RGB = Rot | Gruen | Blau
  deriving(Show)
```

```
instance Eq RGB where
```

- Instanz syntaktisch korrekt
- Keine Fehlermeldung oder Warnung
- Rot == Gruen terminiert nicht!

Fehlende Definitionen (2)

Eigene „Eq“-Klasse

```
class MyEq a where
  (===), (/=) :: a -> a -> Bool
  (===) a b = not (a /= b)
```

Nur (===) hat eine Default-Implementierung

```
instance MyEq RGB where
```

- Instanz syntaktisch korrekt
- Warnung vom Compiler (kein Fehler):
Warning: No explicit method nor default method for `/=/'
In the instance declaration for `MyEq RGB'
- Rot === Gruen gibt Laufzeitfehler:
*Main> Rot === Gruen
*** Exception: TypklassenBeispiele.hs:37:9-16:
No instance nor default method for class operation Main.==/=

Instanzen: data, type, newtype

- Mit data definierte Typen können zu Instanzen gemacht werden.
- Mit type definierte Typsynonyme können **nicht** zu Instanzen gemacht werden!
Grund: Compiler kann die Synonyme nicht unterscheiden, welche Instanz soll er nehmen?
- Mit newtype definierte Typsynonyme **können** zu Instanzen gemacht werden.

Beispiele: Zwei Eq-Instanzen für Bool

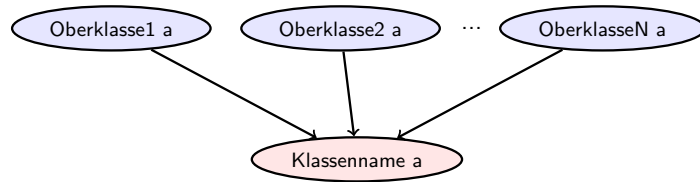
```
newtype Wahrheitswert = W Bool
instance Eq Wahrheitswert where
  (W True) == (W True) = True
  (W False) == (W False) = True
  _ == _ = False
```

```
newtype VerkehrteWelt = VW Bool
instance Eq VerkehrteWelt where
  (VW True) == (VW False) = True
  (VW False) == (VW True) = True
  _ == _ = False
```

Typklassen: Vererbung

```
class (Oberklasse1 a, ..., OberklasseN a) => Klassenname a where
```

...



- Klassenname ist **Unterklasse** von Oberklasse1,...,OberklasseN
- In der Klassendefinition können die überladenen Operatoren der Oberklassen verwendet werden (da sie geerbt sind)
- Beachte: => ist **nicht** als logische Implikation zu interpretieren
- Da mehrere Oberklassen erlaubt sind, ist **Mehrfachvererbung** möglich

Klasse mit Vererbung: Ord

Ord ist **Unterklasse** von Eq:

```
class (Eq a) => Ord a where
  compare :: a -> a -> Ordering
  (<),(<=),(>=),(>) :: a -> a -> Bool
  max, min :: a -> a -> a
  compare x y | x == y = EQ
               | x <= y = LT
               | otherwise = GT
  x <= y = compare x y /= GT
  x < y = compare x y == LT
  x >= y = compare x y /= LT
  x > y = compare x y == GT
  max x y | x <= y = y
           | otherwise = x
  min x y | x <= y = x
           | otherwise = y
```

Ord: lineare Ordnungen!

Ordering ist definiert als:

```
data Ordering = LT | EQ | GT
```

Instanzen müssen entweder <= oder compare definieren.

Beispiel: Instanz für Wochentag

```
instance Ord Wochentag where
  a <= b =
    (a,b) `elem` [(a,b) | i <- [0..6],
                          let a = ys!!i,
                              b <- drop i ys]
  where ys = [Montag, Dienstag, Mittwoch,
              Donnerstag, Freitag, Samstag, Sonntag]
```

Wenn Wochentag Instanz von Enum,
dann kann man die Definition ersetzen:

```
a <= b =
  (a,b) `elem` [(a,b) | a <- [Montag..Sonntag], b <- [a..Sonntag]]
```

Vererbung im Typsystem

Beispiel:

```
f x y = (x == y) && (x <= y)
```

Da == und <= verwendet werden würde man erwarten:

```
f :: (Eq a, Ord a) => a -> a -> Bool
```

Da Ord jedoch Unterklasse von Eq:

```
f :: Ord a => a -> a -> Bool
```

Klassenbeschränkungen bei Instanzen

```
instance (Klasse1 a1, ..., KlasseN aN) => Klasse Typ where
...
```

- Es sind mehrere Typvariablen erlaubt.
- Die Typvariablen a_1, \dots, a_N müssen alle im Typ `Typ` vorkommen.

Klassenbeschränkungen bei Instanzen

```
instance (Klasse1 a1, ..., KlasseN aN) => Klasse Typ where
...
```

- **Keine Vererbung!**
- Bedeutet: Es gibt nur dann eine Instanz, wenn es Instanzen für die Typvariablen a_1, \dots, a_N der entsprechenden Klassen gibt.

Beispiel:

```
instance Eq a => Eq (Bbaum a) where
  Blatt a == Blatt b      = a == b
  Knoten l1 r1 == Knoten l2 r2 = l1 == l2 && r1 == r2
  _ == _                  = False
```

Nur wenn man Blattmarkierungen vergleichen kann, dann auch Bäume

Klassenbeschränkungen bei Instanzen (2)

```
*Main List> Blatt 1 == Blatt 2
False
Main List> Blatt 1 == Blatt 1
True
*Main List> Blatt (\x ->x) == Blatt (\y -> y)
<interactive>:1:0:
  No instance for (Eq (t -> t))
    arising from a use of `==' at <interactive>:1:0-32
  Possible fix: add an instance declaration for (Eq (t -> t))
  In the expression: Blatt (\ x -> x) == Blatt (\ y -> y)
  In the definition of `it':
    it = Blatt (\ x -> x) == Blatt (\ y -> y)
```

Klassenbeschränkungen bei Instanzen (3)

Beispiel mit mehreren Klassenbeschränkungen:

```
data Either a b = Left a | Right b
```

Either-Instanz für Eq:

```
instance (Eq a, Eq b) => Eq (Either a b) where
  Left x == Left y = x == y -- benutzt Eq-Instanz f\"ur a
  Right x == Right y = x == y -- benutzt Eq-Instanz f\"ur b
  _ == _ = False
```

Die Klassen Read und Show

Die Klassen Read und Show dienen zum Einlesen (Parsen) und Anzeigen von Datentypen.

```
show :: Show a => a -> String
read :: Read a => String -> a
```

Allerdings ist read keine Klassenfunktion!
Komplizierter:

```
type ReadS a = String -> [(a,String)]
type ShowS  = String -> String
```

- reads ist wie ein Parser mit Erfolgslisten
- shows kann noch einen String als Argument nehmen (oft schneller als geschachteltes ++)

```
reads :: Read a => ReadS a
shows :: Show a => a -> ShowS
```

Die Klassen Read und Show (2)

```
class Read a where
  readsPrec :: Int -> ReadS a
  readList  :: ReadS [a]
  -- ... default decl for readList given in Prelude
```

```
class Show a where
  showsPrec :: Int -> a -> ShowS
  show      :: a -> String
  showList  :: [a] -> ShowS

  showsPrec _ x s = show x ++ s
  show x         = showsPrec 0 x ""
  -- ... default decl for showList given in Prelude
```

Show für BBAum

```
showBBAum :: (Show t) => BBAum t -> String
showBBAum (Blatt a)    = show a
showBBAum (Knoten l r) =
  "<" ++ showBBAum l ++ "|" ++ showBBAum r ++ ">"
```

Schlecht, da quadratische Laufzeit, insbesondere bei tiefen baumartigen Strukturen

Besser:

```
showBBAum' :: (Show t) => BBAum t -> String
showBBAum' b = showsBBAum b []
```

```
showsBBAum :: (Show t) => BBAum t -> ShowS
showsBBAum (Blatt a)    = shows a
showsBBAum (Knoten l r) =
  showChar '<' . showsBBAum l . showChar '|' . showsBBAum r . showChar '>'
```

Show für BBAum (2)

Tests:

```
*Main> last $ showBBAum t
'>'
(73.38 secs, 23937939420 bytes)
*Main> last $ show t
'>'
(0.16 secs, 10514996 bytes)
```

Hierbei ist t ein Baum mit ca. 15000 Knoten.

Show-Instanz für BBAum a:

```
instance Show a => Show (BBAum a) where
  showsPrec _ = showsBBAum
```

Read für BBAum

Elegant mit List Comprehensions:

```
instance Read a => Read (BBAum a) where
  readsPrec _ = readsBBAum

readsBBAum :: (Read a) => ReadS (BBAum a)
readsBBAum ('<':xs) =
  [(Knoten l r, rest) | (l, '|':ys) <- readsBBAum xs,
                      (r, '>':rest) <- readsBBAum ys]

readsBBAum s
  = [(Blatt x, rest) | (x,rest) <- reads s]
```

Auflösung erfordert manchmal Typ

```
Prelude> read "10"
<interactive>:1:0:
  Ambiguous type variable `a' in the constraint
  `Read a' arising from a use of `read' at <interactive>:1:0-8
  Probable fix: add a type signature that
                fixes these type variable(s)
Prelude> (read "10")::Int
10
```

Ähnliches Problem bei überladenen Konstanten, z.B. 0

Im GHC **Defaulting**: Für Zahlen ist dies der Typ Integer.

Klasse für Zahlen: Num

Num überlädt Operatoren für Zahlen:

```
class Num a where
  (+), (-), (*) :: a -> a -> a
  negate       :: a -> a
  abs, signum  :: a -> a
  fromInteger  :: Integer -> a
```

Mit fromInteger werden Zahlenkonstanten überladen, z.B.

```
length [] = 0
length (x:xs) = 1+(length xs)
```

Der Compiler kann den Typ `length :: (Num a) => [b] -> a` herleiten, da 0 eigentlich für `fromInteger (0::Integer)` steht.

In Haskell: `genericLength` aus Modul `Data.List`

Die Klasse Enum

Enum ist für Typen geeignet deren Werte aufzählbar sind:

```
class Enum a where
  succ, pred :: a -> a
  toEnum     :: Int -> a
  fromEnum   :: a -> Int
  enumFrom   :: a -> [a]           -- [n..]
  enumFromThen :: a -> a -> [a]   -- [n,n'..]
  enumFromTo   :: a -> a -> [a]   -- [n..m]
  enumFromThenTo :: a -> a -> a -> [a] -- [n,n'..m]
```


Die Klasse Enum (2)

Enum-Instanz für Wochentag

```
instance Enum Wochentag where
  toEnum i = tage!!(i `mod` 7)
  fromEnum t = case elemIndex t tage of
    Just i -> i
```

```
tage = [Montag,Dienstag,Mittwoch,Donnerstag,
        Freitag,Samstag,Sonntag]
```

Ein Aufruf:

```
*Main> enumFromTo Montag Sonntag
[Montag,Dienstag,Mittwoch,Donnerstag,Freitag,Samstag,Sonntag]
*Main> [(Montag)..(Samstag)]
[Montag,Dienstag,Mittwoch,Donnerstag,Freitag,Samstag]
```

Kinds & Konstruktorklassen

Was sind Kinds? / Klassen für Typkonstruktoren. / Die Klasse Functor

Typisierung unter Typklassen

Syntax von polymorphen Typen ohne Typklassen

$$\mathbf{T} ::= TV \mid TC \mathbf{T}_1 \dots \mathbf{T}_n \mid \mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_2$$

Erweiterte Typen \mathbf{T}_e mit Typklassen:

$$\mathbf{T}_e ::= \mathbf{T} \mid \mathbf{Kon} \Rightarrow \mathbf{T}$$

\mathbf{Kon} ist ein **Typklassenkontext**:

$$\mathbf{Kon} ::= \text{Klassenname } TV \mid (\text{Klassenname}_1 TV, \dots, \text{Klassenname}_n TV)$$

Zusätzlich: Für $\mathbf{Kontext} \Rightarrow \mathbf{Typ}$ muss gelten:

Alle Typvariablen von $\mathbf{Kontext}$ kommen auch in \mathbf{Typ} vor.

Z.B. $\text{elem} :: (\text{Eq } a) \Rightarrow a \rightarrow [a] \rightarrow \text{Bool}$.

Kinds

- Typen sind quasi „Typen über Termen“
- **Kinds** (engl. für Sorte) sind „Typen über Typen“
- Einfache Syntax für Kinds: $\kappa ::= * \mid \kappa \rightarrow \kappa$ Basiskind $*$ und Funktionskind.
- Jeder Haskell-Typ hat Kind $*$.
- Im GHCi anzeigen:

```
> :kind Bool
Bool :: *
> :kind (Bool -> [Int] -> Char)
(Bool -> [Int] -> Char) :: *
```

- Typkonstruktoren TC mit Stelligkeit n haben den Kind $* \underbrace{-> \dots -> *}_{n \text{ Sterne}} -> *$

*Der Typkonstruktor TC erwartet n Argumente, die selbst Typen sind.
Wendet man TC auf solche Argumente an, so erhält man einen Typ.*

- Beispiel: Maybe ist einstellig und hat Kind $* -> *$

Kinds: Beispiele

```
Prelude> :kind Maybe
Maybe :: * -> *
Prelude> :kind Either
Either :: * -> * -> *
Prelude> :kind Maybe Bool
Maybe Bool :: *
Prelude> :kind Either Bool
Either Bool :: * -> *
Prelude> :kind Either Bool Char
Either Bool Char :: *
```

Kinds: Listen, Funktionen

Listen:

- [] ist der Typkonstruktor.
- Statt [] a schreibt man meistens [a]

```
Prelude> :kind []
[] :: * -> *
Prelude> :kind [Bool]
[Bool] :: *
Prelude> :kind [] Bool
[] Bool :: *
```

Funktionspfeil:

- -> verhält sich wie ein Typkonstruktor
- Verlangt zwei Typen als Argumente

```
Prelude> :kind (->)
(->) :: * -> * -> *
```

Typklassenbeschränkungen: Constraint als Kind

Neuer Basiskind für Typklassenbeschränkungen: Constraint

Beispiele:

```
Prelude> :kind (Show Bool) -- Show Bool ist ein Constraint
(Show Bool) :: Constraint
Prelude> :kind Show -- Show erwartet einen Typ, um dann
Show :: * -> Constraint -- ein Constraint zu werden
```

Konstruktorklassen

- Die bisherigen Klassen abstrahieren über einen **Typ**
Z.B.

```
class Eq a where
  (==), (/=) :: a -> a -> Bool
  x /= y = not (x == y)
  x == y = not (x /= y)
```
- für die Variable **a** kann ein **Typ** eingesetzt werden.
- **a** ist vom Kind *****
- In Haskell ist es auch möglich über **Typkonstruktoren** zu abstrahieren.
D.h. Klassen, wobei die Variable a von Kind *** -> * -> ... -> ***
- Solche Klassen heißen **Konstruktorklassen**

Die Konstruktorklasse Functor

Definition der Klasse Functor:

```
class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> f a -> f b
```

`f` ist eine Variable für einen Typkonstruktor.

In `Data.Functor` wird ein Synonym definiert

```
(<$>) :: Functor f => (a -> b) -> f a -> f b
(<$>) = fmap
```

Functor-Instanz für Listen

```
instance Functor [] where
  fmap = map
```

Die Konstruktorklasse Functor

Functor-Instanz für BBaum

```
instance Functor BBaum where
  fmap = bMap
```

Bei Instanzbildung muss der Typkonstruktor `BBaum` und nicht der Typ `(BBaum a)` angegeben werden.

Die Konstruktorklasse Functor

Falsch mit `BBaum a` statt `BBaum`:

```
instance Functor (BBaum a) where
  fmap = bMap
```

ergibt den Fehler:

```
Kind mis-match
The first argument of `Functor' should have kind `* -> *',
but `BBaum a' has kind `*'
In the instance declaration for `Functor (BBaum a)'
```

Instanzen von Functor

```
instance Functor (Either a) where
  fmap f (Left a) = Left a
  fmap f (Right a) = Right (f a)
```

Beachte, dass `(Either a)` wie ein 1-stelliger Typkonstruktor wirkt, da `Either` 2-stellig ist. siehe `Data.Either`

```
instance Functor Maybe where
  fmap f Nothing = Nothing
  fmap f (Just a) = Just (f a)
```

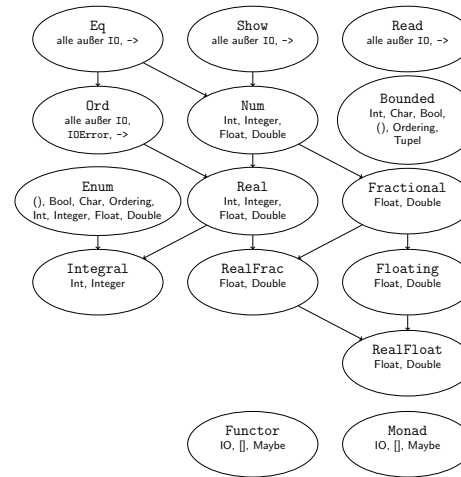
Instanzen von `Functor` sollten die folgenden beiden Gesetze erfüllen:

```
fmap id = id
fmap (f . g) = fmap f . fmap g
```

Monoide und Halbgruppen

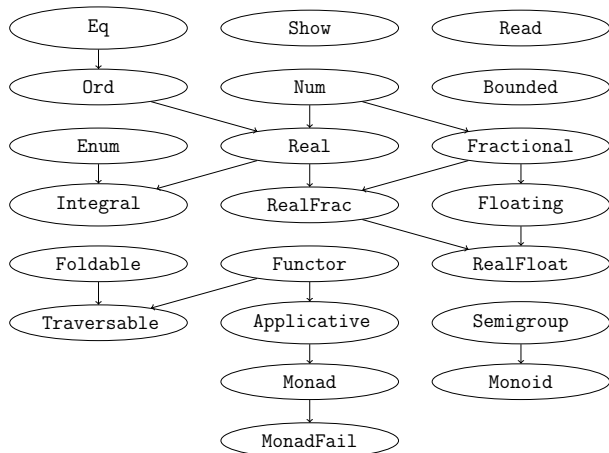
Übersicht über vordefinierte Klassen, die Klassen Monoid und Semigroup

Übersicht über die vordefinierten Typklassen (veraltet)



Diese Typklassen-Hierarchie entspricht dem Haskell 2010 Report

Aktuelle Übersicht



Diese Typklassen-Hierarchie entspricht der base-Library Version 4.13 (GHC 8.8.3)
Änderungen:

- Neu: Semigroup, Monoid, Foldable, Traversable, Applicative, MonadFail
- Klassenbeziehung
Functor → Applicative → Monad → MonadFail
- Beziehung Num, Eq, Show geändert

Automatisches Ableiten von Instanzen

- Mit Schlüsselwort deriving nach der data-Deklaration
- Compiler generiert automatisch Typklasseninstanz
- Anzeigen mit `--dump-deriv`

Beispiel:

```
Prelude> :set --dump-deriv
Prelude> data WW = Wahr | Falsch deriving (Eq)
```

```
===== Derived instances =====
Derived class instances:
instance GHC.Classes.Eq Ghci1.WW where
  (GHC.Classes.==) (Ghci1.Wahr) (Ghci1.Wahr) = GHC.Types.True
  (GHC.Classes.==) (Ghci1.Falsch) (Ghci1.Falsch) = GHC.Types.True
  (GHC.Classes.==) _ _ = GHC.Types.False
```

Semigroup

- Halbgruppe: Menge mit binärer assoziativer Verknüpfung
- In Haskell: Typklasse Semigroup

```
class Semigroup a where
  (<>) :: a -> a -> a      -- should be associative
  stimes :: Integral n => n -> a -> a -- fails for n<1
  sconcat :: NonEmpty a -> a
```

- Es genügt die Operation <> zu definieren.
- Es muss gelten: $x \langle y \rangle z == (x \langle y \rangle) \langle z \rangle$
- `stimes n a` erzeugt

$$\underbrace{a \langle a \rangle \dots \langle a}_{n \text{ viele } a}$$

- `sconcat` konkateniert eine nicht-leere Liste von Werten, durch Verknüpfung mit <>
- `data NonEmpty a = a :| [a]`.

Semigroup: Beispiel Minimum-Operation

```
newtype Min a = Min a
getMin :: Min a -> a
getMin (Min x) = x
```

```
instance Ord a => Semigroup (Min a) where
  Min a <> Min b = Min (min a b)
```

Einige Beispielaufufe:

```
*> getMin (Min 7 <> Min 8 <> Min 10 <> Min 3)
3
> getMin $ sconcat $ (Min 4):| (map Min [1,2,3,4,10,-1,2,3])
-1
```

Monoid

- Monoid = Menge mit binärer assoziativer Verknüpfung \otimes und neutralem Element 1 ($1 \otimes m = m = m \otimes 1$)
- Monoid = Halbgruppe mit neutralem Element
- In Haskell: Klassen Monoid

```
class Semigroup a => Monoid a where
  mempty :: a          -- neutrales Element
  mappend :: a -> a -> a -- Verknuepfung
  mappend = (<>)
  mconcat :: [a] -> a
  mconcat = foldr mappend mempty
```

Beachte:

- Monoid ist erst ab GHC 8.4.x eine Unterklasse von Semigroup.
- Vorher: unabhängig und Monoid forderte zusätzlich, dass `mappend` assoziativ ist.
- Wenn man bei Monoid-Instanzen `import Data.Semigroup` und explizit `mappend = (<>)` hinschreibt, dann geht es mit beiden Versionen.

Monoid: Listen

```
instance Semigroup [a] where
  -- (<>) :: [a] -> [a] -> [a]
  (<>) = (++)
instance Monoid [a] where
  -- mempty :: [a]
  mempty = []
```

Gesetze gelten: Nachrechnen, wobei man für endliche Listen Induktion verwenden kann, für unendliche Listen andere Methoden braucht (z.B. Co-Induktion).

Beispiele:

```
> [1,2,3] <> mempty <> [4,5,6]
[1,2,3,4,5,6]
> Just [1,2,3] <> Just [4,5,6]
Just [1,2,3,4,5,6]
> Nothing <> Just [4,5,6]
Just [4,5,6]
```

Monoid: Maybe

```
instance Semigroup a => Semigroup (Maybe a) where
  Nothing <> my      = my
  mx      <> Nothing = mx
  Just x  <> Just y  = Just (x <> y)
```

```
instance Semigroup a => Monoid (Maybe a) where
  mempty = Nothing
```

Wiederum kann man nachrechnen, dass die Gesetze gelten.

Interessant: Es genügt Semigroup für den verpackten Typ zu fordern, neutrale Elemente werden auf diesem Typ nicht benötigt.

Monoid: Paare

```
instance (Semigroup a, Semigroup b) =>
  Semigroup (a, b) where
  (a,b) <> (a',b') = (a<>a', b<>b')
```

```
instance (Monoid a, Monoid b) => Monoid (a,b) where
  mempty = (mempty, mempty)
```

Monoid: Zahlen

Auch Zahlen bilden Monoide:

Additives Monoid $(+, 0)$: Es gilt $(x + y) + z = x + (y + z)$

Multiplikatives Monoid $(\cdot, 1)$: Es gilt $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

D.h. man kann zwei Instanzen angeben. In der Haskell-Standardbibliothek:

```
newtype Sum a      = Sum      { getSum :: a }
newtype Product a = Product { getProduct :: a }
```

```
instance Num a => Semigroup (Sum a)      where
  Sum x <> Sum y = Sum (x+y)
```

```
instance Num a => Semigroup (Product a) where
  Product x <> Product y = Product (x*y)
```

```
instance Num a => Monoid (Sum a)      where mempty = Sum 0
```

```
instance Num a => Monoid (Product a) where mempty = Product 1
```

```
Sum {getSum = 55}
> mconcat $ map Product [1..10]
Product {getProduct = 3628800}
```

Monoid: Funktionen

Auch Funktionen bilden mit der Operation der Funktionskomposition ein Monoid.

```
newtype Endo a = Endo { appEndo :: a -> a }
instance Semigroup (Endo a) where
  Endo f <> Endo g = Endo (f . g)
instance Monoid (Endo a) where
  mempty = Endo id
```

Beispiel:

```
> let f= mconcat $ map Endo [(4+),(10*),succ,max 1,\n -> n*n+1]
> appEndo f 1
34
```

Bemerkung: Ein Endomorphismus eine 1-stellige-Abbildung in sich selbst (also eine Funktion mit Haskell-Typ $a \rightarrow a$).

Foldable

Klasse Foldable

Typen, die sich falten lassen (Verallgemeinerung von Listen)

```
class Foldable t where {-# MINIMAL foldMap | foldr #-}
  fold      :: Monoid m => t m -> m
  foldMap   :: Monoid m => (a -> m) -> t a -> m
  foldMap'  :: Monoid m => (a -> m) -> t a -> m
  foldr     :: (a -> b -> b) -> b -> t a -> b
  foldr'    :: (a -> b -> b) -> b -> t a -> b
  foldl     :: (b -> a -> b) -> b -> t a -> b
  foldl'    :: (b -> a -> b) -> b -> t a -> b
  toList    :: t a -> [a]
  null      :: t a -> Bool
  length    :: t a -> Int
  elem      :: Eq a => a -> t a -> Bool
  sum, product :: Num a => t a -> a
  foldr1    :: (a -> a -> a) -> t a -> a
  foldl1    :: (a -> a -> a) -> t a -> a
```

Klasse Foldable (2)

Default-Implementierungen für fold und foldMap:

```
-- Combine the elements of a structure using a monoid.
fold :: Monoid m => t m -> m
fold = foldMap id

-- Map each element of the structure to a monoid, and combine the results.
foldMap :: Monoid m => (a -> m) -> t a -> m
foldMap f = foldr (mappend . f) mempty
```

Beispiele zur Verwendung:

```
*> import Data.Foldable
*> import Data.Monoid
*> fold [Product 1, Product 2, Product 3]
Product {getProduct = 6}
*> foldMap Product [2,3,4]
Product {getProduct = 24}
*> foldMap Sum [2,3,4]
Sum {getSum = 9}
*> fold [[1,2,3],[3,4,5],[5,6,7]]
[1,2,3,3,4,5,5,6,7]
*> foldMap (++ " ") ["H","A","L","L","O"]
"H A L L O "
```

Klasse Foldable (3)

Gesetze:

- Identität: `fold == foldMap id`
- Funktoren-Komposition: `foldMap f . fmap g == foldMap (f . g)`
- Gesetze für foldMap und foldr/foldl: `foldr f z t == foldMap`

Auflösung der Überladung

Wie kodiert man Typklassen wieder weg?

Auflösung der Überladung

- Irgendwann muss die richtige Implementierung für eine überladene Funktion benutzt werden
- **Early Binding**: Auflösung zur Compilezeit
- **Late Binding**: Auflösung zur Laufzeit

Zur Erinnerung:

- Parametrisch polymorph: Implementierung ist **unabhängig von den konkreten Typen**
- Ad hoc polymorph (Typklassen): Implementierung ist **abhängig von den konkreten Typen**

Auflösung der Überladung in Haskell

- Es gibt **keine Typinformation zur Laufzeit**
⇒ Auflösung zur Compilezeit
- Auflösung benötigt Typinformation, daher Auflösung zusammen mit dem Typcheck.
- Typen-Ersatz für Late Binding:
Datenstruktur die „Typinformation“ enthält

Auflösung der Überladung

Unser Vorgehen zur Transformation in Kernsprache:

- Wir nehmen an, Typinformation, auch für Unterausdrücke, ist vorhanden
- Wir trennen jedoch Auflösung und Typcheck (Typberechnung), d.h. wir behandeln erstmal nur die Auflösung durch Übersetzung

Auflösung der Überladung (2)

Wir machen das anhand von Beispielen:

Auflösung von Eq

```
class Eq a where
  (==), (/=) :: a -> a -> Bool
  x /= y = not (x == y)
  x == y = not (x /= y)
```

- Anstelle der Typklasse tritt eine **Datentypdefinition**:
- Dieser **Dictionary**-Datentyp ist ein **Produkttyp (record)**, der für jede Klassenmethode eine Komponente erhält.

```
data EqDict a = EqDict {
  eqEq :: a -> a -> Bool, -- f"ur ==
  eqNeq :: a -> a -> Bool -- f"ur /=
}
```

Auflösung der Überladung (3)

Methoden bzw. Operatoren - Implementierungen:

- Sie werden als „normale“ Funktionen implementiert
- und erhalten als **zusätzliches** Argument ein Dictionary (also ein Tupel der Klassenfunktion-Implementierungen)

Anstelle der überladenen Operatoren:

Implementierung von ==

```
overloadedeq :: EqDict a -> a -> a -> Bool
overloadedeq dict a b = eqEq dict a b
```

Implementierung von /=

```
overloadedneq :: EqDict a -> a -> a -> Bool
overloadedneq dict a b = eqNeq dict a b
```

Auflösung der Überladung (4)

Beachte bei der Übersetzung: aus

```
(==) :: Eq a => a -> a -> Bool
```

wird:

```
overloadedeq :: EqDict a -> a -> a -> Bool
```

Überladene Funktionen können nun durch zusätzliche Dictionary-Parameter angepasst werden:

Beispiel:

```
elem :: (Eq a) => a -> [a] -> Bool
elem e [] = False
elem e (x:xs)
  | e == x = True
  | otherwise = elem e xs

elemEq :: EqDict a -> a -> [a] -> Bool
elemEq dict e [] = False
elemEq dict e (x:xs)
  | (eqEq dict) e x = True
  | otherwise = elemEq dict e xs
```

Auflösung der Überladung (5)

Bei konkreten Typen müssen jedoch die konkreten Dictionaries eingesetzt werden

Z.B. aus

```
... True == False ...
```

wird

```
... overloadedeq eqDictBool True False
```

Auflösung der Überladung

Beispiel:

Aus

```
instance Eq Bool where
  True == True = True
  False == False = True
  _ == _ = False
```

wird

```
eqDictBool = EqDict {eqEq = eqBool, eqNeq = default_eqNeq}
```

und

```
eqBool True True = True
eqBool False False = True
eqBool _ _ = False
```

Auflösung der Überladung: Grundtypen

Übersetzung: `True == True`

Typ von `==` ist hier `Bool -> Bool -> Bool`

wird zu

```
overloadedeq eqDictBool True True
```

Das kann man durch Auswerten (zur Compilezeit) weiter vereinfachen:

```
eqEq eqDictBool True True
```

und zu

```
eqBool True True
```

Ergebnis: early binding bei bekanntem Grundtyp

Auflösung der Überladung: Eq auf Listen

```
instance Eq a => Eq [a] where
  ....
  x:xs == y:ys = x == y && xs == ys
```

wird als Funktion übersetzt: `dict` für Elemente \mapsto `dict` für Liste

```
eqDictList:: EqDict a -> EqDict [a]
eqDictList dict = EqDict {eqEq = eqList dict,
                          eqNeq = default_eqNeq (eqDictList dict)} where

eqList .... =
eqList dict (x:xs) (y:ys)
  = overloadedeq dict x y && overloadedeq (eqDictList dict) xs ys
```

Auflösung der Überladung: Defaults

Default-Implementierungen:

falls Klassenmethoden nicht bei `instance` überschrieben wurden:

Hier für die `Eq`-Typklasse

```
-- Default-Implementierung f"ur ==:
default_eqEq eqDict x y = not (eqNeq eqDict x y)
```

```
-- Default-Implementierung f"ur /=:
default_eqNeq eqDict x y = not (eqEq eqDict x y)
```

Auflösung der Überladung (6)

Weitere Beispiele für konkrete Dictionaries

Aus der Instanzdefinition:

```
instance Eq Wochentag where
  Montag == Montag = True
  Dienstag == Dienstag = True
  Mittwoch == Mittwoch = True
  Donnerstag == Donnerstag = True
  Freitag == Freitag = True
  Samstag == Samstag = True
  Sonntag == Sonntag = True
  _ == _ = False

eqDictWochentag :: EqDict Wochentag
eqDictWochentag =
  EqDict {
    eqEq = eqW,
    eqNeq = default_eqNeq eqDictWochentag
  }
  where eqW Montag Montag = True
        eqW Dienstag Dienstag = True
        eqW Mittwoch Mittwoch = True
        eqW Donnerstag Donnerstag = True
        eqW Freitag Freitag = True
        eqW Samstag Samstag = True
        eqW Sonntag Sonntag = True
        eqW _ _ = False
```

⇒

Beachte die Verwendung der Default-Implementierung für eqNeq

Auflösung der Überladung (7)

Eq-Dictionary für Ordering

```
instance Eq Ordering where
  LT == LT = True
  EQ == EQ = True
  GT == GT = True
  _ == _ = False

eqDictOrdering :: EqDict Ordering
eqDictOrdering =
  EqDict {
    eqEq = eqOrdering,
    eqNeq = default_eqNeq eqDictOrdering
  }
  where eqOrdering LT LT = True
        eqOrdering EQ EQ = True
        eqOrdering GT GT = True
        eqOrdering _ _ = False
```

⇒

Auflösung der Überladung (8)

Instanzen mit Klassenbeschränkungen:

```
instance Eq a => Eq (BBaum a) where
  Blatt a == Blatt b = a == b
  Knoten l1 r1 == Knoten l2 r2 = l1 == l2 && r1 == r2
  _ == _ = False
```

Auflösung: das Dictionary für BBaum a ist eine Funktion, die das Dictionary für a erhält:

```
eqDictBBaum :: EqDict a -> EqDict (BBaum a)
eqDictBBaum dict = EqDict {
  eqEq = eqBBaum dict,
  eqNeq = default_eqNeq (eqDictBBaum dict)
}

where eqBBaum dict (Blatt a) (Blatt b) =
  overloadedeq dict a b -- hier Eq-Dictionary f"ur dict
eqBBaum dict (Knoten l1 r1) (Knoten l2 r2) =
  eqBBaum dict l1 l2 && eqBBaum dict r1 r2
eqBBaum dict x y = False
```

Auflösung der Überladung (9)

Auflösung bei **Unterklassen**: Der Datentyp enthält die Dictionaries der Oberklassen

```
class (Eq a) => Ord a where
  compare :: a -> a -> Ordering
  (<), (<=),
  (>=), (>) :: a -> a -> Bool
  max, min :: a -> a -> a

data OrdDict a =
  OrdDict {
    eqDict :: EqDict a, -- Dictionary
    -- der Oberklasse
    ordCompare :: a -> a -> Ordering,
    ordL :: a -> a -> Bool,
    ordLT :: a -> a -> Bool,
    ordGT :: a -> a -> Bool,
    ordG :: a -> a -> Bool,
    ordMax :: a -> a -> a,
    ordMin :: a -> a -> a
  }

compare x y | x == y = EQ
            | x <= y = LT
            | otherwise = GT

x <= y = compare x y /= GT
x < y = compare x y == LT
x >= y = compare x y /= LT
x > y = compare x y == GT

max x y | x <= y = y
        | otherwise = x
min x y | x <= y = x
        | otherwise = y
```

⇒

Auflösung der Überladung (10)

Übersetzung der Default-Implementierungen:

```
compare x y | x == y = EQ
            | x <= y = LT
            | otherwise = GT
⇒
default_ordCompare dictOrd x y
  | (eqEq (eqDict dictOrd)) x y = EQ
  | (ordLT dictOrd) x y         = LT
  | otherwise                   = GT

x <= y = compare x y /= GT
⇒
default_ordLT dictOrd x y =
  let compare = (ordCompare dictOrd)
      nequal = eqNeq (eqDictOrdering)
  in (compare x y) `nequal` GT

x < y = compare x y == LT
⇒
default_ordL dictOrd x y =
  let compare = (ordCompare dictOrd)
      equal = eqEq eqDictOrdering
  in (compare x y) `equal` LT

USW.
```

Auflösung der Überladung (11)

Ord-Dictionary für Wochentag:

```
instance Ord Wochentag where
  a <= b = (a,b) `elem` [(a,b) | i <- [0..6], let a = ys!!i, b <- drop i ys]
  where ys = [Montag,Dienstag,Mittwoch,Donnerstag,Freitag,Samstag,Sonntag]
⇒

ordDictWochentag = OrdDict {
  eqDict = eqDictWochentag,
  ordCompare = default_ordCompare ordDictWochentag,
  ordL = default_ordL ordDictWochentag,
  ordLT = wt_lt,
  ordGT = default_ordGT ordDictWochentag,
  ordG = default_ordG ordDictWochentag,
  ordMax = default_ordMax ordDictWochentag,
  ordMin = default_ordMin ordDictWochentag
}
where
  wt_lt a b = (a,b) `elem` [(a,b) | i <- [0..6], let a = ys!!i, b <- drop i ys]
  ys = [Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag, Samstag, Sonntag]
```

Auflösung der Überladung (11)

Konstruktorklassen:

```
class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> f a -> f b
```

Typvariablen a und b müssen dem Dictionary hinzugefügt werden:

```
data FunctorDict a b f = FunctorDict {
  functorFmap :: (a -> b) -> f a -> f b}
```

Die überladene fmap-Funktion nach der Übersetzung:
(kein gültiger polymorpher Typ, aber Haskell-Typ)

```
overloaded_fmap :: (FunctorDict a b f) -> (a -> b) -> f a -> f b
overloaded_fmap dict = functorFmap dict
```

Instanz für BBAum:

```
functorDictBBAum = FunctorDict {functorFmap = bMap}
```

Erweiterung von Typklassen

Multiparameter Klassen

- Haskell erlaubt nur eine „Kind“-Variable in der Klassendeklaration
- Multiparameter-Klassen erlauben auch mehrere „Kind“-Variablen, z.B.

```
class Indexed c a i where
  sub :: c -> i -> a
  idx :: c -> a -> Maybe i
```

- Überlappende bzw. flexible Instanzen sind in Haskell verboten:

```
instance Eq (Bool,Bool) where
  (a,b) == (c,d) = ...
```

- Funktionale Abhängigkeiten

```
class MyClass a b | a -> b where
```

bedeutet in etwa: Der Typ b wird durch den Typ a bestimmt.

Problem fast aller Erweiterungen: **Typsystem wird unentscheidbar!**