

## Der CHF-Kalkül als Modell für Concurrent Haskell

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik



- 1 Der CHF-Kalkül
  - Syntax
  - Typisierung
  - Semantik
  - Fairness
  - Gleichheit

- CHF = Concurrent Haskell erweitert um (implizite) Futures
- Shared Memory Modell
- Speicher vorhanden durch MVars
- Futures = Nebenläufige Threads mit Rückgabewert
- Wie in Haskell: Seiteneffekte durch IO-Monade

# Der CHF-Kalkül: Syntax

- Zweistufige Syntax: Oben Prozesskomponenten, unten (funktionale) Ausdrücke
- Prozesse  $P \in Proc$ :

$P, P_i \in Proc$	$::=$	$P_1 \mid P_2$	parallele Komposition
		$\nu x.P$	Namensbeschränkung
		$x \leftarrow e$	nebenl. Thread (Future $x$ )
		$x = e$	globale Bindung
		$x \mathbf{m} e$	gefüllte MVar
		$x \mathbf{m} -$	leere MVar

- Dabei:  $x$  Variable,  $e$  Ausdruck
- Ein Spezialthread möglich  $x \xleftarrow{\text{main}} e$  der [Main-Thread](#)

Es gibt Datenkonstruktoren  $c_{T,i}$

- $T$  ist der zugehörige Typkonstruktor (z.B. Bool, List, etc.)
- Pro Typ gibt es Konstruktoren  $c_{T,1}, \dots, c_{T,|T|}$  (z.B. True, False)
- Konstruktoren haben eine feste **Stelligkeit**  $ar(c_{T,i}) \in \mathbb{N}_0$
- Konstruktoren dürfen nur **gesättigt** auftreten:  $(c_{T,i} e_1 \dots e_{ar(c_{T,i})})$
- Annahme: Es gibt Typ  $()$  mit nullstelligem Konstruktor  $()$

## Funktionale Ausdrücke

$e, e_i \in \text{Exp} ::= x$	Variable
$me$	monad. Ausdruck
$\lambda x.e$	Abstraktion
$(e_1 e_2)$	Anwendung
$c e_1 \dots e_{\text{ar}(c)}$	Konstruktoranw.
$\text{seq } e_1 e_2$	seq-Ausdruck
$\text{letrec } x_1 = e_1, \dots, x_n = e_n \text{ in } e$	letrec-Ausdruck
$\text{case}_T e \text{ of } (c_{T,1} x_1 \dots x_{\text{ar}(c_{T,1})} \rightarrow e_1)$	case-Ausdruck
$\dots$	
$(c_{T, T } x_1 \dots x_{\text{ar}(c_{T, T })} \rightarrow e_{ T })$	

## Monadische Ausdrücke

$me \in \text{MExp} ::= \text{return } e \mid e_1 \gg e_2 \mid \text{future } e$   
|  $\text{takeMVar } e \mid \text{newMVar } e \mid \text{putMVar } e_1 e_2$

# Nebenbedingungen

$$\text{case}_T e \text{ of } \overbrace{(c_{T,1} x_1 \dots x_{ar(c_{T,1})} \rightarrow e_1)}^{\text{case-Alternative}}$$

...

$$\underbrace{(c_{T,|T|} x_1 \dots x_{ar(c_{T,|T|})} \rightarrow e_{|T|})}_{\text{Pattern}}$$

- Nur Variablen im Pattern erlaubt
- Variablen müssen paarweise verschieden sein.
- Pro  $c_{T,i}$  genau eine Alternative

$$\text{letrec } \underbrace{x_1 = e_1, \dots, x_n = e_n}_{\text{letrec-Bindung}} \text{ in } \underbrace{e}_{\text{in-Ausdruck}}$$

- Bindungsbereich von  $x_i$ : Alle  $e_i$  und  $e$
- Alle  $x_i$  müssen paarweise verschieden sein.

# Wohlgeformtheit, Strukturelle Kongruenz

- **Eingeführte Variablen:** der Name eines Threads, der Name einer MVar, die linke Seite einer Bindung
- Ein Prozess ist **wohlgeformt** gdw. alle eingeführten Variablen paarweise verschieden sind und es maximal einen Main-Thread gibt.

## Strukturelle Kongruenz

$\equiv$  ist die kleinste Kongruenz auf Prozessen, die die Regeln erfüllt:

$$\begin{aligned}P_1 \mid P_2 &\equiv P_2 \mid P_1 \\P_1 \mid (P_2 \mid P_3) &\equiv (P_1 \mid P_2) \mid P_3 \\(\nu x.P_1) \mid P_2 &\equiv \nu x.(P_1 \mid P_2), \text{ falls } x \notin FV(P_2) \\ \nu x_1.\nu x_2.P &\equiv \nu x_2.\nu x_1.P \\P_1 &\equiv P_2, \text{ falls } P_1 \text{ und } P_2 \text{ } \alpha\text{-äquivalente } (P_1 =_\alpha P_2)\end{aligned}$$



- CHF ist **monomorph** typisiert
- $\tau, \tau_i \in \mathit{Typ} ::= \mathit{IO} \ \tau \mid (T \ \tau_1 \dots \tau_{\mathit{ar}(T)}) \mid \mathit{MVar} \ \tau \mid \tau_1 \rightarrow \tau_2$
- Konstruktoren werden wie polymorph behandelt: `Cons :: List Bool`, `Cons :: List (List Bool)` etc.
- Monadische Operatoren werden ebenfalls mit mehreren Typen verwendet.
- Annahme: Variablen  $x$  haben einen eingebauten Typ  $\Gamma(x) \in \mathit{Typ}$
- $\Gamma \vdash P :: \mathit{wt}$  gdw. Prozess  $P$  ist wohlgetypt
- $\Gamma \vdash e :: \tau$  gdw. Ausdruck  $e$  ist wohlgetypt mit Typ  $\tau$ .

## Typisierung (2)

Einige Typisierungsregeln

$$\frac{\Gamma \vdash P_1 :: \text{wt}, \Gamma \vdash P_2 :: \text{wt}}{\Gamma \vdash P_1 \mid P_2 :: \text{wt}} \quad \frac{\Gamma \vdash P :: \text{wt}}{\Gamma \vdash \nu x.P :: \text{wt}} \quad \frac{\Gamma \vdash x :: \tau, \Gamma \vdash e :: \text{IO } \tau}{\Gamma \vdash x \leftarrow e :: \text{wt}}$$
$$\frac{\Gamma \vdash x :: \tau, \Gamma \vdash e :: \tau}{\Gamma \vdash x = e :: \text{wt}} \quad \frac{\Gamma \vdash x :: \text{MVar } \tau, \Gamma \vdash e :: \tau}{\Gamma \vdash x \mathbf{m} e :: \text{wt}} \quad \frac{\Gamma \vdash x :: \text{MVar } \tau}{\Gamma \vdash x \mathbf{m} - :: \text{wt}}$$
$$\frac{\Gamma \vdash e :: \tau}{\Gamma \vdash \mathbf{return } e :: \text{IO } \tau} \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 :: \text{IO } \tau_1, \Gamma \vdash e_2 :: \tau_1 \rightarrow \text{IO } \tau_2}{\Gamma \vdash e_1 \gg e_2 :: \text{IO } \tau_2}$$
$$\frac{\Gamma \vdash e :: \text{IO } \tau}{\Gamma \vdash \mathbf{future } e :: \text{IO } \tau} \quad \frac{\Gamma \vdash e :: \text{MVar } \tau}{\Gamma \vdash \mathbf{takeMVar } e :: \text{IO } \tau}$$
$$\frac{\Gamma \vdash e_1 :: \text{MVar } \tau, \Gamma \vdash e_2 :: \tau}{\Gamma \vdash \mathbf{putMVar } e_1 e_2 :: \text{IO } ()} \quad \frac{\Gamma \vdash e :: \tau}{\Gamma \vdash \mathbf{newMVar } e :: \text{IO } (\text{MVar } \tau)}$$

## Typisierung: Beispiele

---

$$\frac{\frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}, \frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}}{\Gamma \vdash (\lambda x.x) :: \tau \rightarrow \tau}$$

# Typisierung: Beispiele

$$\frac{\frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}, \frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}}{\Gamma \vdash (\lambda x.x) :: \tau \rightarrow \tau}$$

$$\frac{\frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}, \frac{\frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}, \frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}}{\Gamma \vdash (x x) :: ?}}{\lambda x.(x x) :: \tau \rightarrow ?}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 :: \tau_1 \rightarrow \tau_2, \Gamma \vdash e_2 :: \tau_1}{\Gamma \vdash (e_1 e_2) :: \tau_2}$$

## Typisierung: Beispiele

$$\frac{\frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}, \frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}}{\Gamma \vdash (\lambda x.x) :: \tau \rightarrow \tau}$$

$$\frac{\frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}, \frac{\frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}, \frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}}{\Gamma \vdash (x x) :: ?}}{\Gamma \vdash \lambda x.(x x) :: \tau \rightarrow ?} \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 :: \tau_1 \rightarrow \tau_2, \Gamma \vdash e_2 :: \tau_1}{\Gamma \vdash (e_1 e_2) :: \tau_2}$$

$id = \lambda x.x \mid y = id \text{ True} \mid z = id \text{ Nil}$

## Typisierung: Beispiele

$$\frac{\frac{\Gamma(x) = \tau \quad \Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}, \frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}}{\Gamma \vdash (\lambda x.x) :: \tau \rightarrow \tau}$$

$$\frac{\frac{\Gamma(x) = \tau \quad \Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}, \frac{\Gamma(x) = \tau \quad \Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau, \Gamma \vdash x :: \tau}}{\Gamma \vdash x :: \tau, (x \ x) :: ?} \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 :: \tau_1 \rightarrow \tau_2, \Gamma \vdash e_2 :: \tau_1}{\Gamma \vdash (e_1 \ e_2) :: \tau_2}$$

$\lambda x.(x \ x) :: \tau \rightarrow ?$

$$id = \underbrace{\lambda x.x}_{\tau \rightarrow \tau} \mid y = \underbrace{id}_{\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}} \text{ True} \mid z = \underbrace{id}_{\text{List } \tau \rightarrow \text{List } \tau} \text{ Nil}$$

## Typisierung: Beispiele

$$\frac{\frac{\Gamma(x) = \tau \quad \Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}, \frac{\Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}}{\Gamma \vdash (\lambda x.x) :: \tau \rightarrow \tau}$$

$$\frac{\frac{\Gamma(x) = \tau \quad \Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau}, \frac{\Gamma(x) = \tau \quad \Gamma(x) = \tau}{\Gamma \vdash x :: \tau, \Gamma \vdash x :: \tau}}{\Gamma \vdash x :: \tau, (x \ x) :: ?} \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 :: \tau_1 \rightarrow \tau_2, \Gamma \vdash e_2 :: \tau_1}{\Gamma \vdash (e_1 \ e_2) :: \tau_2}$$
$$\frac{}{\lambda x.(x \ x) :: \tau \rightarrow ?}$$

$$id = \underbrace{\lambda x.x}_{\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}} \mid id' = \underbrace{\lambda x'.x'}_{\text{List } \tau \rightarrow \text{List } \tau} \mid y = \underbrace{id}_{\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}} \text{ True} \mid z = \underbrace{id'}_{\text{List } \tau \rightarrow \text{List } \tau} \text{ Nil}$$

## Prozesskontexte:

$$\mathbb{D} \in PC ::= [\cdot] \mid \mathbb{D} \mid P \mid P \mid \mathbb{D} \mid \nu x.\mathbb{D}$$

## Monadische Kontexte:

$$\mathbb{M} \in MC ::= [\cdot] \mid \mathbb{M} \gg e$$

## Evaluations- und Forcingkontexte

$$\mathbb{E} \in EC ::= [\cdot] \mid (\mathbb{E} e) \mid (\text{case } \mathbb{E} \text{ of } \textit{alts}) \mid (\text{seq } \mathbb{E} e)$$

$$\mathbb{F} \in FC ::= \mathbb{E} \mid (\text{takeMVar } \mathbb{E}) \mid (\text{putMVar } \mathbb{E} e)$$



$$\begin{aligned} \mathbb{L} \in LC &::= x \leftarrow \mathbb{M}[\mathbb{F}] \\ &| x \leftarrow \mathbb{M}[\mathbb{F}[x_n]] \mid x_n = \mathbb{E}_n[x_{n-1}] \mid \dots \mid x_2 = \mathbb{E}_2[x_1] \mid x_1 = \mathbb{E}_1 \\ &\text{wobei } \mathbb{E}_2, \dots, \mathbb{E}_n \text{ nicht der leere Kontext sind.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{L}} \in \widehat{LC} &::= x \leftarrow \mathbb{M}[\mathbb{F}] \\ &| x \leftarrow \mathbb{M}[\mathbb{F}[x_n]] \mid x_n = \mathbb{E}_n[x_{n-1}] \mid \dots \mid x_2 = \mathbb{E}_2[x_1] \mid x_1 = \mathbb{E}_1 \\ &\text{wobei } \mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \dots, \mathbb{E}_n \text{ nicht der leere Kontext sind.} \end{aligned}$$

## Monadische Berechnungen:

$$(CHF, \text{lunit}) \quad y \Leftarrow \mathbb{M}[\text{return } e_1 \gg e_2] \xrightarrow{CHF} y \Leftarrow \mathbb{M}[e_2 \ e_1]$$

$$(CHF, \text{tmvar}) \quad y \Leftarrow \mathbb{M}[\text{takeMVar } x] \mid x \ \mathbf{m} \ e \xrightarrow{CHF} y \Leftarrow \mathbb{M}[\text{return } e] \mid x \ \mathbf{m} \ -$$

$$(CHF, \text{pmvar}) \quad y \Leftarrow \mathbb{M}[\text{putMVar } x \ e] \mid x \ \mathbf{m} \ - \xrightarrow{CHF} y \Leftarrow \mathbb{M}[\text{return } ()] \mid x \ \mathbf{m} \ e$$

$$(CHF, \text{nmvar}) \quad y \Leftarrow \mathbb{M}[\text{newMVar } e] \xrightarrow{CHF} \nu x. (y \Leftarrow \mathbb{M}[\text{return } x] \mid x \ \mathbf{m} \ e)$$

$$(CHF, \text{fork}) \quad y \Leftarrow \mathbb{M}[\text{future } e] \xrightarrow{CHF} \nu z. (y \Leftarrow \mathbb{M}[\text{return } z] \mid z \Leftarrow e)$$

wobei  $z$  ein neuer Name ist und der erzeugte Thread kein Main-Thread ist

$$(CHF, \text{unIO}) \quad y \Leftarrow \text{return } e \xrightarrow{CHF} y = e,$$

wenn Thread  $y$  kein Main-Thread ist

## Standardreduktion $\xrightarrow{CHF}$ (2)

### Funktionale Auswertung:

$$(CHF, cp) \quad \widehat{\mathbb{L}}[x] \mid x = v \xrightarrow{CHF} \widehat{\mathbb{L}}[v] \mid x = v,$$

falls  $v$  eine Abstraktion oder eine Variable ist

$$(CHF, cpcx) \quad \widehat{\mathbb{L}}[x] \mid x = c e_1 \dots e_n,$$
$$\xrightarrow{CHF} \nu y_1, \dots, y_n. (\widehat{\mathbb{L}}[c y_1 \dots y_n] \mid x = c y_1 \dots y_n \mid y_1 = e_1 \mid \dots \mid y_n = e_n)$$

falls  $c$  ein Konstruktor, oder ein monadischer Operator ist

$$(CHF, mkbinds) \quad \mathbb{L}[\text{letrec } x_1 = e_1, \dots, x_n = e_n \text{ in } e]$$
$$\xrightarrow{CHF} \nu x_1, \dots, x_n. (\mathbb{L}[e] \mid x_1 = e_1 \mid \dots \mid x_n = e_n)$$

$$(CHF, lbeta) \quad \mathbb{L}[(\lambda x. e_1) e_2] \xrightarrow{CHF} \nu x. (\mathbb{L}[e_1] \mid x = e_2)$$

$$(CHF, case) \quad \mathbb{L}[\text{case}_T (c e_1 \dots e_n) \text{ of } \dots (c y_1 \dots y_n \rightarrow e) \dots]$$
$$\xrightarrow{CHF} \nu y_1, \dots, y_n. (\mathbb{L}[e] \mid y_1 = e_1 \mid \dots \mid y_n = e_n)$$

$$(CHF, seq) \quad \mathbb{L}[(\text{seq } v e)] \xrightarrow{CHF} \mathbb{L}[e]$$

$$\frac{P_1 \equiv \mathbb{D}[P'_1], P_2 \equiv \mathbb{D}[P'_2] \text{ und } P'_1 \xrightarrow{CHF} P'_2}{P_1 \xrightarrow{CHF} P_2}$$

## Definition

Ein wohlgeformter Prozess  $P$  ist genau dann **erfolgreich**, wenn er von der Form  $\nu x_1, \dots, x_n. x \stackrel{\text{main}}{\longleftarrow} \text{return } e \mid P'$  ist.

- $\xrightarrow{CHF,+}$  bezeichnet die transitive Hülle von  $\xrightarrow{CHF}$  (eine oder mehr Reduktionen)
- $\xrightarrow{CHF,*}$  bezeichnet die reflexiv-transitive Hülle (null oder mehr Reduktionen)

## Definition

May-Konvergenz:

$P \Downarrow_{CHF}$  g.d.w.  $\exists P' : P \xrightarrow{CHF,*} P'$  und  $P'$  ist erfolgreich

Should-Konvergenz:

$P \Downarrow_{CHF}$  g.d.w.  $\forall P' : P \xrightarrow{CHF,*} P' \implies P' \Downarrow_{CHF}$

Must-Konvergenz:

$P$  should-konvergent

und es gibt keine unendlich lange Reduktion von  $P$  aus

# Should-Konvergenz $\neq$ Must-Konvergenz

## Beispiel

```
x  $\stackrel{\text{main}}{\longleftarrow}$  future (loopPut True)  $\gg$   $\lambda\_.$ future (loopPut False)  $\gg$   $\lambda\_.$ loop
| loop = takeMVar x  $\gg$ 
       $\lambda\_.$ takeMVar x  $\gg$ 
       $\lambda w.$ caseBool w of (True  $\rightarrow$  return True) (False  $\rightarrow$  loop)
| loopPut =  $\lambda z.$ putMVar x z  $\gg$   $\lambda\_.$ loopPut z
| x m -
```

# Should-Konvergenz $\neq$ Must-Konvergenz

Beispiel mit syntaktischem Zucker

```
 $x \stackrel{\text{main}}{\longleftarrow} \text{do future } (\text{loopPut True})$   
           $\text{future } (\text{loopPut False})$   
           $\text{loop}$ 
```

```
|  $\text{loop} = \text{do takeMVar } x$   
           $w \leftarrow \text{takeMVar } x$   
           $\text{if } w$   
           $\text{then return True}$   
           $\text{else loop}$ 
```

```
|  $\text{loopPut} = \lambda z. \text{do putMVar } x z$   
               $\text{loopPut } z$ 
```

```
|  $x \text{ m} -$ 
```



# Should-Konvergenz $\neq$ Must-Konvergenz

Beispiel mit syntaktischem Zucker

```
 $x \stackrel{\text{main}}{\longleftarrow} \text{do future } (\text{loopPut True}) \text{ Thread, der wiederh. True in MVar } x \text{ schreibt}$   
           $\text{future } (\text{loopPut False}) \text{ Thread, der wiederh. False in MVar } x \text{ schreibt}$   
           $\text{loop}$ 
```

```
|  $\text{loop} = \text{do takeMVar } x \text{ 1x Lesen}$   
           $w \leftarrow \text{takeMVar } x \text{ 1x Lesen}$   
          if  $w$  wenn True, dann terminiere, sonst von vorne  
          then return True  
          else  $\text{loop}$ 
```

```
|  $\text{loopPut} = \lambda z. \text{do putMVar } x \ z$   
                   $\text{loopPut } z$ 
```

```
|  $x \text{ m} -$ 
```

# Should-Konvergenz $\neq$ Must-Konvergenz

Beispiel mit syntaktischem Zucker

```
 $x \stackrel{\text{main}}{\longleftarrow}$  do future (loopPut True) Thread, der wiederh. True in MVar  $x$  schreibt  
      future (loopPut False) Thread, der wiederh. False in MVar  $x$  schreibt  
      loop
```

```
| loop = do takeMVar  $x$  1x Lesen  
            $w \leftarrow$  takeMVar  $x$  1x Lesen  
           if  $w$  wenn True, dann terminiere, sonst von vorne  
           then return True  
           else loop
```

```
| loopPut =  $\lambda z$ .do putMVar  $x$   $z$   
                  loopPut  $z$ 
```

```
|  $x$  m –
```

Prozess ist should-konvergent, aber nicht must-konvergent

# May- und Must-Divergenz

---

Must-Divergenz:  $P \uparrow_{CHF}$  gdw.  $\neg P \downarrow_{CHF}$

May-Divergenz:  $P \uparrow_{CHF}$  gdw.  $\neg P \downarrow_{CHF}$

## Satz

Für alle Prozesse  $P$  gilt:  $P \uparrow_{CHF} \iff \exists P' : P \xrightarrow{CHF,*} P' \wedge P' \uparrow_{CHF}$

**Kontextuelle Approximation:**  $P_1 \leq_{CHF} P_2$  gdw.  $P_1 \sqsubseteq_{CHF} P_2$  und  $P_1 \sqdownarrow_{CHF} P_2$ , wobei

$$\begin{aligned} P_1 \sqsubseteq_{CHF} P_2 & \text{ gdw. } \forall \mathbb{D} \in PC : \mathbb{D}[P_1] \downarrow_{CHF} \implies \mathbb{D}[P_2] \downarrow_{CHF} \\ P_1 \sqdownarrow_{CHF} P_2 & \text{ gdw. } \forall \mathbb{D} \in PC : \mathbb{D}[P_1] \downarrow_{CHF} \implies \mathbb{D}[P_2] \downarrow_{CHF} \end{aligned}$$

**Kontextuelle Gleichheit**  $\sim_{CHF}$  auf Prozessen:

$$P_1 \sim_{CHF} P_2 \text{ gdw. } P_1 \leq_{CHF} P_2 \text{ und } P_2 \leq_{CHF} P_1$$

# May-Konvergenz alleine reicht nicht

---

$P_1 := \nu z. (z \stackrel{\text{main}}{\leftarrow} \text{return True})$

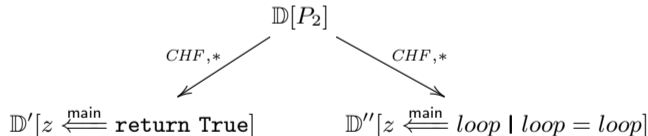
$P_2 := \nu x, z, y_1, y_2, \text{loop}.$

$(z \stackrel{\text{main}}{\leftarrow} \text{takeMVar } x \gg \lambda w. \text{case}_{\text{Bool}} w (\text{True} \rightarrow \text{return True}) (\text{False} \rightarrow \text{loop})$   
 $| \text{loop} = \text{loop} | y_1 \leftarrow \text{putMVar } x \text{ False} | y_2 \leftarrow \text{putMVar } x \text{ True} | x \mathbf{m} -)$

# May-Konvergenz alleine reicht nicht

$$P_1 := \nu z. (z \stackrel{\text{main}}{\leftarrow} \text{return True})$$
$$P_2 := \nu x, z, y_1, y_2, \text{loop}.$$
$$(z \stackrel{\text{main}}{\leftarrow} \text{takeMVar } x \gg \lambda w. \text{case}_{\text{Bool}} w (\text{True} \rightarrow \text{return True}) (\text{False} \rightarrow \text{loop}) \\ | \text{loop} = \text{loop} | y_1 \leftarrow \text{putMVar } x \text{ False} | y_2 \leftarrow \text{putMVar } x \text{ True} | x \mathbf{m} -)$$

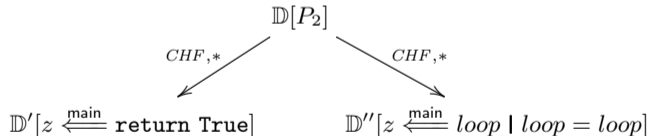
- $\mathbb{D}[P_1]$  ist für alle  $\mathbb{D}$  direkt erfolgreich
- Für  $\mathbb{D}[P_2]$  kann man zeigen:



# May-Konvergenz alleine reicht nicht

$$P_1 := \nu z. (z \stackrel{\text{main}}{\longleftarrow} \text{return True})$$
$$P_2 := \nu x, z, y_1, y_2, \text{loop}.$$
$$(z \stackrel{\text{main}}{\longleftarrow} \text{takeMVar } x \gg \lambda w. \text{case}_{\text{Bool}} w (\text{True} \rightarrow \text{return True}) (\text{False} \rightarrow \text{loop}) \\ | \text{loop} = \text{loop} | y_1 \leftarrow \text{putMVar } x \text{ False} | y_2 \leftarrow \text{putMVar } x \text{ True} | x \text{ m-})$$

- $\mathbb{D}[P_1]$  ist für alle  $\mathbb{D}$  direkt erfolgreich
- Für  $\mathbb{D}[P_2]$  kann man zeigen:



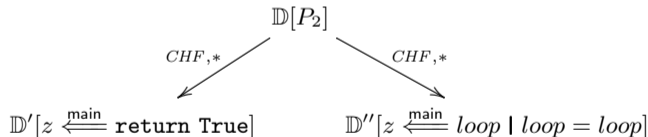
Daher gilt:

- Für alle  $\mathbb{D} \in PC$ :  $\mathbb{D}[P_1] \downarrow_{\text{CHF}} \iff \mathbb{D}[P_2] \downarrow_{\text{CHF}}$
- Aber:  $P_1 \downarrow_{\text{CHF}}$  während  $P_2 \uparrow_{\text{CHF}}$

# Should-Konvergenz alleine reicht nicht

$$P_1 := \nu z, \text{loop}. (z \stackrel{\text{main}}{\leftarrow} \text{loop}) \mid \text{loop} = \text{loop}$$
$$P_2 := \nu x, z, y_1, y_2, \text{loop}.$$
$$(z \stackrel{\text{main}}{\leftarrow} \text{takeMVar } x \gg \lambda w. \text{case}_{\text{Bool}} w (\text{True} \rightarrow \text{return True}) (\text{False} \rightarrow \text{loop}) \\ \mid \text{loop} = \text{loop} \mid y_1 \leftarrow \text{putMVar } x \text{ False} \mid y_2 \leftarrow \text{putMVar } x \text{ True} \mid x \mathbf{m} -)$$

- $\mathbb{D}[P_1]$  ist für alle  $\mathbb{D}$  **must-divergent**
- Für  $\mathbb{D}[P_2]$  kann man zeigen:

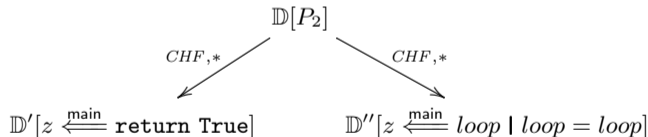




# Should-Konvergenz alleine reicht nicht

$$P_1 := \nu z, loop. (z \stackrel{\text{main}}{\leftarrow} loop) \mid loop = loop$$
$$P_2 := \nu x, z, y_1, y_2, loop.$$
$$(z \stackrel{\text{main}}{\leftarrow} \text{takeMVar } x \gg \lambda w. \text{case}_{\text{Bool}} w (\text{True} \rightarrow \text{return True}) (\text{False} \rightarrow loop) \\ \mid loop = loop \mid y_1 \leftarrow \text{putMVar } x \text{ False} \mid y_2 \leftarrow \text{putMVar } x \text{ True} \mid x \text{ m-})$$

- $\mathbb{D}[P_1]$  ist für alle  $\mathbb{D}$  **must-divergent**
- Für  $\mathbb{D}[P_2]$  kann man zeigen:



Daher gilt:

- Für alle  $\mathbb{D} \in PC$ :  $\mathbb{D}[P_1] \Downarrow_{CHF} \iff \mathbb{D}[P_2] \Downarrow_{CHF}$
- Aber:  $P_1 \Uparrow_{CHF}$  während  $P_2 \Downarrow_{CHF}$

Die Reduktion  $\xrightarrow{CHF}$  beachtet keine Fairness.

Beispiel:

$$\begin{array}{l} x \xleftarrow{\text{main}} \text{takeMVar } z \mid z \mathbf{m} \text{ True} \mid y \leftarrow \text{loop} \mid \text{loop} = \text{loop} \\ \xrightarrow{CHF, cp} x \xleftarrow{\text{main}} \text{takeMVar } z \mid z \mathbf{m} \text{ True} \mid y \leftarrow \text{loop} \mid \text{loop} = \text{loop} \\ \xrightarrow{CHF, cp} x \xleftarrow{\text{main}} \text{takeMVar } z \mid z \mathbf{m} \text{ True} \mid y \leftarrow \text{loop} \mid \text{loop} = \text{loop} \\ \xrightarrow{CHF, cp} x \xleftarrow{\text{main}} \text{takeMVar } z \mid z \mathbf{m} \text{ True} \mid y \leftarrow \text{loop} \mid \text{loop} = \text{loop} \\ \xrightarrow{CHF, cp} \dots \end{array}$$

**Ausführbarer Thread:** Für einen Prozess  $P \equiv \mathbb{D}[x \leftarrow e]$  ist der Thread  $x$  **ausführbar**, wenn es eine Reduktion  $P \xrightarrow{CHF} P'$  gibt, die entweder innerhalb des Ausdrucks  $e$  reduziert, oder eine Reduktion ausführt, an der Thread  $x$  beteiligt ist (z.B. eine MVar liest oder schreibt, oder in  $e$  wird der Wert einer Bindung kopiert).

### Definition

Für einen Prozess  $P$  ist die Reduktionsfolge  $S = P \xrightarrow{CHF} P_1 \xrightarrow{CHF} P_2 \dots$  **unfair**, wenn  $S$  einen unendlich langen Suffix  $S'$  hat, in dem ein Thread  $x$  unendlich oft ausführbar ist, aber niemals reduziert wird. Eine Reduktionsfolge ist **fair**, wenn sie nicht unfair ist.

## Fairness (3)

- Faire May-Konvergenz  $P \downarrow_{CHF,f}$  und Faire Should-Konvergenz  $P \Downarrow_{CHF,f}$
- Wie May-Konvergenz und Should-Konvergenz, aber nur faire Reduktionsfolgen sind erlaubt.

### Satz

$$\downarrow_{CHF} = \downarrow_{CHF,f} \quad \text{und} \quad \Downarrow_{CHF} = \Downarrow_{CHF,f}$$

Beweis: Siehe Skript

Vorteil: Wir brauchen uns um die Fairness nicht zu kümmern

### Theorem

Kontextuelle Äquivalenz in  $CHF$  bleibt unverändert, wenn unfaire Reduktionssequenzen verboten sind.

Resultat gilt **nicht** für die Must-Konvergenz!

- Eine **Programmtransformation**  $T$  ist eine binäre Relation auf Prozessen
- $T$  ist **korrekt**, gdw. für alle  $P, P' : P \xrightarrow{T} P' \implies P \sim_{CHF} P'$
- Korrektheit **widerlegen** ist eher einfach, da **ein** Kontext als Gegenbeispiel genügt
- Korrektheit **beweisen** ist eher schwierig, da **alle** Kontexte betrachtet werden müssen

## Satz

Der Nachweis und die Widerlegung der Korrektheit einer Programmtransformation ist **unentscheidbar**.

Beweis: Reduktion des Halteproblems: Die Aussage

$(P \not\sim_{CHF} x \xleftarrow{\text{main}} \text{letrec } y = y \text{ in } y)$  entspricht dem Halteproblem

## Ungleichheit - Beispiel

---

- $P_1 := x \leftarrow \text{return True}$
- $P_2 := x \leftarrow \text{return False}$
- $\mathbb{D} := [\cdot] \mid y \xleftarrow{\text{main}} \text{case}_{\text{Bool}} x$   
    (True  $\rightarrow$  returnTrue)  
    (False  $\rightarrow$  letrec  $w = w$  in  $w$ )
- $\mathbb{D}[P_1] \downarrow_{CHF}$  aber  $\mathbb{D}[P_2] \uparrow_{CHF}$ .
- Daher  $P_1 \not\sim_{CHF} P_2$

# Einige korrekte Programmtransformationen

## Satz

Die Reduktionen  $(CHF, lunit)$ ,  $(CHF, nmvar)$ ,  $(CHF, fork)$ ,  $(CHF, unIO)$ ,  $(CHF, mkbinds)$  sind korrekte Programmtransformationen.

Beweis:

- Sei  $P_1 \xrightarrow{a} P_2$  wobei  $a$  wie im Satz und  $P_1 \equiv \mathbb{D}[P'_1]$  und  $P_2 \equiv \mathbb{D}[P'_2]$
- Wir müssen vier Implikationen zeigen:

$$(1) \quad P_1 \downarrow_{CHF} \implies P_2 \downarrow_{CHF} \quad (2) \quad P_2 \downarrow_{CHF} \implies P_1 \downarrow_{CHF}$$

$$(3) \quad P_1 \Downarrow_{CHF} \implies P_2 \Downarrow_{CHF} \quad (4) \quad P_2 \Downarrow_{CHF} \implies P_1 \Downarrow_{CHF}$$

# Einige korrekte Programmtransformationen

Vorüberlegungen:

- Wenn  $P_1 \xrightarrow{a} P_2$  und  $P_1$  ist erfolgreich, dann muss auch  $P_2$  erfolgreich sein, da die  $\xrightarrow{a}$ -Transformation nicht im main-Thread reduzieren kann.
- Wenn  $P_1 \xrightarrow{a} P_2$ , dann auch  $P_1 \xrightarrow{CHF} P_2$ , da die  $\xrightarrow{a}$ -Transformation auch eine Standardreduktion ist.
- Untersuche  $P_0 \xleftarrow{CHF} P_1 \xrightarrow{a} P_2$  (alle Fälle):  
Man stellt fest:

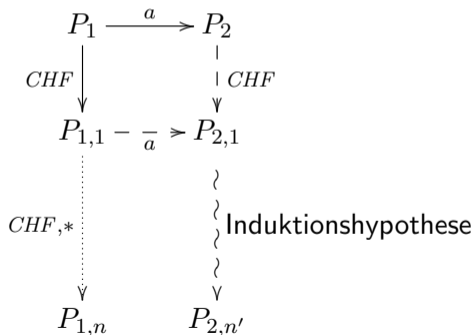
$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{a} & P_2 \\ \text{CHF} \downarrow & & \downarrow \text{CHF} \\ P_0 & \xrightarrow{a} & P_3 \end{array}$$



## Einige korrekte Programmtransformationen (2)

(1) Zeige  $P_1 \downarrow_{CHF} \implies P_2 \downarrow_{CHF}$ :

- Da  $P_1 \downarrow_{CHF}$ , gibt es  $P_1 \xrightarrow{CHF} P_{1,1} \xrightarrow{CHF} \dots \xrightarrow{CHF} P_{1,n}$  mit  $P_{1,n}$  erfolgreich.
- Induktion über  $n$
- $n = 0$ :  $P_1$  ist erfolgreich. Dann muss auch  $P_2$  erfolgreich sein. Aussage gilt.
- Induktionsschritt:



## Einige korrekte Programmtransformationen (3)

---

(2) Zeige  $P_2 \downarrow_{CHF} \implies P_1 \downarrow_{CHF}$ :

- Gilt sofort, da die Transformation  $P_1 \xrightarrow{a} P_2$  auch eine Standardreduktion ist:
- Jede konvergente Reduktionsfolge für  $P_2$  kann durch  $P_1 \xrightarrow{a} P_2$  verlängert werden zu einer konvergenten Reduktionsfolge für  $P_1$ .

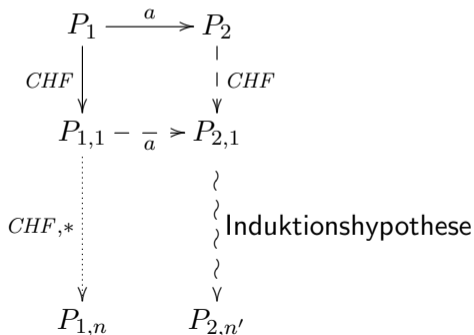
(3) Zeige  $P_1 \downarrow_{CHF} \implies P_2 \downarrow_{CHF}$ :

- äquivalente Aussage  $P_2 \uparrow_{CHF} \implies P_1 \uparrow_{CHF}$
- Offensichtlich, da wiederum jede divergierende Folge für  $P_2$  durch  $P_1 \xrightarrow{a} P_2$  zu einer divergierenden Folge für  $P_1$  verlängert werden kann.

# Einige korrekte Programmtransformationen (4)

(4) Zeige  $P_2 \Downarrow_{CHF} \implies P_1 \Downarrow_{CHF}$ :

- äquivalente Aussage  $P_1 \Uparrow_{CHF} \implies P_2 \Uparrow_{CHF}$ :
- $P_1 \xrightarrow{CHF} P_{1,1} \xrightarrow{CHF} \dots \xrightarrow{CHF} P_{1,n}$  wobei  $P_{1,n} \Uparrow_{CHF}$
- Induktion über  $n$
- Induktionsbasis:  $P_1 \Uparrow_{CHF} \implies P_2 \Uparrow_{CHF}$ : Das folgt aus (2) des Beweises!
- Induktionsschritt:



## Definition

**Kontextuelle Approximation**  $\leq_{CHF}$  und **kontextuelle Gleichheit**  $\sim_{CHF}$  für gleich getypte **Ausdrücke** ist in CHF definiert also:  $\leq_{CHF} := \Downarrow_{CHF} \cap \Downarrow_{CHF}$  und  $\sim_{CHF} := \leq_{CHF} \cap \geq_{CHF}$ , wobei für Ausdrücke  $e_1, e_2$  vom Typ  $\tau$ :

$$e_1 \Downarrow_{CHF} e_2 \quad \text{gdw.} \quad \forall C[\cdot] \in \mathcal{CC} : C[e_1] \Downarrow_{CHF} \implies C[e_2] \Downarrow_{CHF}$$
$$e_1 \Downarrow_{\downarrow, CHF} e_2 \quad \text{gdw.} \quad \forall C[\cdot] \in \mathcal{CC} : C[e_1] \Downarrow_{CHF} \implies C[e_2] \Downarrow_{CHF}$$

## Satz

In CHF gelten für alle (korrekt getypten) Ausdrücke  $e_1, e_2, e_3$  die folgenden Gleichheiten:

$$\begin{aligned} \text{return } e_1 \gg e_2 &\sim_{CHF} e_2 e_1 \\ e_1 \gg \lambda x. \text{return } x &\sim_{CHF} e_1 \\ e_1 \gg (\lambda x. (e_2 x \gg e_3)) &\sim_{CHF} (e_1 \gg e_2) \gg e_3 \end{aligned}$$

## Weitere Eigenschaften von CHF

---

- Call-by-name Auswertung ist äquivalent zu call-by-need Auswertung
- Es wurden noch weitere Programmtransformationen als korrekt bewiesen
- CHF erweitert die pure funktionale Teilsprache **konservativ**:  
Alle Gleichheiten die in der reinen funktionalen Sprache gelten, gelten auch in CHF
- Lazy Futures verletzen die Konservativität!