Der π-Kalkül als Message-Passing-Modell

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 18. Januar 2021

Übersicht

Rückblick: Lambda-Kalkül

- Der Lambda-Kalkül ist ein Modell sequentieller Programmiersprachen
- Operationen und Daten werden durch Funktionen (Abstraktionen) ausgedrückt
- Kontrollfluss wird durch Anwendungen von Funktionen auf Argumente ausgedrückt

Der π-Kalkül

- Der π-Kalkül ist ein Modell nebenläufiger und verteilter Programmiersprachen
- Daten und Operationen werden durch Prozesse ausgedrückt
- der Kontrollfluss wird durch Prozesskommunikation ausgedrückt.
- D.h. er ist ein Message-Passing-Modell: Kommunikation nur über Nachrichten
- Besonderes Merkmal: Prozesse sind mobil

Der π-Kalkül: Historisches

- entwickelt von Robin Milner, Joachim Parrow and David Walker
  in den 1990er Jahren

- Anwendungen auch außerhalb der nebenläufigen Programmierung
  sogar außerhalb der Informatik, z.B.

  - spi-calculus, applied pi-calculus:
    Varianten des π-Kalküls zur Beschreibung und zum Verfizieren von kryptographischen Protokollen

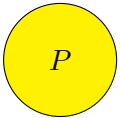
  - Microsofts XLANG: Beschreibungssprache für Geschäftsprozesse

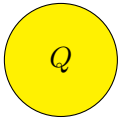
  - Biochemie: Stochastischer π-Kalkül zur formalen Darstellung biochemischer Prozesse

Der π-Kalkül: Varianten

- Synchroner π-Kalkül
- Asynchroner π-Kalkül
- Mit oder ohne Summen: Nichtdeterministische Auswahl
- Mit Rekursion / mit Replikation
- monadisch / polyadisch
- etc.

Parallele Komposition

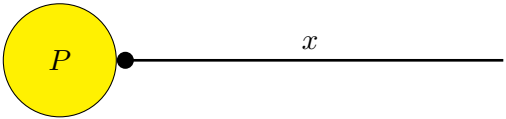




$$P \mid Q$$

"Prozesse P und Q laufen nebenläufig"

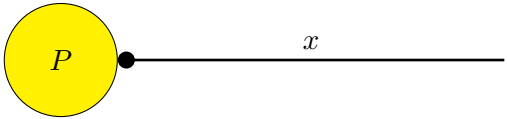
Links



$$x.P \quad \text{oder} \quad \overline{x}.P$$

"P ist mit Kanal namens x verbunden"

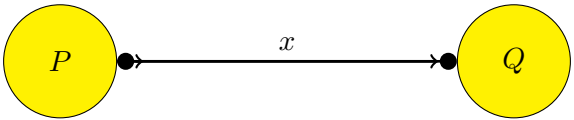
Links



$\underbrace{x.P}_{\text{empfangen}}$ oder $\underbrace{\overline{x}.P}_{\text{senden}}$

"P ist mit Kanal namens x verbunden"

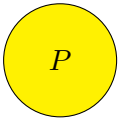
Kommunikation

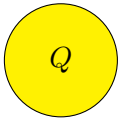


$$\overline{x}.P \mid x.Q$$

"P (Sender) und Q (Empfänger) können kommunizieren"

Kommunikation



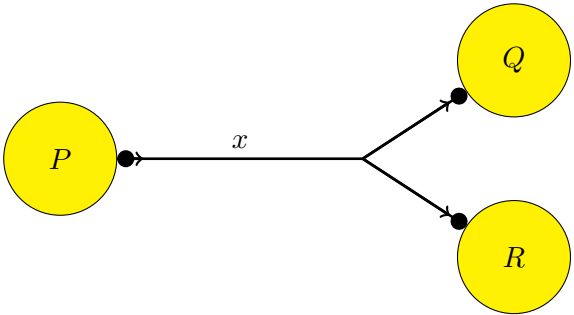


$$\overline{x}.P \mid x.Q \quad \rightarrow \quad P \mid Q$$

"P (Sender) und Q (Empfänger) können kommunizieren"

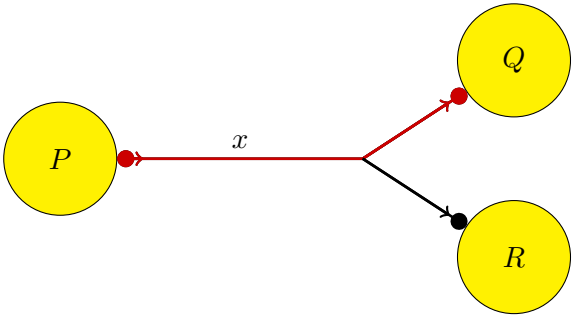
"P sendete eine Nachricht an Q"

Nicht-Determinismus



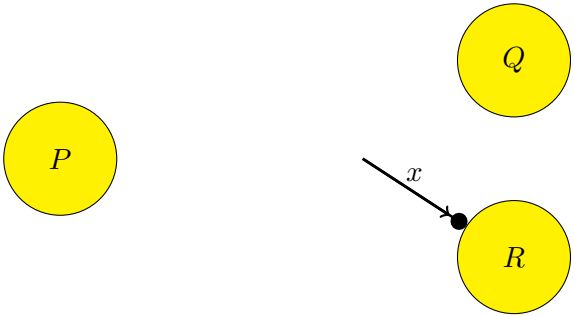
$$\overline{x}.P \mid x.Q \mid x.R$$

Nicht-Determinismus

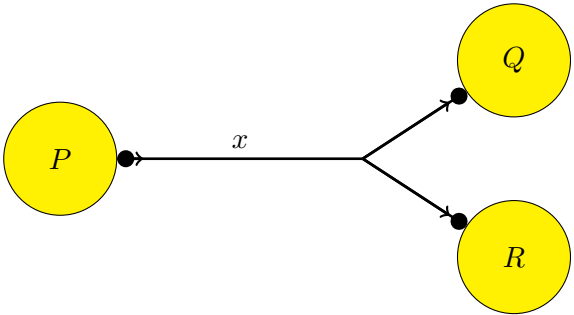


$$\overline{x}.P \mid x.Q \mid x.R$$

Nicht-Determinismus

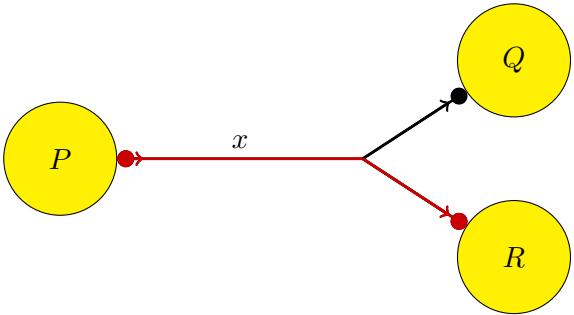


Nicht-Determinismus



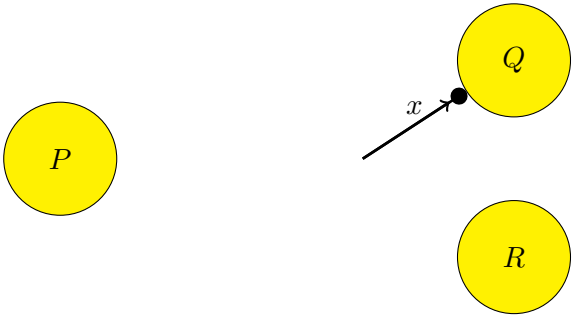
$$\overline{x}.P \mid x.Q \mid x.R \rightarrow P \mid Q \mid x.R$$

Nicht-Determinismus



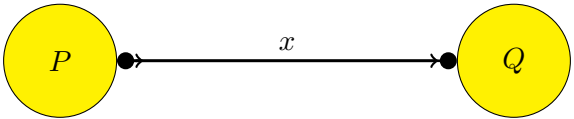
$$\overline{x}.P \mid x.Q \mid x.R \longrightarrow P \mid Q \mid x.R$$

Nicht-Determinismus



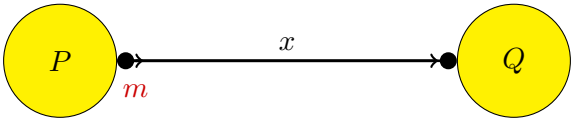
$$\overline{x}.P \mid x.Q \mid x.R \;\begin{cases} \nearrow\; P \mid Q \mid x.R \\ \searrow\; P \mid x.Q \mid R \end{cases}$$

Nachrichten



$$\overline{x}.P \mid x.Q \;\rightarrow\; P \mid Q$$

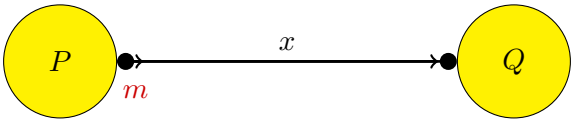
Nachrichten



$$\overline{x}m.P \mid x.Q \quad \rightarrow \quad P \mid Q$$

"P versendet Nachricht m entlang x"

Nachrichten



$$\overline{x}m.P \mid x(y).Q \quad \rightarrow \quad P \mid Q$$

"P versendet Nachricht m entlang x"

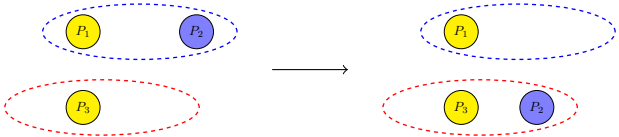
Nachrichten

$$\overline{x}m.P \mid x(y).Q \quad \rightarrow \quad P \mid Q[m/y]$$

"P versendet Nachricht m entlang x"

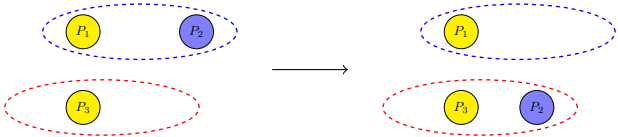
Mobilität: Ansätze

1. Prozesse verändern ihren Ort im physikalischen Raum der Prozesse



Mobilität: Ansätze

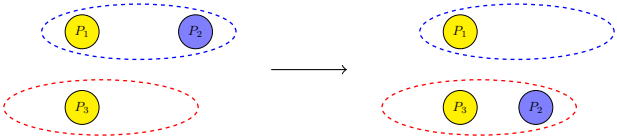
1. Prozesse verändern ihren Ort im physikalischen Raum der Prozesse



2. Prozesse verändern ihren Ort im virtuellen Raum der verbundenen Prozesse

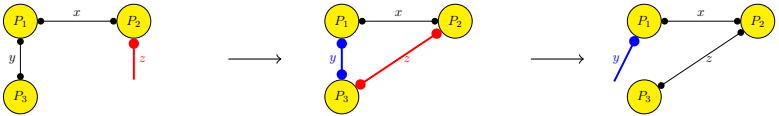
Mobilität: Ansätze

1. Prozesse verändern ihren Ort im physikalischen Raum der Prozesse



2. Prozesse verändern ihren Ort im virtuellen Raum der verbundenen Prozesse

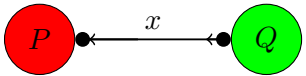
3. Verbindungen verändern ihren Ort im virtuellen Raum der verbundenen Prozesse
(Ansatz des π-Kalküls, enthält den zweiten Ansatz)

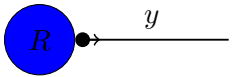


Mobilität (2)

Wie werden Verbindungen bewegt?

$\Rightarrow$ Versende sie als Nachricht!



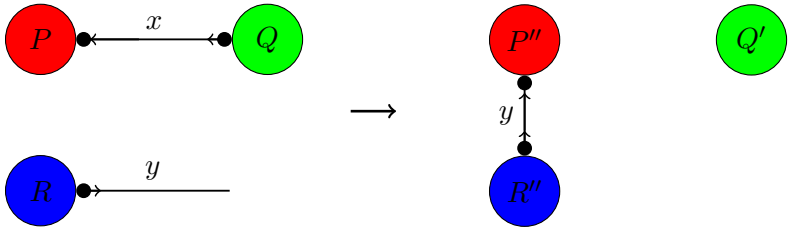


$$\underbrace{x(z).z(w).P'}_{P} \mid \underbrace{\overline{x}y.Q'}_{Q} \mid \underbrace{\overline{y}u'.R'}_{R}$$

Mobilität (2)

Wie werden Verbindungen bewegt?

$\Rightarrow$ Versende sie als Nachricht!



$$\underbrace{x(z).z(w).P'}_{P} \mid \underbrace{\overline{x}y.Q'}_{Q} \mid \underbrace{\overline{y}u'.R'}_{R} = \underbrace{(z(w).P')[y/z]}_{P''} \mid Q' \mid \underbrace{\overline{y}u'.R'}_{R''}$$

Private Kommunikation

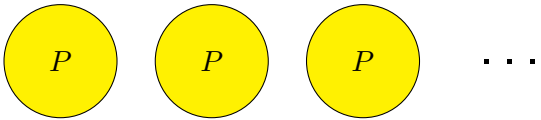
$$\nu x.P$$

„Kanal x ist privat für P“

Beispiel: $\nu x.\ (x(y).P \mid \overline{x}z.Q) \mid \overline{x}z'.R$

- Keine Kommunikation zwischen R und P erlaubt
- äquivalent zu $\nu x'.(x'(y).P \mid \overline{x'}z.Q) \mid \overline{x}z'.R$

Replikation



$$!\,P$$

"$!\,P$ bedeutet $\underbrace{P \mid P \mid P \mid \ldots}$ "

unendlich viele parallele Kopien von P

Synchroner π-Kalkül ohne Summe mit Replikation

Syntax

- $\mathcal{N}$ abzählbar unendliche Menge von Namen (ähnlich zu Variablen)
- Syntax für π-Kalkül-Prozesse ($x \in \mathcal{N}$)

$$
\begin{array}{rcll}
P & ::= & \pi.P & \text{(Aktion)} \\
 & | & P_1 \mid P_2 & \text{(Parallele Komposition)} \\
 & | & !\,P & \text{(Replikation)} \\
 & | & \mathbf{0} & \text{(Inaktiver Prozess)} \\
 & | & \nu x.P & \text{(Restriktion)}
\end{array}
$$

- Syntax für Aktionspräfixe wobei $x, y \in \mathcal{N}$

$$
\begin{array}{rcll}
\pi & ::= & x(y) & \text{Input} \\
 & | & \overline{x}y & \text{Output}
\end{array}
$$

Synchroner π-Kalkül (2)

- $x(y).P$ bedeutet:
  - Empfange über den Kanal namens x einen Namen und binde ihn an y.
  - Nachdem der Name empfangen wurde:
    Verhalte dich wie P, wobei für y der empfangene Name eingesetzt wird.

Synchroner π-Kalkül (2)

- $x(y).P$ bedeutet:
  - Empfange über den Kanal namens x einen Namen und binde ihn an y.
  - Nachdem der Name empfangen wurde:
    Verhalte dich wie P, wobei für y der empfangene Name eingesetzt wird.
- $\overline{x}y.P$ bedeutet:
  - Sende über den Kanal namens x den Namen y.
  - Danach verhalte dich wie P.

Synchroner π-Kalkül (2)

- $x(y).P$ bedeutet:
  - Empfange über den Kanal namens x einen Namen und binde ihn an y.
  - Nachdem der Name empfangen wurde:
    Verhalte dich wie P, wobei für y der empfangene Name eingesetzt wird.
- $\overline{x}y.P$ bedeutet:
  - Sende über den Kanal namens x den Namen y.
  - Danach verhalte dich wie P.
- $\mathbf{0}$ ist der inaktive Prozess, der nichts tut

Synchroner π-Kalkül (2)

- $x(y).P$ bedeutet:
  - Empfange über den Kanal namens x einen Namen und binde ihn an y.
  - Nachdem der Name empfangen wurde:
    Verhalte dich wie P, wobei für y der empfangene Name eingesetzt wird.
- $\overline{x}y.P$ bedeutet:
  - Sende über den Kanal namens x den Namen y.
  - Danach verhalte dich wie P.
- $\mathbf{0}$ ist der inaktive Prozess, der nichts tut
- $P_1 \mid P_2$ ist die parallele Komposition von P_1 und P_2.

Synchroner π-Kalkül (2)

- $x(y).P$ bedeutet:
  - Empfange über den Kanal namens x einen Namen und binde ihn an y.
  - Nachdem der Name empfangen wurde:
    Verhalte dich wie P, wobei für y der empfangene Name eingesetzt wird.
- $\overline{x}y.P$ bedeutet:
  - Sende über den Kanal namens x den Namen y.
  - Danach verhalte dich wie P.
- $\mathbf{0}$ ist der inaktive Prozess, der nichts tut
- $P_1 \mid P_2$ ist die parallele Komposition von P_1 und P_2.
- $\nu x.P$ führt P als Geltungsbereich für x ein.

Synchroner π-Kalkül (2)

- $x(y).P$ bedeutet:
  - Empfange über den Kanal namens x einen Namen und binde ihn an y.
  - Nachdem der Name empfangen wurde:
    Verhalte dich wie P, wobei für y der empfangene Name eingesetzt wird.
- $\overline{x}y.P$ bedeutet:
  - Sende über den Kanal namens x den Namen y.
  - Danach verhalte dich wie P.
- $\mathbf{0}$ ist der inaktive Prozess, der nichts tut
- $P_1 \mid P_2$ ist die parallele Komposition von P_1 und P_2.
- $\nu x.P$ führt P als Geltungsbereich für x ein.
- $!\,P$ steht für unendlich viele parallele Ausführungen von P, d.h. $\underbrace{P \mid P \mid \ldots \mid P}_{\text{unendlich oft}}$.

Bindungsbereiche

Binder im π-Kalkül sind:

- Restriktion $\nu z.P$ bindet den Namen z mit Geltungsbereich P
- $x(y).P$ bindet y mit Geltungsbereich P
- Beachte: Der Output-Präfix $\overline{x}y$ bindet weder x noch y.

Freie Namen $\mathsf{fn}(P)$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{fn}(x(y).P) &= \{x\} \cup (\mathsf{fn}(P) \setminus \{y\}) \\
\mathsf{fn}(\overline{x}y.P) &= \{x, y\} \cup \mathsf{fn}(P) \\
\mathsf{fn}(P_1 \mid P_2) &= \mathsf{fn}(P_1) \cup \mathsf{fn}(P_2) \\
\mathsf{fn}(\mathbf{0}) &= \emptyset \\
\mathsf{fn}(\nu x.P) &= \mathsf{fn}(P) \setminus \{x\} \\
\mathsf{fn}(!\,P) &= \mathsf{fn}(P)
\end{aligned}
$$

Gebundene Namen $\mathsf{bn}(P)$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{bn}(x(y).P) &= \{y\} \cup \mathsf{bn}(P) \\
\mathsf{bn}(\overline{x}y.P) &= \mathsf{bn}(P) \\
\mathsf{bn}(P_1 \mid P_2) &= \mathsf{bn}(P_1) \cup \mathsf{bn}(P_2) \\
\mathsf{bn}(\mathbf{0}) &= \emptyset \\
\mathsf{bn}(\nu x.P) &= \{x\} \cup \mathsf{bn}(P) \\
\mathsf{bn}(!\,P) &= \mathsf{bn}(P)
\end{aligned}
$$

Alle Namen eines Prozesses: $\mathsf{n}(P) := \mathsf{fn}(P) \cup \mathsf{bn}(P)$

Prozesskontexte

Prozesskontext D

- Prozess, der an einer Position anstelle eines Prozesses ein Loch $[\cdot]$ hat.
- Grammatik:

$$D ::= [\cdot] \mid \pi.D \mid D \mid P \mid P \mid D \mid !\, D \mid \nu x.D \qquad \text{für } x \in \mathcal{N}$$

Alpha-Äquivalenz

Alpha-Umbenennungsschritt

Es gibt zwei Möglichkeiten eine Umbenennung gebundener Namen durchzuführen:

$$\begin{array}{lcl} D[x(y).P] & \xrightarrow{\alpha} & D[x(z).P[z/y]] \text{ falls } z \notin \mathsf{n}(x(y).s) \\ D[\nu y.P] & \xrightarrow{\alpha} & D[\nu z.P'[z/y]] \text{ falls } z \notin \mathsf{n}(\nu y.P) \end{array}$$

Alpha-Äquivalenz

- $=_\alpha$ ist die reflexiv-transitive Hülle von $\xrightarrow{\alpha}$.
- Prozesse P_1, P_2 heißen α-äquivalent, wenn $P_1 =_\alpha P_2$ gilt

Wie vorher:

- Alpha-äquivalente Prozesse werden als gleich angesehen.
- Annahme: Distinct Name Convention

Strukturelle Kongruenz

Strukturelle Kongruenz $\equiv$ definiert, welche Prozesse als „strukturgleich“ gelten.
Formal: $\equiv$ ist die kleinste Kongruenz auf Prozessen, die die folgenden Axiome erfüllt.

$$
\begin{aligned}
P &\equiv Q, \text{ falls } P \text{ und } Q \ \alpha\text{-äquivalent sind} \\
P_1 \mid (P_2 \mid P_3) &\equiv (P_1 \mid P_2) \mid P_3 \\
P_1 \mid P_2 &\equiv P_2 \mid P_1 \\
P \mid \mathbf{0} &\equiv P \\
\nu z.\nu w.P &\equiv \nu w.\nu z.P \\
\nu z.\mathbf{0} &\equiv \mathbf{0} \\
\nu z.(P_1 \mid P_2) &\equiv P_1 \mid \nu z.P_2, \text{ falls } z \notin \mathsf{fn}(P_1) \\
!P &\equiv P \mid !P
\end{aligned}
$$

Strukturelle Kongruenz

Strukturelle Kongruenz $\equiv$ definiert, welche Prozesse als „strukturgleich“ gelten.
Formal: $\equiv$ ist die kleinste Kongruenz auf Prozessen, die die folgenden Axiome erfüllt.

$$
\begin{aligned}
P &\equiv Q, \text{ falls } P \text{ und } Q \ \alpha\text{-äquivalent sind} \\
P_1 \mid (P_2 \mid P_3) &\equiv (P_1 \mid P_2) \mid P_3 \\
P_1 \mid P_2 &\equiv P_2 \mid P_1 \\
P \mid \mathbf{0} &\equiv P \\
\nu z.\nu w.P &\equiv \nu w.\nu z.P \\
\nu z.\mathbf{0} &\equiv \mathbf{0} \\
\nu z.(P_1 \mid P_2) &\equiv P_1 \mid \nu z.P_2, \text{ falls } z \notin \mathsf{fn}(P_1) \\
!P &\equiv P \mid !P
\end{aligned}
$$

- Umgekehrt ausgedrückt: Kann man P_1 mithilfe der Axiome (angewendet auf Unterprozesse) und α-Umbenennungen in P_2 überführen, dann sind P_1 und P_2 strukturell kongruent (d.h. $P_1 \equiv P_2$)

Strukturelle Kongruenz: Bemerkungen

- Strukturelle Kongruenz ist “eigentlich” dafür gedacht Prozesse als gleich anzusehen, weil sie mehr oder weniger die gleiche Struktur haben.
- Tatsächlich ist bis heute nicht bewiesen, dass $\equiv$ überhaupt **entscheidbar** ist: Entscheidungsproblem: Gegeben P_1, P_2. Gilt $P_1 \equiv P_2$?
- Bekannt: $\equiv$ ist EXPSPACE-schwer! (siehe Literatur)
- EXPSPACE-Schwere kommt bereits durch ! und |
- Zusammen mit ν wird es anscheinend noch schwieriger
- Es gibt entscheidbare Varianten.

Operationale Semantik

Reduktionsregeln

(INTERACT)	$x(y).P \mid \overline{x}v.Q \to P[v/y] \mid Q$
(PAR)	$P \mid Q \to P' \mid Q$, falls $P \to P'$
(NEW)	$\nu x.P \to \nu x.P'$, falls $P \to P'$
(STRUCTCONGR)	$P \to P'$, falls $Q \to Q'$, $P \equiv Q$ und $P' \equiv Q'$

Alternative Definition:

- Sei die Menge $\mathcal{R}$ der Reduktionskontexte beschrieben durch $R ::= [\cdot] \mid R \mid P \mid \nu x.R$
- Reduktion $\to$:
  Wenn $R \in \mathcal{R}$, $P_0 \equiv R[x(y).P \mid \overline{x}v.Q], Q_0 \equiv R[P[v/y] \mid Q]$, dann $P_0 \to Q_0$.

Beispiele

Betrachte: $P \equiv \underbrace{x(y).\overline{y}y.\mathbf{0}}_{P_1} \mid \underbrace{\overline{x}z.\mathbf{0}}_{P_2} \mid \underbrace{z(w).\mathbf{0}}_{P_3}$

Beispiele

Betrachte: $P \equiv \underbrace{x(y).\overline{y}y.\mathbf{0}}_{P_1} \mid \underbrace{\overline{x}z.\mathbf{0}}_{P_2} \mid \underbrace{z(w).\mathbf{0}}_{P_3}$

- P_1 und P_2 kommunizieren über den Kanal x, wobei P_2 an P_1 den Namen z verschickt:

$$P \to \underbrace{\overline{z}z.\mathbf{0}}_{P_1'} \mid \underbrace{\mathbf{0}}_{P_2'} \mid \underbrace{z(w).\mathbf{0}}_{P_3} \equiv P'$$

Beispiele

Betrachte: $P \equiv \underbrace{x(y).\overline{y}y.\mathbf{0}}_{P_1} \mid \underbrace{\overline{x}z.\mathbf{0}}_{P_2} \mid \underbrace{z(w).\mathbf{0}}_{P_3}$

- P_1 und P_2 kommunizieren über den Kanal x, wobei P_2 an P_1 den Namen z verschickt:

$$P \to \underbrace{\overline{z}z.\mathbf{0}}_{P_1'} \mid \underbrace{\mathbf{0}}_{P_2'} \mid \underbrace{z(w).\mathbf{0}}_{P_3} \equiv P'$$

- P_1' und P_3 kommunizieren über den Kanal z, wobei P_1' den Namen z verschickt:

$$P' \to \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \equiv P''$$

Beispiele

Betrachte: $P \equiv \underbrace{x(y).\overline{y}y.\mathbf{0}}_{P_1} \mid \underbrace{\overline{x}z.\mathbf{0}}_{P_2} \mid \underbrace{z(w).\mathbf{0}}_{P_3}$

- P_1 und P_2 kommunizieren über den Kanal x, wobei P_2 an P_1 den Namen z verschickt:

$$P \to \underbrace{\overline{z}z.\mathbf{0}}_{P_1'} \mid \underbrace{\mathbf{0}}_{P_2'} \mid \underbrace{z(w).\mathbf{0}}_{P_3} \equiv P'$$

- P_1' und P_3 kommunizieren über den Kanal z, wobei P_1' den Namen z verschickt:

$$P' \to \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \equiv P''$$

- Ergebis ist strukturell kongruent zu $\mathbf{0}$ und kann nicht weiter reduziert werden.

Beispiele (2)

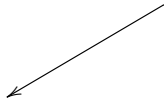
- Die Reduktion ist nicht-deterministisch
- Betrachte:

$$P \equiv x(y).\mathbf{0} \mid \overline{x}v.\mathbf{0} \mid x(z).\overline{z}w.\mathbf{0}$$

Beispiele (2)

- Die Reduktion ist nicht-deterministisch
- Betrachte:

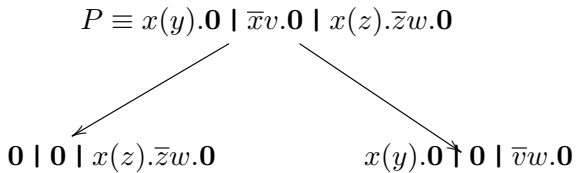
$$P \equiv x(y).\mathbf{0} \mid \overline{x}v.\mathbf{0} \mid x(z).\overline{z}w.\mathbf{0}$$



$$\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid x(z).\overline{z}w.\mathbf{0}$$

Beispiele (2)

- Die Reduktion ist nicht-deterministisch
- Betrachte:



Beispiele (3)

- ν-Binder verhindern Kommunikationsmöglichkeiten und ermöglichen lokale Kommunikation, die durch den Eingriff von außen geschützt ist.

Beispiele (3)

- ν-Binder verhindern Kommunikationsmöglichkeiten und ermöglichen lokale Kommunikation, die durch den Eingriff von außen geschützt ist.
- Betrachte:

$$P \equiv \quad \nu x.\big(x(y).\mathbf{0} \mid \overline{x}v.\mathbf{0}\big) \mid x(z).\overline{z}w.\mathbf{0}$$

Beispiele (3)

- ν-Binder verhindern Kommunikationsmöglichkeiten und ermöglichen lokale Kommunikation, die durch den Eingriff von außen geschützt ist.
- Betrachte:

$$\begin{aligned} P \equiv \quad & \nu x.\big(x(y).\mathbf{0} \mid \overline{x}v.\mathbf{0}\big) \mid x(z).\overline{z}w.\mathbf{0} \\ \rightarrow \quad & \nu x.(\mathbf{0} \mid \mathbf{0}) \mid x(z).\overline{z}w.\mathbf{0} \end{aligned}$$

- nur eine Reduktion möglich!

Beispiele (3)

- ν-Binder verhindern Kommunikationsmöglichkeiten und ermöglichen lokale Kommunikation, die durch den Eingriff von außen geschützt ist.
- Betrachte:

$$\begin{aligned} P \equiv & \quad \nu x.\big(x(y).\mathbf{0} \mid \overline{x}v.\mathbf{0}\big) \mid x(z).\overline{z}w.\mathbf{0} \\ \rightarrow & \quad \nu x.(\mathbf{0} \mid \mathbf{0}) \mid x(z).\overline{z}w.\mathbf{0} \end{aligned}$$

- nur eine Reduktion möglich!
- Nach α-Umbenennung von P:

$$P \equiv \nu x'.(x'(y).\mathbf{0} \mid \overline{x'}v.\mathbf{0}) \mid x(z).\overline{z}w.\mathbf{0}$$

Extrusion

- Lokale Namen, können ihren Bindungsbereich durch Kommunikation verlassen.

Extrusion

- Lokale Namen, können ihren Bindungsbereich durch Kommunikation verlassen.
- Betrachte

$$P \equiv x(y).P_1 \mid \nu z.\overline{x}z.P_2$$

wobei z nicht in P_1 vorkommt.

Extrusion

- Lokale Namen, können ihren Bindungsbereich durch Kommunikation verlassen.
- Betrachte

$$P \equiv x(y).P_1 \mid \nu z.\overline{x}z.P_2$$

  wobei z nicht in P_1 vorkommt.
- Bei Reduktion mit (INTERACT):

$$P \equiv \nu z.(x(y).P_1 \mid \overline{x}z.P_2) \rightarrow \nu z.(P_1[z/y] \mid P_2)$$

- Der scheinbar nur für P_2 bekannte Namen z wird auch für P_1 bekannt
- Dieses Phänomen wird als Extrusion bezeichnet.

Unendliche Reduktionsfolgen

- Unendlich lange Reduktionsfolgen sind möglich
- Beispiel:

$$P = \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0})$$

Unendliche Reduktionsfolgen

- Unendlich lange Reduktionsfolgen sind möglich
- Beispiel:

$$P = \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0})$$

- Anfang der Reduktion

Unendliche Reduktionsfolgen

- Unendlich lange Reduktionsfolgen sind möglich
- Beispiel:

$$P = \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0})$$

- Anfang der Reduktion

$$P \quad = \quad \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0})$$

Unendliche Reduktionsfolgen

- Unendlich lange Reduktionsfolgen sind möglich
- Beispiel:

$$P = \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0})$$

- Anfang der Reduktion

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \\ &\equiv \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \overline{x}v.\mathbf{0} \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \end{aligned}$$

Unendliche Reduktionsfolgen

- Unendlich lange Reduktionsfolgen sind möglich
- Beispiel:

$$P = \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0})$$

- Anfang der Reduktion

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \\ &\equiv \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \overline{x}v.\mathbf{0} \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \\ &\equiv \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \overline{x}v.\mathbf{0} \mid x(z).\mathbf{0} \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \end{aligned}$$

Unendliche Reduktionsfolgen

- Unendlich lange Reduktionsfolgen sind möglich
- Beispiel:

$$P = \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0})$$

- Anfang der Reduktion

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \\ &\equiv \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \overline{x}v.\mathbf{0} \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \\ &\equiv \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \overline{x}v.\mathbf{0} \mid x(z).\mathbf{0} \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \\ &\to \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \end{aligned}$$

Unendliche Reduktionsfolgen

- Unendlich lange Reduktionsfolgen sind möglich
- Beispiel:

$$P = \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0})$$

- Anfang der Reduktion

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \\ &\equiv \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \overline{x}v.\mathbf{0} \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \\ &\equiv \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \overline{x}v.\mathbf{0} \mid x(z).\mathbf{0} \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \\ &\to \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \\ &\equiv \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \end{aligned}$$

Unendliche Reduktionsfolgen

- Unendlich lange Reduktionsfolgen sind möglich
- Beispiel:

$$P = \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0})$$

- Anfang der Reduktion

$$\begin{aligned}
P &= \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \\
&\equiv \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \overline{x}v.\mathbf{0} \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \\
&\equiv \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \overline{x}v.\mathbf{0} \mid x(z).\mathbf{0} \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \\
&\to \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \\
&\equiv \mathbf{!}\,(\overline{x}v.\mathbf{0}) \mid \mathbf{!}\,(x(z).\mathbf{0}) \\
&\equiv P
\end{aligned}$$

Turing-Mächtigkeit des π-Kalküls

- Bewiesen von Robin Milner, 1992
- Kodiere den call-by-name Lambda Kalkül in den π-Kalkül
- Übersetzung $[\![\cdot]\!]$
- Für Lambda-Ausdruck s: $[\![s]\!]u$ ist Prozess
- wobei u ein Name ist
- über u "erhält" s seine Argumente

Kodierung $[\![\cdot]\!]$

Übersetzung von Abstraktionen

$$[\![\lambda x.s]\!]u := u(x).u(v).[\![s]\!]v$$

- Über u empfängt die Abstraktion zwei Namen:
- Zum einen x,
- zum anderen den Namen über den s seine Argumente erhält

Kodierung $[\![\cdot]\!]$

Übersetzung von Abstraktionen

$$[\![\lambda x.s]\!]u := u(x).u(v).[\![s]\!]v$$

- Über u empfängt die Abstraktion zwei Namen:
- Zum einen x,
- zum anderen den Namen über den s seine Argumente erhält

Übersetzung von Variablen

$$[\![x]\!]u := \overline{x}u.\mathbf{0}$$

Kodierung $[\![\cdot]\!]$

Übersetzung von Abstraktionen

$$[\![\lambda x.s]\!]u := u(x).u(v).[\![s]\!]v$$

- Über u empfängt die Abstraktion zwei Namen:
- Zum einen x,
- zum anderen den Namen über den s seine Argumente erhält

Übersetzung von Variablen

$$[\![x]\!]u := \overline{x}u.\mathbf{0}$$

Beispiel: $[\![\lambda x.x]\!]u = u(x).u(v).\overline{x}v.\mathbf{0}$

Kodierung $[\![\cdot]\!]$ (2)

Übersetzung von Anwendungen

- Bei $(s\ t)$ wird quasi eine Bindung $x = t$ für das Argument als eigener Prozess angelegt.
- Der Prozess für $x = t$ fordert jedes Mal einen Kanalnamen an, über welchen er seine Argumente erhält
- Abkürzung:

$$\langle x = t \rangle := \mathbf{!}\,(x(w).[\![t]\!]w)$$

- Replikation: Da t eventuell öfter gebraucht wird
- Übersetzung der Anwendung, wobei x ein neuer Name:

$$[\![s\ t]\!]u := \nu v.([\![s]\!]v \mid \nu x.\overline{v}x.\overline{v}u.\langle x = t \rangle)$$

Beispiel

$$[\![(\lambda x.x)\ t]\!]u$$

Beispiel

$$[\![(\lambda x.x)\ t]\!]u \quad = \quad \nu v.([\![(\lambda x.x)]\!]v \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle)$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
[\![(\lambda x.x)\ t]\!]u &= \nu v.([\![(\lambda x.x)]\!]v \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).[\![x]\!]w \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle)
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
[\![(\lambda x.x)\ t]\!]u &= \nu v.([\![(\lambda x.x)]\!]v \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).[\![x]\!]w \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).\overline{x}w.\mathbf{0} \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle)
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
[\![(\lambda x.x)\ t]\!]u &= \nu v.([\![(\lambda x.x)]\!]v \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).[\![x]\!]w \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).\overline{x}w.\mathbf{0} \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\equiv \nu y.\nu v.(v(x).v(w).\overline{x}w.\mathbf{0} \mid \overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle)
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
[\![(\lambda x.x)\ t]\!]u &= \nu v.([\![(\lambda x.x)]\!]v \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).[\![x]\!]w \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).\overline{x}w.\mathbf{0} \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\equiv \nu y.\nu v.(v(x).v(w).\overline{x}w.\mathbf{0} \mid \overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\to \nu y.\nu v.(v(w).\overline{y}w.\mathbf{0} \mid \overline{v}u.\langle y = t\rangle)
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
[\![(\lambda x.x)\ t]\!]u &= \nu v.([\![(\lambda x.x)]\!]v \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).[\![x]\!]w \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).\overline{x}w.\mathbf{0} \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\equiv \nu y.\nu v.(v(x).v(w).\overline{x}w.\mathbf{0} \mid \overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\to \nu y.\nu v.(v(w).\overline{y}w.\mathbf{0} \mid \overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\to \nu y.\nu v.(\overline{y}u.\mathbf{0} \mid \langle y = t\rangle)
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
[\![(\lambda x.x)\ t]\!]u &= \nu v.([\![(\lambda x.x)]\!]v \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).[\![x]\!]w \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).\overline{x}w.\mathbf{0} \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\equiv \nu y.\nu v.(v(x).v(w).\overline{x}w.\mathbf{0} \mid \overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\to \nu y.\nu v.(v(w).\overline{y}w.\mathbf{0} \mid \overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\to \nu y.\nu v.(\overline{y}u.\mathbf{0} \mid \langle y = t\rangle) \\
&= \nu y.\nu v.(\overline{y}u.\mathbf{0} \mid \mathbf{!}\,(y(w).[\![t]\!]w))
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
[\![(\lambda x.x)\ t]\!]u &= \nu v.([\![(\lambda x.x)]\!]v \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).[\![x]\!]w \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).\overline{x}w.\mathbf{0} \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\equiv \nu y.\nu v.(v(x).v(w).\overline{x}w.\mathbf{0} \mid \overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\to \nu y.\nu v.(v(w).\overline{y}w.\mathbf{0} \mid \overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\to \nu y.\nu v.(\overline{y}u.\mathbf{0} \mid \langle y = t\rangle) \\
&= \nu y.\nu v.(\overline{y}u.\mathbf{0} \mid \mathbf{!}\,(y(w).[\![t]\!]w)) \\
&\equiv \nu y.\nu v.(\overline{y}u.\mathbf{0} \mid (y(w).[\![t]\!]w) \mid \mathbf{!}\,(y(w).[\![t]\!]w))
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
[\![(\lambda x.x)\ t]\!]u &= \nu v.([\![(\lambda x.x)]\!]v \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).[\![x]\!]w \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).\overline{x}w.\mathbf{0} \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\equiv \nu y.\nu v.(v(x).v(w).\overline{x}w.\mathbf{0} \mid \overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\to \nu y.\nu v.(v(w).\overline{y}w.\mathbf{0} \mid \overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\to \nu y.\nu v.(\overline{y}u.\mathbf{0} \mid \langle y = t\rangle) \\
&= \nu y.\nu v.(\overline{y}u.\mathbf{0} \mid \mathbf{!}\,(y(w).[\![t]\!]w)) \\
&\equiv \nu y.\nu v.(\overline{y}u.\mathbf{0} \mid (y(w).[\![t]\!]w) \mid \mathbf{!}\,(y(w).[\![t]\!]w)) \\
&\to \nu y.\nu v.(\mathbf{0} \mid ([\![t]\!]u) \mid \mathbf{!}\,(y(w).[\![t]\!]w))
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
[\![(\lambda x.x)\ t]\!]u &= \nu v.([\![(\lambda x.x)]\!]v \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).[\![x]\!]w \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&= \nu v.(v(x).v(w).\overline{x}w.\mathbf{0} \mid \nu y.\overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\equiv \nu y.\nu v.(v(x).v(w).\overline{x}w.\mathbf{0} \mid \overline{v}y.\overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\to \nu y.\nu v.(v(w).\overline{y}w.\mathbf{0} \mid \overline{v}u.\langle y = t\rangle) \\
&\to \nu y.\nu v.(\overline{y}u.\mathbf{0} \mid \langle y = t\rangle) \\
&= \nu y.\nu v.(\overline{y}u.\mathbf{0} \mid \mathbf{!}\,(y(w).[\![t]\!]w)) \\
&\equiv \nu y.\nu v.(\overline{y}u.\mathbf{0} \mid (y(w).[\![t]\!]w) \mid \mathbf{!}\,(y(w).[\![t]\!]w)) \\
&\to \nu y.\nu v.(\mathbf{0} \mid ([\![t]\!]u) \mid \mathbf{!}\,(y(w).[\![t]\!]w)) \\
&\equiv [\![t]\!]u \mid \nu y.(\mathbf{!}\,(y(w).[\![t]\!]w))
\end{aligned}
$$

Beispiel (2)

Zusammengefasst:

$$[\![(\lambda x.x)\ t]\!]u \xrightarrow{*} [\![t]\!]u \mid \nu y.(!\,(y(w).[\![t]\!]w))$$

- $\nu y.(!\,(y(w).[\![t]\!]w))$ kann nicht kommunizieren, daher „Garbage“
- Im call-by-name Lambda Kalkül: $(\lambda x.x)\ t \to t$

Resultate aus Milner, 1992

Proposition

Sei s ein geschlossener Lambda-Ausdruck, dann gilt eine der folgenden Bedingungen:

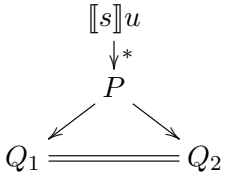
1. $s \downarrow_{name}$ und $[\![s]\!]u \xrightarrow{*} P$, sodass P irreduzibel ist.
2. $s \uparrow_{name}$ und es gibt kein P, so dass $[\![s]\!]u \xrightarrow{*} P$, wobei P irreduzibel ist.

Informal: Call-by-name Auswertung von Lambda-Ausdrücken kann im π-Kalkül simuliert werden.

Resultate aus Milner, 1992 (2)

Lemma

Sei s ein geschlossener Lambda-Ausdruck, dann ist $[\![s]\!]u$ deterministisch bzgl. $\equiv$, d.h. falls $[\![s]\!]u \xrightarrow{*} P$ und $P \to Q_1$ als auch $P \to Q_2$, dann gilt stets $Q_1 \equiv Q_2$.



Insgesamt folgt:

Theorem

Der synchrone π-Kalkül ist Turing-mächtig.

Bemerkungen

- Resultat zeigt nur, dass Lambda-Ausdrücke ausgeführt werden können.
- Kein Zusammenhang zwischen Gleichheitstheorien
- Milner 1992 zeigt stärkere Aussagen über $[\![\cdot]\!]$
- Wir haben allerdings (noch) keinen Gleichheitsbegriff für den π-Kalkül definiert
- Es gibt verschiedene Begriffe!
- Milner 1992 gibt zusätzlich eine Kodierung des call-by-value Lambda-Kalküls in den π-Kalkül an.

Der asynchrone π-Kalkül

- Bisher: Die Kommunikation findet in einem Schritt statt, d.h. synchrone Kommunikation
- Im asynchronen π-Kalkül: Fast alles identisch, nur ein Unterschied:
- Nach dem Output-Präfix $\overline{x}y$ darf nur der inaktive Prozess $\mathbf{0}$ folgen.

Der asynchrone π-Kalkül

- Bisher: Die Kommunikation findet in einem Schritt statt, d.h. synchrone Kommunikation
- Im asynchronen π-Kalkül: Fast alles identisch, nur ein Unterschied:
- Nach dem Output-Präfix $\overline{x}y$ darf nur der inaktive Prozess $\mathbf{0}$ folgen.

Syntax

$$P \quad ::= \quad \mathbf{0} \mid \overline{x}y.\mathbf{0} \mid x(y).P \mid P_1 \mid P_2 \mid \nu z.P \mid !P$$

Der asynchrone π-Kalkül (2)

- Der asynchrone Charakter kommt durch die Sichtweise:
- $\overline{x}y.\mathbf{0}$ sind gesendete Nachrichten, die im Raum „herumschwirren“

Der asynchrone π-Kalkül (2)

- Der asynchrone Charakter kommt durch die Sichtweise:
- $\overline{x}y.\mathbf{0}$ sind gesendete Nachrichten, die im Raum „herumschwirren“

$$P \equiv \underbrace{\overline{x_1}y_1.\mathbf{0} \mid \ldots \mid \overline{x_n}y_n.\mathbf{0}}_{\text{Medium der gesendeten Nachrichten (Puffer)}} \mid \underbrace{Q_1 \mid \ldots \mid Q_n}_{\text{„echtes“ Programm}}$$

Kodierung: Synchroner π-Kalkül in den asynchronen

- Umkehrung klar: Da asynchroner π-Kalkül ein Subkalkül des synchronen ist.

Kodierung: Synchroner π-Kalkül in den asynchronen

- Umkehrung klar: Da asynchroner π-Kalkül ein Subkalkül des synchronen ist.
- Sei $P' \mid Q' \equiv (\overline{x}z.P \mid x(y).Q)$ ein Prozess des synchronen π-Kalküls.
- Wir nennen P' den Sender, Q' den Empfänger
- Ziel: P und Q sind blockiert bis die Kommunikation statt gefunden hat.

Kodierung: Synchroner π-Kalkül in den asynchronen

- Umkehrung klar: Da asynchroner π-Kalkül ein Subkalkül des synchronen ist.
- Sei $P' \mid Q' \equiv (\overline{x}z.P \mid x(y).Q)$ ein Prozess des synchronen π-Kalküls.
- Wir nennen P' den Sender, Q' den Empfänger
- Ziel: P und Q sind blockiert bis die Kommunikation statt gefunden hat.
- Erste Idee: Übersetze $\overline{x}z.P$ als $\overline{x}z.\mathbf{0} \mid P$
- Funktioniert nicht: P kann weiterreduzieren ohne auf die Kommunikation zu warten!

Kodierung: Synchroner π-Kalkül in den asynchronen

- Umkehrung klar: Da asynchroner π-Kalkül ein Subkalkül des synchronen ist.
- Sei $P' \mid Q' \equiv (\overline{x}z.P \mid x(y).Q)$ ein Prozess des synchronen π-Kalküls.
- Wir nennen P' den Sender, Q' den Empfänger
- Ziel: P und Q sind blockiert bis die Kommunikation statt gefunden hat.
- Erste Idee: Übersetze $\overline{x}z.P$ als $\overline{x}z.\mathbf{0} \mid P$
- Funktioniert nicht: P kann weiterreduzieren ohne auf die Kommunikation zu warten!
- Idee: Verwende asynchrone Kommunikation, wobei der Sender auf eine Empfangsbestätigung wartet.

Kodierung mit Empfangsbestätigung

Sender	$S = \overline{x}z.\mathbf{0} \mid u(v).P$
Empfänger	$E = x(y).(\overline{u}v.\mathbf{0} \mid Q)$

Auswertung dazu:

$$
\begin{aligned}
& S \mid E \\
= \quad & (\overline{x}z.\mathbf{0} \mid u(v).P) \mid x(y).(\overline{u}v.\mathbf{0} \mid Q) \\
& \to u(v).P \mid \overline{u}v.\mathbf{0} \mid Q[z/y] \\
& \to P \mid Q[z/x]
\end{aligned}
$$

Kodierung mit Empfangsbestätigung (2)

- Schwachpunkt: Nicht unabhängig vom Kontext:
- Übersetzung von $D[P' \mid Q']$ stellt nicht sicher, dass andere Prozesse aus D über Kanal u kommunizieren.
- Beispiel $D = u(w).\mathbf{0} \mid [\cdot]$
- Dann kann $D[S \mid E]$ wie folgt reduzieren:

$$\begin{array}{rl} & u(w).\mathbf{0} \mid (\overline{x}z.\mathbf{0} \mid u(v).P) \mid x(y).(\overline{u}v.\mathbf{0} \mid Q) \\ \rightarrow & u(w).\mathbf{0} \mid (u(v).P) \mid \overline{u}v.\mathbf{0} \mid Q[z/y] \\ \rightarrow & (u(v).P) \mid Q[z/y] \end{array}$$

- Lösung: zuerst einen privaten Kanalnamen zwischen Sender und Empfänger austauschen

Kodierung mit Empfangsbestätigung (3)

- Sender $\nu u.(\overline{x}u.\mathbf{0} \mid u(v)P)$
- Dann kann $u(v)P$ erst dann weiter reduzieren, wenn u über x versendet wurde, da u vorher nach außen unsichtbar!
- $u(v)P$ blockiert bis die Kommunikation stattgefunden hat.
- Damit kann man synchronisieren

Kodierung mit Empfangsbestätigung (4)

Übersetzung $[\![\cdot]\!]_\pi$ übersetzt synchrone in asynchrone Prozesse

$$
\begin{array}{lcl}
[\![\mathbf{0}]\!]_\pi & = & \mathbf{0} \\
[\![\overline{x}y.P]\!]_\pi & = & \nu u.(\overline{x}u.\mathbf{0} \mid u(v).(\overline{v}y.\mathbf{0} \mid [\![P]\!]_\pi)), \\
 & & \quad \text{wobei } u, v \notin \mathsf{fn}(P) \\
[\![x(y).P]\!]_\pi & = & x(u).\nu v.(\overline{u}v.\mathbf{0} \mid v(y).[\![P]\!]_\pi), \text{ wobei } u, v \notin \mathsf{fn}(P) \\
[\![P \mid Q]\!]_\pi & = & [\![P]\!]_\pi \mid [\![Q]\!]_\pi \\
[\![!\, P]\!]_\pi & = & !\, [\![P]\!]_\pi \\
[\![\nu x.P]\!]_\pi & = & \nu x.[\![P]\!]_\pi
\end{array}
$$

Beispiel

Auswertung von $[\![\overline{x}z.P \mid x(y).Q]\!]_\pi$:

$$[\![\overline{x}z.P \mid x(y).Q]\!]_\pi$$

Beispiel

Auswertung von $[\![\overline{x}z.P \mid x(y).Q]\!]_\pi$:

$$
\begin{aligned}
& [\![\overline{x}z.P \mid x(y).Q]\!]_\pi \\
= \; & \nu u.(\overline{x}u.\mathbf{0} \mid u(v).(\overline{v}z.\mathbf{0} \mid [\![P]\!]_\pi)) \mid x(u').\nu v'.(\overline{u'}v'.\mathbf{0} \mid v'(y).[\![Q]\!]_\pi)
\end{aligned}
$$

Beispiel

Auswertung von $[\![\overline{x}z.P \mid x(y).Q]\!]_\pi$:

$$
\begin{aligned}
& [\![\overline{x}z.P \mid x(y).Q]\!]_\pi \\
= \; & \nu u.(\overline{x}u.\mathbf{0} \mid u(v).(\overline{v}z.\mathbf{0} \mid [\![P]\!]_\pi)) \mid x(u').\nu v'.(\overline{u'}v'.\mathbf{0} \mid v'(y).[\![Q]\!]_\pi) \\
\to \; & \nu u.(\mathbf{0} \mid u(v).(\overline{v}z.\mathbf{0} \mid [\![P]\!]_\pi) \mid \nu v'.(\overline{u}v'.\mathbf{0} \mid v'(y).[\![Q]\!]_\pi))
\end{aligned}
$$

Beispiel

Auswertung von $[\![\overline{x}z.P \mid x(y).Q]\!]_\pi$:

$$
\begin{aligned}
& [\![\overline{x}z.P \mid x(y).Q]\!]_\pi \\
= \; & \nu u.(\overline{x}u.\mathbf{0} \mid u(v).(\overline{v}z.\mathbf{0} \mid [\![P]\!]_\pi)) \mid x(u').\nu v'.(\overline{u'}v'.\mathbf{0} \mid v'(y).[\![Q]\!]_\pi) \\
\to \; & \nu u.(\mathbf{0} \mid u(v).(\overline{v}z.\mathbf{0} \mid [\![P]\!]_\pi) \mid \nu v'.(\overline{u}v'.\mathbf{0} \mid v'(y).[\![Q]\!]_\pi)) \\
\to \; & \nu v'.(\nu u.(\mathbf{0} \mid (\overline{v'}z.\mathbf{0}) \mid [\![P]\!]_\pi \mid \mathbf{0} \mid v'(y).[\![Q]\!]_\pi))
\end{aligned}
$$

Beispiel

Auswertung von $[\![\overline{x}z.P \mid x(y).Q]\!]_\pi$:

$$
\begin{aligned}
& [\![\overline{x}z.P \mid x(y).Q]\!]_\pi \\
= \; & \nu u.(\overline{x}u.\mathbf{0} \mid u(v).(\overline{v}z.\mathbf{0} \mid [\![P]\!]_\pi)) \mid x(u').\nu v'.(\overline{u'}v'.\mathbf{0} \mid v'(y).[\![Q]\!]_\pi) \\
\to \; & \nu u.(\mathbf{0} \mid u(v).(\overline{v}z.\mathbf{0} \mid [\![P]\!]_\pi) \mid \nu v'.(\overline{u}v'.\mathbf{0} \mid v'(y).[\![Q]\!]_\pi)) \\
\to \; & \nu v'.(\nu u.(\mathbf{0} \mid (\overline{v'}z.\mathbf{0}) \mid [\![P]\!]_\pi \mid \mathbf{0} \mid v'(y).[\![Q]\!]_\pi)) \\
\to \; & \nu v'.(\nu u.(\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid [\![P]\!]_\pi \mid \mathbf{0} \mid [\![Q]\!]_\pi[z/y]))
\end{aligned}
$$

Beispiel

Auswertung von $[\![\overline{x}z.P \mid x(y).Q]\!]_\pi$:

$$
\begin{aligned}
& [\![\overline{x}z.P \mid x(y).Q]\!]_\pi \\
= \; & \nu u.(\overline{x}u.\mathbf{0} \mid u(v).(\overline{v}z.\mathbf{0} \mid [\![P]\!]_\pi)) \mid x(u').\nu v'.(\overline{u'}v'.\mathbf{0} \mid v'(y).[\![Q]\!]_\pi) \\
\to \; & \nu u.(\mathbf{0} \mid u(v).(\overline{v}z.\mathbf{0} \mid [\![P]\!]_\pi) \mid \nu v'.(\overline{u}v'.\mathbf{0} \mid v'(y).[\![Q]\!]_\pi)) \\
\to \; & \nu v'.(\nu u.(\mathbf{0} \mid (\overline{v'}z.\mathbf{0}) \mid [\![P]\!]_\pi \mid \mathbf{0} \mid v'(y).[\![Q]\!]_\pi)) \\
\to \; & \nu v'.(\nu u.(\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid [\![P]\!]_\pi \mid \mathbf{0} \mid [\![Q]\!]_\pi[z/y])) \\
\equiv \; & [\![P]\!]_\pi \mid [\![Q]\!]_\pi[z/y]
\end{aligned}
$$

Beispiel

Auswertung von $[\![\overline{x}z.P \mid x(y).Q]\!]_\pi$:

$$
\begin{aligned}
& [\![\overline{x}z.P \mid x(y).Q]\!]_\pi \\
= \; & \nu u.(\overline{x}u.\mathbf{0} \mid u(v).(\overline{v}z.\mathbf{0} \mid [\![P]\!]_\pi)) \mid x(u').\nu v'.(\overline{u'}v'.\mathbf{0} \mid v'(y).[\![Q]\!]_\pi) \\
\to \; & \nu u.(\mathbf{0} \mid u(v).(\overline{v}z.\mathbf{0} \mid [\![P]\!]_\pi) \mid \nu v'.(\overline{u}v'.\mathbf{0} \mid v'(y).[\![Q]\!]_\pi)) \\
\to \; & \nu v'.(\nu u.(\mathbf{0} \mid (\overline{v'}z.\mathbf{0}) \mid [\![P]\!]_\pi \mid \mathbf{0} \mid v'(y).[\![Q]\!]_\pi)) \\
\to \; & \nu v'.(\nu u.(\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid [\![P]\!]_\pi \mid \mathbf{0} \mid [\![Q]\!]_\pi[z/y])) \\
\equiv \; & [\![P]\!]_\pi \mid [\![Q]\!]_\pi[z/y]
\end{aligned}
$$

- P kann weiter rechnen bevor z gesendet wurde
- Aber Kommunikation ist sichergestellt, nur Q kennt v'

Resultate aus Boudol 1992

Notation für geschlossene Prozesse

Definition

Ein Ausgabe-geschlossener Prozess des synchronen bzw. asynchronen π-Kalküls ist ein Prozess, so dass für jeden Output-Präfix $\overline{x}y$ gilt: Die Namen x und y sind durch Binder gebunden.

Notation für Antworten

Definition

Ein Prozess P ist eine Eingabe-Antwort, wenn gilt $P \equiv \nu x_1 \ldots \nu x_n . x(y).P' \mid Q$

Resultate aus Boudol 1992 (2)

Resultat für die Konvergenz:

Theorem

Sei P ein Ausgabe-geschlossener Prozess des synchronen π-Kalküls. Dann gilt:

$$\exists \text{ Eingabe-Antwort } P' \colon P \xrightarrow{*} P'$$
$$\text{genau dann, wenn}$$
$$\exists \text{ Eingabe-Antwort } P'' \colon [\![P]\!]_\pi \xrightarrow{*} P''$$

- Boudol zeigt noch mehr: Adäquatheit bezüglich der kontextuellen Präordnungen

Resultat von Palamidessi

- Synchroner π-Kalkül mit Summen ist nicht (sinnvoll) kodierbar in den asychronen π-Kalkül ohne Summen

Voraussetzungen:

- Übersetzung ist kompositional und $[\![P \mid Q]\!] = [\![P]\!] \mid [\![Q]\!]$
- Übersetzung ist wohl-verhaltend bezüglich Umbennenungen: $[\![\sigma(P)]\!] = \sigma([\![P]\!])$.

Nichtdeterministische Auswahl

- $P + Q$, verhält sich wie P oder Q
- Oft beschränkt: "guarded choice": Beim Auswählen muss Kommunikation stattfinden, $\pi_1.P + \pi_2.Q$
- Wir: Synchroner π-Kalkül mit Summen
- Zusätzlicher Präfix: τ = nicht-beobachtbare Aktion.
- Wir verwenden das Summenzeichen Σ und $+$

$$\begin{array}{lcll} \pi & ::= & x(y) \mid \overline{x}y \mid \tau & \text{wobei } x, y \in \mathcal{N} \\ P & ::= & \pi.P \mid P_1 \mid P_2 \mid !\,P \mid \mathbf{0} \mid \nu x.P \mid \sum_i \pi.P_i & \text{für } x \in \mathcal{N} \end{array}$$

- Strukturelle Kongruenz, neu: $P + Q \equiv Q + P$, $((P_1 + P_2) + P_3) \equiv (P_1 + (P_2 + P_3))$, $P + P \equiv P$.

Reduktion

(Silent)	$\tau.P \to P$
(SilentSum)	$\tau.P + M \to P$
(InteractSum)	$x(y).P + M \mid \overline{x}v.Q + N \to P[v/y] \mid Q$
(Interact)	$x(y).P \mid \overline{x}v.Q \to P[v/y] \mid Q$
(Par)	$P \mid Q \to P' \mid Q$, falls $P \to P'$
(New)	$\nu x.P \to \nu x.P'$, falls $P \to P'$
(StructCongr)	$P \to P'$, falls $Q \to Q'$ und $P \equiv Q$ und $P' \equiv Q'$

Polyadischer π-Kalkül

- bisher: monadischer π-Kalkül: Nur ein Name wird kommuniziert

Polyadischer π-Kalkül

- bisher: monadischer π-Kalkül: Nur ein Name wird kommuniziert
- polyadischer π-Kalkül: Tupel von Namen wird ausgetauscht
- Die Action-Präfixe π im polyadischen π-Kalkül:

$$\pi ::= x(\overrightarrow{y}) \mid \overline{x}\overrightarrow{z} \text{ wobei } x, y_i, z_i \in \mathcal{N}$$

Polyadischer π-Kalkül

- bisher: monadischer π-Kalkül: Nur ein Name wird kommuniziert
- polyadischer π-Kalkül: Tupel von Namen wird ausgetauscht
- Die Action-Präfixe π im polyadischen π-Kalkül:

$$\pi ::= x(\overrightarrow{y}) \mid \overline{x}\overrightarrow{z} \text{ wobei } x, y_i, z_i \in \mathcal{N}$$

- INTERACT-Regel:

$$(\text{INTERACT}) \quad x(\overrightarrow{y}).P \mid \overline{x}\overrightarrow{z}.Q \to P[\overrightarrow{z}/\overrightarrow{y}] \mid Q \text{ falls } |\overrightarrow{y}| = |\overrightarrow{z}|$$

- $P[\overrightarrow{z}/\overrightarrow{y}]$ meint hierbei $P[z_1/y_1, \ldots, z_n, y_n]$ wenn $|\overrightarrow{z}| = n$

Polyadischer π-Kalkül

- bisher: monadischer π-Kalkül: Nur ein Name wird kommuniziert
- polyadischer π-Kalkül: Tupel von Namen wird ausgetauscht
- Die Action-Präfixe π im polyadischen π-Kalkül:

$$\pi ::= x(\overrightarrow{y}) \mid \overline{x}\overrightarrow{z} \text{ wobei } x, y_i, z_i \in \mathcal{N}$$

- INTERACT-Regel:

$$(\text{INTERACT}) \quad x(\overrightarrow{y}).P \mid \overline{x}\overrightarrow{z}.Q \to P[\overrightarrow{z}/\overrightarrow{y}] \mid Q \text{ falls } |\overrightarrow{y}| = |\overrightarrow{z}|$$

- $P[\overrightarrow{z}/\overrightarrow{y}]$ meint hierbei $P[z_1/y_1, \ldots, z_n, y_n]$ wenn $|\overrightarrow{z}| = n$
- Verboten: Gleicher Kanal mit verschiedenen Tupellängen benutzen, z.B. $x(a,b).P \mid x(a,b,c).Q$
- Formal über Sorten (wie ein Typsystem)

Übersetzung: Polyadischer π-Kalkül in monadischen

- Idee: Schicke Elemente aus Tupel $(z_1, \ldots, z_n)$ nacheinander
- Übersetze $x(y_1, \ldots, y_n).P$ als $x(y_1). \ldots x(y_n).P'$
- und übersetze $\overline{x}(z_1, \ldots, z_n).Q$ als $\overline{x}z_1. \ldots \overline{x}z_n.Q'$

Übersetzung: Polyadischer π-Kalkül in monadischen

- Idee: Schicke Elemente aus Tupel $(z_1, \ldots, z_n)$ nacheinander
- Übersetze $x(y_1, \ldots, y_n).P$ als $x(y_1). \ldots x(y_n).P'$
- und übersetze $\overline{x}(z_1, \ldots, z_n).Q$ als $\overline{x}z_1. \ldots \overline{x}z_n.Q'$

Funktioniert nicht, $P := \overline{x}(z_1, z_2).\mathbf{0} \mid \overline{x}(z_3, z_4).\mathbf{0} \mid x(y_1, y_2).\overline{y_1}y_2.\mathbf{0}$
Möglichkeiten P zu reduzieren:

- $P \to \mathbf{0} \mid \overline{x}(z_3, z_4).\mathbf{0} \mid \overline{z_1}z_2.\mathbf{0}$
- $P \to \overline{x}(z_1, z_2).\mathbf{0} \mid \overline{z_3}z_4.\mathbf{0}$

Übersetzung: Polyadischer π-Kalkül in monadischen

- Idee: Schicke Elemente aus Tupel $(z_1, \ldots, z_n)$ nacheinander
- Übersetze $x(y_1, \ldots, y_n).P$ als $x(y_1). \ldots x(y_n).P'$
- und übersetze $\overline{x}(z_1, \ldots, z_n).Q$ als $\overline{x}z_1. \ldots \overline{x}z_n.Q'$

Funktioniert nicht, $P := \overline{x}(z_1, z_2).\mathbf{0} \mid \overline{x}(z_3, z_4).\mathbf{0} \mid x(y_1, y_2).\overline{y_1}y_2.\mathbf{0}$
Möglichkeiten P zu reduzieren:

- $P \to \mathbf{0} \mid \overline{x}(z_3, z_4).\mathbf{0} \mid \overline{z_1}z_2.\mathbf{0}$
- $P \to \overline{x}(z_1, z_2).\mathbf{0} \mid \overline{z_3}z_4.\mathbf{0}$

Übersetzung $Q := \overline{x}z_1.\overline{x}z_2.\mathbf{0} \mid \overline{x}z_3.\overline{x}z_4.\mathbf{0} \mid x(y_1).x(y_2).\overline{y_1}y_2.\mathbf{0}$
Reduktionen für Q:

- $Q \xrightarrow{*} \mathbf{0} \mid \overline{x}z_3.\overline{x}z_4.\mathbf{0} \mid \overline{z_1}z_2.\mathbf{0}$
- $Q \xrightarrow{*} \overline{x}z_1.\overline{x}z_2.\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \overline{z_3}z_4.\mathbf{0}$
- $Q \xrightarrow{*} \overline{x}z_2.\mathbf{0} \mid \overline{x}z_4.\mathbf{0} \mid \overline{z_1}z_3.\mathbf{0}$
- $Q \xrightarrow{*} \overline{x}z_2.\mathbf{0} \mid \overline{x}z_4.\mathbf{0} \mid \overline{z_3}z_1.\mathbf{0}$

Übersetzung: Polyadischer π-Kalkül in monadischen (2)

- Korrektur: Sender und Empfänger tauschen privaten Namen aus

Korrekte Übersetzung

$$
\begin{aligned}
[\![x(z_1,\ldots,z_n).P]\!]_{poly} &= x(w).w(z_1).\ldots.w(z_n).[\![P]\!]_{poly} \\
[\![\overline{x}(z_1,\ldots,z_n).P]\!]_{poly} &= \nu v.\overline{x}v.\overline{v}z_1.\ldots.\overline{v}z_n.[\![P]\!]_{poly} \\
[\![\nu x.P]\!]_{poly} &= \nu x.[\![P]\!]_{poly} \\
[\![P \mid Q]\!]_{poly} &= [\![P]\!]_{poly} \mid [\![Q]\!]_{poly} \\
[\![!\, P]\!]_{poly} &= !\, [\![P]\!]_{poly} \\
[\![\mathbf{0}]\!]_{poly} &= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Rekursive Definitionen

- Anstelle der Replikation: rekursive Prozessdefinitionen
- Konstantenanwendungen $A(x_1, \ldots, x_n)$ hinzu

$$P := \ldots \mid \cancel{!P} \mid \ldots \mid A(x_1, \ldots, x_n) \text{ wobei } x_i \in \mathcal{N}$$

- Definition für A außerhalb des Programms

$$A(x_1, \ldots, x_n) = P \quad \text{wobei } \mathsf{fn}(P) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$$

Rekursive Definitionen

- Anstelle der Replikation: rekursive Prozessdefinitionen
- Konstantenanwendungen $A(x_1, \ldots, x_n)$ hinzu

$$P := \ldots \mid \cancel{!P} \mid \ldots \mid A(x_1, \ldots, x_n) \text{ wobei } x_i \in \mathcal{N}$$

- Definition für A außerhalb des Programms

$$A(x_1, \ldots, x_n) = P \quad \text{wobei } \mathsf{fn}(P) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$$

- Neue Reduktionsregel:

$$(\textsc{Const}) \quad A(y_1, \ldots, y_n) \to P[y_1/x_1, \ldots, y_n/x_n]$$
$$\text{falls } A(x_1, \ldots, x_n) = P \text{ die Definition von } A \text{ ist}$$

Übersetzung Rekursion in Replikation, polyadisch

- Seien $\{A_1, \ldots A_n\}$ alle definierten Konstanten,
  mit Definition $A_i(\overrightarrow{x_i}) = P_i$.
- Neue Kanalnamen $a_1, \ldots, a_n$
- Jede Konstantenanwendung $A_i(\overrightarrow{y_i})$ wird durch $\langle A_i(\overrightarrow{y_i}) \rangle := \overline{a_i}\overrightarrow{y_i}.0$ ersetzt

Übersetzung Rekursion in Replikation, polyadisch

- Seien $\{A_1, \ldots A_n\}$ alle definierten Konstanten,
  mit Definition $A_i(\overrightarrow{x_i}) = P_i$.
- Neue Kanalnamen $a_1, \ldots, a_n$
- Jede Konstantenanwendung $A_i(\overrightarrow{y_i})$ wird durch $\langle A_i(\overrightarrow{y_i})\rangle := \overline{a_i}\,\overrightarrow{y_i}.0$ ersetzt
- Definitionen der A_i durch Prozesse darstellen:
  $A'_i := \mathbf{!}\, a_i(\overrightarrow{x_i}).\langle P_i\rangle$.
- Übersetzung:

$$[\![Q]\!]_{\mathit{rek}} := \nu a_1 \ldots . \nu a_n . (\langle Q\rangle \mid A'_1 \mid \ldots \mid A'_n)$$

Übersetzung Rekursion in Replikation, polyadisch

- Seien $\{A_1, \ldots A_n\}$ alle definierten Konstanten, mit Definition $A_i(\overrightarrow{x_i}) = P_i$.
- Neue Kanalnamen $a_1, \ldots, a_n$
- Jede Konstantenanwendung $A_i(\overrightarrow{y_i})$ wird durch $\langle A_i(\overrightarrow{y_i})\rangle := \overline{a_i}\,\overrightarrow{y_i}.0$ ersetzt
- Definitionen der A_i durch Prozesse darstellen: $A'_i := !\, a_i(\overrightarrow{x_i}).\langle P_i\rangle$.
- Übersetzung:

$$[\![Q]\!]_{rek} := \nu a_1 \ldots . \nu a_n . (\langle Q\rangle \mid A'_1 \mid \ldots \mid A'_n)$$

- Achtung: Nicht kompositional,z.B. $[\![Q_1 \mid Q_2]\!]_{rek} \neq [\![Q_1]\!]_{rek} \mid [\![Q_2]\!]_{rek}$.

Übersetzung: Replikation in Rekursion

- Übersetzung $[\![\cdot]\!]_{\mathit{repl}}$
- Betrachte $!\,P$ mit $\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathsf{fn}(P)$.
- Wähle neue Konstante A_P und übersetze:

$$[\![!\,P]\!]_{\mathit{repl}} := A_P(x_1, \ldots, x_n)$$

- Alle anderen Konstrukte werden homomorph übersetzt.
- Definition für die Konstante A_P:

$$A_P(x_1, \ldots, x_n) = [\![P]\!]_{\mathit{repl}} \mid A_P(x_1, \ldots, x_n)$$

Beispiel

$Q = \mathbf{!}\,\overline{x}z.\mathbf{0} \mid x(y).\mathbf{0} \mid x(w).\mathbf{0}$

Auswertung von Q:

$$\begin{aligned} Q &\equiv \mathbf{!}\,\overline{x}z.\mathbf{0} \mid \overline{x}z.\mathbf{0} \mid x(y).\mathbf{0} \mid x(w).\mathbf{0} \\ &\to \mathbf{!}\,\overline{x}z.\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid x(w).\mathbf{0} \equiv \mathbf{!}\,\overline{x}z.\mathbf{0} \mid \overline{x}z.\mathbf{0} \mid x(w).\mathbf{0} \\ &\to \mathbf{!}\,\overline{x}z.\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \equiv \mathbf{!}\,\overline{x}z.\mathbf{0} \end{aligned}$$

Beispiel

$Q = \,!\,\overline{x}z.\mathbf{0} \mid x(y).\mathbf{0} \mid x(w).\mathbf{0}$

Auswertung von Q:
$$\begin{aligned} Q &\equiv \,!\,\overline{x}z.\mathbf{0} \mid \overline{x}z.\mathbf{0} \mid x(y).\mathbf{0} \mid x(w).\mathbf{0} \\ &\to \,!\,\overline{x}z.\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid x(w).\mathbf{0} \equiv \,!\,\overline{x}z.\mathbf{0} \mid \overline{x}z.\mathbf{0} \mid x(w).\mathbf{0} \\ &\to \,!\,\overline{x}z.\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \equiv \,!\,\overline{x}z.\mathbf{0} \end{aligned}$$

Übersetzung: $[\![Q]\!]_{repl} = A(x,z) \mid x(y).\mathbf{0} \mid x(w).\mathbf{0}$
wobei $A(x,z) = \overline{x}z \mid A(x,z)$

Eine Auswertung von $[\![Q]\!]_{repl}$:
$$\begin{aligned} [\![Q]\!]_{repl} &= A(x,z) \mid x(y).\mathbf{0} \mid x(w).\mathbf{0} \\ &\to (\overline{x}z \mid A(x,z)) \mid x(y).\mathbf{0} \mid x(w).\mathbf{0} \\ &\to A(x,z) \mid \mathbf{0} \mid x(w).\mathbf{0} \\ &\to (\overline{x}z \mid A(x,z)) \mid \mathbf{0} \mid x(w).\mathbf{0} \\ &\to A(x,z) \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \end{aligned}$$

Prozess-Gleichheit im π-Kalkül

- Im π-Kalkül verschiedene Begriffe, kein einheitlicher Begriff
- Kein Terminierungsbegriff
- Oft: Terminierung von Prozessen nicht zentral, da verteilte Systeme oft in Endlosschleifen laufen und somit nicht terminieren.

Prozess-Gleichheit im π-Kalkül

- Im π-Kalkül verschiedene Begriffe, kein einheitlicher Begriff
- Kein Terminierungsbegriff
- Oft: Terminierung von Prozessen nicht zentral, da verteilte Systeme oft in Endlosschleifen laufen und somit nicht terminieren.
- Gleichheitsbegriff oft: Prozesse haben gleiche Ein- / Ausgabemöglichkeiten
- Statt Reduktion, labeled transition system
- Markierungen stellen gerade die Ein- und Ausgaben des Prozesses dar
- Unterscheidung interne Kommunikation und externe Kommunikation

Labeled Transition System

- Sichtweise der ext. Kommunikation: Wie kann ein Prozess kommunizieren, wenn man einen Kommunikationspartner hinzufügen würde?
- Prozess der Form $P_0 \equiv \nu z_1 \ldots \nu z_n . x(y).P$ mit $x, y \neq z_i$ kann eine Eingabe empfangen
- Prozess der Form $P_0 \equiv \nu z_1 \ldots \nu z_n . \overline{x}y.P$ mit $x, y \neq z_i$ kann eine Ausgabe durchführen
- Andere Variante: Ausgabe eines gebundenen Namens, d.h. für $P_0 = \nu z_1 \ldots \nu z_n . \nu y . \overline{x}y.P$ mit $x, y \neq z_i$:
  Für die Kommunikation muss $\nu y.$ verschoben weren
- Markierungen: $\alpha := \tau \mid x(y) \mid \overline{x}y \mid \overline{x}(y)$
- $\mathsf{fn}(x(y)) = \{x, y\}$ $\quad \mathsf{bn}(x(y)) = \emptyset$
  $\mathsf{fn}(\overline{x}y) = \{x, y\}$ $\quad \mathsf{bn}(\overline{x}y) = \emptyset$
  $\mathsf{fn}(\overline{x}(y)) = \{x\}$ $\quad \mathsf{bn}(\overline{x}(y)) = \{y\}$
  $\mathsf{fn}(\tau) = \emptyset$ $\quad \mathsf{bn}(\tau) = \emptyset$

Labeled Transition System (2)

Für synchronen π-Kalkül:

(In) $x(y).P \xrightarrow{x(z)} P[z/y]$

(Out) $\overline{x}y.P \xrightarrow{\overline{x}y} P$

(Open) $\nu y.P \xrightarrow{\overline{x}(y)} Q$, falls $P \xrightarrow{\overline{x}y} Q$ und $x \neq y$.

(Interact) $x(y).P \mid \overline{x}v.Q \xrightarrow{\tau} P[v/y] \mid Q$

(Par) $P \mid Q \xrightarrow{\alpha} P' \mid Q$, falls $P \xrightarrow{\alpha} P'$ und $\mathsf{n}(\alpha) \cap \mathsf{fn}(Q) = \emptyset$

(New) $\nu x.P \xrightarrow{\alpha} \nu x.P'$, falls $P \xrightarrow{\alpha} P'$ und $x \notin \mathsf{n}(\alpha)$

(StructCongr) $P \xrightarrow{\alpha} P'$, falls $Q \xrightarrow{\alpha} Q'$ und $P \equiv Q$ und $P' \equiv Q'$

- Summen, τ usw. können hinzugefügt werden

Beispiel

$$
\begin{array}{ll}
 & \nu x.(\underline{x(u).\overline{u}u.0} \mid \underline{\overline{x}w.z(a).\overline{a}b.0}) \\
\xrightarrow{\tau} & \overline{w}w.0 \mid \underline{z(a).\overline{a}b.0} \\
\xrightarrow{z(c)} & \underline{\overline{w}w}.0 \mid \overline{c}b.0 \\
\xrightarrow{\overline{w}w} & \underline{\overline{c}b}.0 \\
\xrightarrow{\overline{c}b} & 0
\end{array}
$$

Beachte: Der Name c ist frei wählbar

Harmony-Lemma

Harmony-Lemma

$$P \to Q \text{ gdw. } P \xrightarrow{\tau} Q' \text{ wobei } Q' \equiv Q$$

Starke Bisimulation

Definition

Eine binäre Relation $\mathcal{R}$ auf Prozessen ist eine **starke Bisimulation**, wenn für alle $(P, Q) \in \mathcal{R}$ gilt

- Falls $P \xrightarrow{\alpha} P'$, dann gibt es einen Prozess Q', so dass gilt $Q \xrightarrow{\alpha} Q'$ und $(P', Q') \in \mathcal{R}$
- Falls $Q \xrightarrow{\alpha} Q'$, dann gibt es einen Prozess P', so dass gilt $P \xrightarrow{\alpha} P'$ und $(P', Q') \in \mathcal{R}$.

Prozesse P und Q sind stark bisimilar (geschrieben $P \sim_{b,strong} Q$), falls es eine starke Bisimulation R mit $(P, Q) \in R$ gibt.
Die Relation $\sim_{b,strong}$ heißt **starke Bisimilarity**.

Lemma

$\sim_{b,strong}$ ist die größte starke Bisimulation.

Einschub: Analoge Definition mit Fixpunkten

- Sei $Proc$ die Menge aller Prozesse des π-Kalküls.

Sei $F : (Proc \times Proc) \to (Proc \times Proc)$ die folgende Funktion:
$(P, Q) \in F(\eta)$ genau dann, wenn:

- Falls $P \xrightarrow{\alpha} P'$, dann gibt es Q', so dass gilt $Q \xrightarrow{\alpha} Q'$ und $(P', Q') \in \eta$
- Falls $Q \xrightarrow{\alpha} Q'$, dann gibt es P', so dass gilt $P \xrightarrow{\alpha} P'$ und $(P', Q') \in \eta$

- Starke Bisimilarity ist der größte Fixpunkt der Funktion F
(die größte Teilmenge X von $Proc$, für die $F(X) = X$ gilt)
- Prinzip der Coinduktion: Jede Relation η, die dicht bezüglich F ist, ist auch im größten Fixpunkt enthalten.
- Eine Relation η ist F-dicht, wenn $\eta \subseteq F(\eta)$
- F-dichte Relation $=$ starke Bisimulation

Starke Bisimulation (2)

Starke Bisimilarity ist eine Äquivalenzrelation,
aber keine Kongruenz:

- $P = \overline{z}b.\mathbf{0} \mid a(c).\mathbf{0}$
- $Q = \overline{z}b.a(c).\mathbf{0} + a(c).\overline{z}b.\mathbf{0}$
- Es gilt $P \sim_{b,strong} Q$:
  $\mathcal{R} = \{(P,Q), (a(c).\mathbf{0}, a(c).\mathbf{0}), (\overline{z}b.\mathbf{0}, \overline{z}b.\mathbf{0}), (\mathbf{0},\mathbf{0})\}$ ist eine starke Bisimulation
- Allerdings gilt $x(z).P \not\sim_{b,strong} x(z).Q$
- Damit gilt nicht $P \sim_{b,strong} Q \implies C[P] \sim_{b,strong} C[Q]$ für jeden Kontext C,
  d.h. $\sim_{b,strong}$ ist keine Kongruenz.

Starke volle Bisimulation

Definition

Zwei Prozesse P, Q sind stark voll bisimilar (Notation $P \sim_{b,strong,full} Q$), wenn für alle Substitutionen σ, die Namen für Namen ersetzen gilt: $\sigma(P) \sim_{b,strong} \sigma(Q)$.

- Man kann nachweisen, dass $\sim_{b,strong,full}$ eine Kongruenz ist.

Bisimulation

- Vernachlässigung von τ-Transitionen
- $\overset{\tau}{\Rightarrow}$:= reflexiv-transitive Hülle von $\overset{\tau}{\rightarrow}$
- $\overset{\alpha}{\Rightarrow} := \overset{\tau}{\Rightarrow}\overset{\alpha}{\rightarrow}\overset{\tau}{\Rightarrow}$

Eine binäre Relation $\mathcal{R}$ auf Prozessen ist eine **Bisimulation**, wenn für alle $(P, Q) \in \mathcal{R}$ gilt

- Falls $P \overset{\alpha}{\rightarrow} P'$, dann gibt es einen Prozess Q', so dass gilt $Q \overset{\alpha}{\Rightarrow} Q'$ und $(P', Q') \in \mathcal{R}$
- Falls $Q \overset{\alpha}{\rightarrow} Q'$, dann gibt es einen Prozess P', so dass gilt $P \overset{\alpha}{\Rightarrow} P'$ und $(P', Q') \in \mathcal{R}$.

Prozesse P und Q sind bisimilar (geschrieben $P \sim_b Q$), falls es eine Bisimulation $\mathcal{R}$ mit $(P, Q) \in \mathcal{R}$ gibt. Die Relation $\sim_b$ heißt Bisimilarity.
Zwei Prozesse P, Q sind voll bisimilar ($P \sim_{b,full} Q$) falls $\sigma(P) \sim_b \sigma(Q)$ für alle Substitutionen σ gilt.

Bisimulation (2)

- Bisimilarity ist keine Kongruenz
- Volle Bismilarity ist eine Kongruenz.

Satz

Für alle Prozesse P, Q gilt:

- $P \sim_{b,strong} Q \implies P \sim_b Q$
- $P \sim_{b,strong,full} Q \implies P \sim_{b,full} Q$.

Weiterhin gilt $\sim_{b,strong} \neq \sim_b$ und $\sim_{b,strong,full} \neq \sim_{b,full}$.

Barbs

Für Prozess P schreiben wir

- $P \downarrow_x$, falls $P \xrightarrow{x(y)} P'$
- $P \downarrow_{\overline{x}}$, falls $P \xrightarrow{\overline{x}y} P'$ oder $P \xrightarrow{\overline{x}(y)} P'$
- für $\beta \in \{x, \overline{x}\}$: $P \Downarrow_\beta$ falls es einen Prozess Q gibt, so dass $P \xrightarrow{\tau,*} Q$ und $Q \downarrow_\beta$

Barbs

Lemma

Für alle Prozesse des synchronen π-Kalküls (mit Summen) gilt:

- $P \downarrow_x$ *genau dann, wenn* $P \equiv \nu v_1 \ldots \nu v_n.(x(y).P' + M \mid Q)$ *wobei* $x \neq v_i$.
- $P \downarrow_{\overline{x}}$ *genau dann, wenn* $P \equiv \nu v_1 \ldots \nu v_n.(\overline{x}y.P' + M \mid Q)$ *wobei* $x \neq v_i$.

Deshalb: Man kann auch Reduktion statt labeled Transitionen verwenden!

Barbed Bisimulation

Definition

Eine binäre Relation $\mathcal{R}$ auf Prozessen ist eine barbed Bisimulation falls für alle $(P, Q) \in \mathcal{R}$ gilt:

- Falls $P \downarrow_x$ (bzw. $P \downarrow_{\overline{x}}$), dann $Q \Downarrow_x$ (bzw. $(Q \Downarrow_{\overline{x}})$
- Falls $Q \downarrow_x$ (bzw. $Q \downarrow_{\overline{x}}$), dann $P \Downarrow_x$ (bzw. $(P \Downarrow_{\overline{x}})$
- Falls $P \xrightarrow{\tau} P'$, dann existiert Q' mit $Q \stackrel{\tau}{\Rightarrow} Q'$ und $(P', Q') \in \mathcal{R}$
- Falls $Q \xrightarrow{\tau} Q'$, dann existiert P' mit $P \stackrel{\tau}{\Rightarrow} P'$ und $(P', Q') \in \mathcal{R}$

Zwei Prozesse P, Q sind barbed bisimilar (geschrieben $P \sim_{b,barbed} Q$) falls es eine barbed Bisimulation gibt, die (P, Q) enthält.

Barbed Kongruenz

Definition

Zwei Prozesse P, Q sind barbed kongruent (geschrieben $P \sim_{c,b,barbed} Q$) falls für alle Kontexte C gilt: $C[P] \sim_{b,barbed} C[Q]$.

Barbed Kongruenz

Definition

Zwei Prozesse P, Q sind barbed kongruent (geschrieben $P \sim_{c,b,barbed} Q$) falls für alle Kontexte C gilt: $C[P] \sim_{b,barbed} C[Q]$.

Theorem

Für alle Prozesse P, Q gilt:

$P \sim_{b,full} Q \implies P \sim_{c,b,barbed} Q$

Es ist unbekannt, ob die Umkehrung dieser Implikation gilt.

May-Testing

Die may-testing Präordnung $\leq_{may}$:

$P \leq_{may} Q$ gdw. für alle Kontexte C, für alle Namen x:
$C[P] \Downarrow_x \implies C[Q] \Downarrow_x$ und $C[P] \Downarrow_{\overline{x}} \implies C[Q] \Downarrow_{\overline{x}}$.

May-testing Äquivalenz $\sim_{may}$:
$P \sim_{may} Q$ gdw. $P \leq_{may} Q$ und $Q \leq_{may} P$

May-testing Äquivalenz

Satz

Die may-testing Äquivalenz ist eine Kongruenz

$\sim_{may}$ ist sehr grob-körnig:

Satz

Für alle Prozesse P, Q gilt: $P \sim_{c,b,barbed} Q \implies P \sim_{may} Q$.

Die Umkehrung gilt nicht, z.B.
$a(x).\mathbf{0} \oplus (b(x).\mathbf{0} \oplus c(x).\mathbf{0})$ und $(a(x).\mathbf{0} \oplus b(x).\mathbf{0}) \oplus c(x).\mathbf{0}$
wobei $P \oplus Q := \tau.P + \tau.Q$

May-testing Äquivalenz

Zu grob:

$x(y).\mathbf{0} \oplus \mathbf{0}$ und $x(y).\mathbf{0}$ sind may-testing äquivalent!

Should-Testing

Should-Barb

Für $\mu \in \{x, \overline{x}\}$ schreiben wir $P \Downarrow_\mu$ (P muss einen Barb μ haben), falls

$$\forall Q : P \xrightarrow{*} Q \implies Q \Downarrow_\mu .$$

should-testing Präordnung $\leq_{should}$:

$P \leq_{should} Q$ gdw. für alle Kontexte C, für alle Namen x:
$C[P] \Downarrow_x \implies C[Q] \Downarrow_x$ und $C[P] \Downarrow_{\overline{x}} \implies C[Q] \Downarrow_{\overline{x}}$.

Should-testing Äquivalenz $\sim_{should}$:
$P \sim_{should} Q$ gdw. $P \leq_{should} Q$ und $Q \leq_{should} P$

Should-Testing

Satz

Für alle Prozesse P, Q gilt:
$P \sim_{c,b,barbed} Q \implies P \sim_{should} Q.$

Satz

Für alle Prozesse P, Q gilt:
$P \sim_{should} Q \implies P \sim_{may} Q.$

Zusammenfassung

Theorem

$\sim_{b,strong,full} \subseteq \sim_{b,full} \subseteq \sim_{b,c,barbed} \subseteq \sim_{should} \subseteq \sim_{may}$