Konsensus und die Herlihy-Hierarchie

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 2. November 2020

Übersicht

1. Einleitung
2. Motivationsbeispiel: Zwei Generäle-Problem
3. Das Konsensusproblem
4. Die Konsensus-Zahl
5. Universalität

Fragestellung

- Jede Menge Nebenl. Objekte: Atomares Register, RMW-Objekt, Test-and-set-Objekt, usw.
- Welche Objekte sind „besser“ als die anderen?
- Was bedeutet „besser“?

Intuitiv klar:

- Atomares Register ist eher schwach (z.B. da Mutual-Exklusion schwer)
- RMW-Objekt ziemlich stark, kann viele andere Objekte implementieren

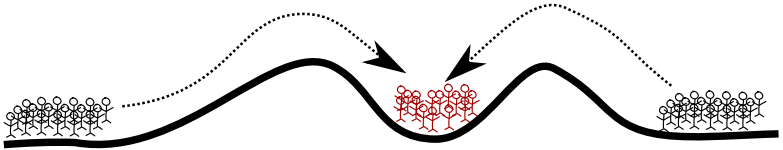
Herlihy's Modell

- Maurice Herlihy hat dies 1991 untersucht / formalisiert
- aber: Anderes Modell!
- Modell: Prozesse können jederzeit abstürzen
- Modellierung: Prozess bleibt vor einem Kommando hängen

Beachte: Alle gesehenen Mutual-Exklusion Algorithmen vertragen keine Abstürze!

Ein Beispiel für abstürzende Prozesse

Das Zwei-Generäle-Problem (auch Coordinated-Attack)

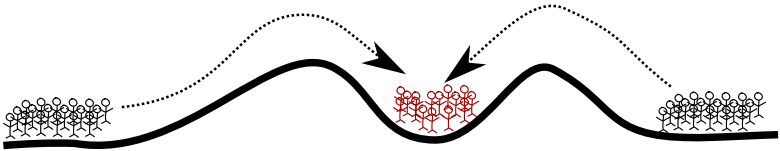


Fakten:

- Angriff nur erfolgreich, wenn beide Divisionen zeitgleich angreifen
- Kommunikation nur über **Boten**
- Boten müssen durch das Feindesland und kommen daher nicht immer an

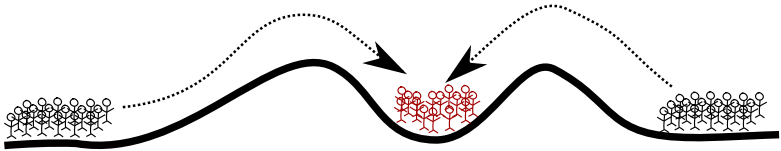
Problem: Wie sprechen sich die Generäle ab?

Zwei Generäle-Problem



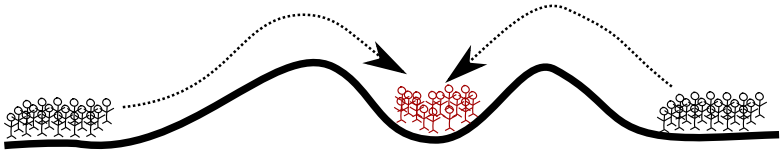
- Rechter General schickt Boten los: “Angriff um 12:00 mittags”

Zwei Generäle-Problem



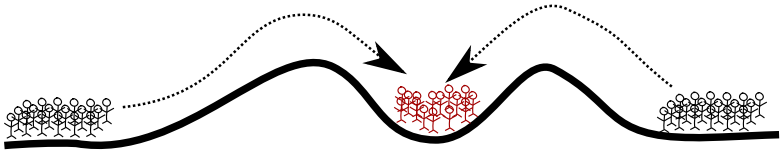
- Rechter General schickt Boten los: “Angriff um 12:00 mittags”
- Rechter General kann nicht sicher sein, dass der Bote ankommt
  $\Rightarrow$ wartet auf Bestätigung vom linken General

Zwei Generäle-Problem



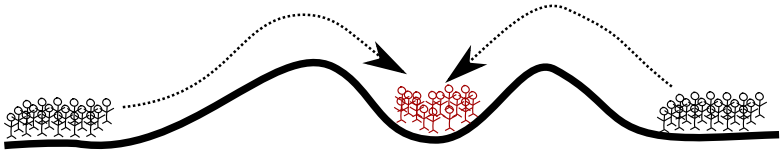
- Rechter General schickt Boten los: “Angriff um 12:00 mittags”
- Rechter General kann nicht sicher sein, dass der Bote ankommt
  $\Rightarrow$ wartet auf Bestätigung vom linken General
- Linker General schickt Boten los: “Nachricht erhalten”

Zwei Generäle-Problem



- Rechter General schickt Boten los: “Angriff um 12:00 mittags”
- Rechter General kann nicht sicher sein, dass der Bote ankommt
  $\Rightarrow$ wartet auf Bestätigung vom linken General
- Linker General schickt Boten los: “Nachricht erhalten”
- Linker General kann nicht sicher sein, dass der Bote ankommt
  $\Rightarrow$ wartet auf Bestätigung vom rechten General

Zwei Generäle-Problem

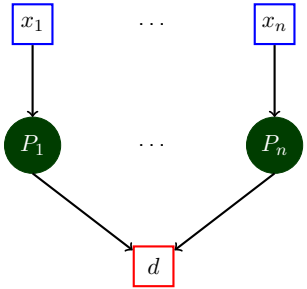


- Rechter General schickt Boten los: “Angriff um 12:00 mittags”
- Rechter General kann nicht sicher sein, dass der Bote ankommt
  $\Rightarrow$ wartet auf Bestätigung vom linken General
- Linker General schickt Boten los: “Nachricht erhalten”
- Linker General kann nicht sicher sein, dass der Bote ankommt
  $\Rightarrow$ wartet auf Bestätigung vom rechten General
- Rechter General schickt Boten los: “Nachricht erhalten”
- usw.

Tatsächlich: Problem ist unlösbar in diesem Modell!

Das Konsensusproblem

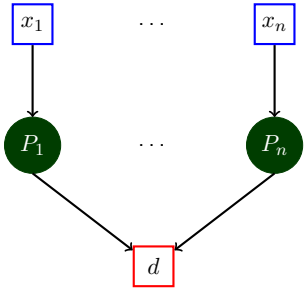
- n Prozesse, die auch abstürzen können
- Prozess i erhält einen **Eingabewert** $x_i \in \{0, 1\}$
- Programmiere die Prozesse, so dass alle (nicht-abstürzenden) Prozesse sich für einen gemeinsamen **Entscheidungswert** $d \in \{0, 1\}$ entscheiden



- **Übereinstimmung**: Alle nicht-abgestürzten Prozesse entscheiden sich für den gleichen Wert d.
- **Gültigkeit**: $d \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, d.h. d ist einer der Eingabewerte.

Das Konsensusproblem

- n Prozesse, die auch abstürzen können
- Prozess i erhält einen **Eingabewert** $x_i \in \{0, 1\}$
- Programmiere die Prozesse, so dass alle (nicht-abstürzenden) Prozesse sich für einen gemeinsamen **Entscheidungswert** $d \in \{0, 1\}$ entscheiden



- **Übereinstimmung**: Alle nicht-abgestürzten Prozesse entscheiden sich für den gleichen Wert d.
- **Gültigkeit**: $d \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, d.h. d ist einer der Eingabewerte.

Beachte: Übereinstimmung $\Rightarrow$ Algorithmus ist wait-frei:
Jeder nicht-abstürzende Prozess entscheidet sich nach endlich vielen Schritten

Das Konsensusproblem (2)

Bei nicht-abstürzenden Prozessen wäre das Problem einfach:

- Alle Prozesse teilen sich (über gemeinsamen Speicher) untereinander alle ihre Eingabewerte mit
- anschließend berechnet jeder Prozess $d = f(x_1, \ldots, x_n) = d$
- wobei f eine feste Funktion ist, die alle Prozesse kennen, z.B. $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1$.

Lösung mit dreiwertigem RMW-Objekt

Objekte und Initialisierung:
x: RMW-Objekt mit den möglichen Werten $\bot, 0, 1$, initial $\bot$
x_i: Eingabewert von Prozess i
d_i: Entscheidungswert, den Prozess i trifft.

Programm des i. Prozesses

(1) $d_i :=$ *read-modify-write*(x,f_i);
(2) `if` $d_i = \bot$ `then`
$d_i := x_i$;

Funktion f_i des i. Prozesses

```
function f_i(v)
  if v=⊥ then return x_i
  else return v
end function
```

Lösung mit dreiwertigem RMW-Objekt

Objekte und Initialisierung:
x: RMW-Objekt mit den möglichen Werten $\bot, 0, 1$, initial $\bot$
x_i: Eingabewert von Prozess i
d_i: Entscheidungswert, den Prozess i trifft.

Programm des i. Prozesses

(1) $d_i :=$ *read-modify-write*(x,f_i);
(2) `if` $d_i = \bot$ `then`
$d_i := x_i$;

Funktion f_i des i. Prozesses

`function` f_i(v)
`if` v=$\bot$ `then return` x_i
`else return` v
`end function`

} erster Prozess setzt sein x_i als neuen Wert, alle anderen nicht-abstürzenden Prozesse lesen diesen Wert
$\Rightarrow$ alle d_i-Werte identisch

Lösung des Konsensusproblem

Mit dreiwertigem RMW-Objekt:

- Der Algorithmus ist eine wait-freie Lösung
- für beliebig viele Prozesse

Resultat für atomare Register mit *read* und *write*:
Selbst für 2 Prozesse und nur einen Absturz nicht lösbar:

Theorem

Es gibt keinen Konsensus-Algorithmus für atomares *read* und *write*, der einen Absturz tolerieren kann.

Folgerung: Atomare Register können kein RMW-Objekt simulieren

Beweisskizze

- Statt direkt mit Abstürzen zu argumentieren zeigen wir:

  Ein wait-freier Konsensusalgorithmus für atomare Register
  und 2 Prozesse existiert nicht

- Algorithmen, die Abstürze tolerieren müssen wait-frei sein, denn:

  nicht wait-frei
  $\Longrightarrow$ Prozess wartet auf Bedingung, die ein anderer Prozess wahr macht
  $\Longrightarrow$ Endlosschleife, wenn anderer Prozess abstürzt
  $\Longrightarrow$ Absturz nicht tolerierbar

Beweisskizze (2)

- Wir verwenden Berechnungsbäume, um die Ausführung zweier Prozesse P_1 und P_2 zu betrachten
- Berechnungsbaum:
  - Knoten: Zustände der Prozesse und des Speichers
  - Kanten: Wesentliche Schritte, d.h. Lese- oder Schreiboperation auf dem gemeinsamen Speicher (interne Schritte sind zusammengefasst)
  - Kante nach links = Schritt von P_1
  - Kante nach rechts = Schritt von P_2
  - ...

Beweisskizze (3)

- Berechnungsbaum:
  - ...
  - Blätter sind mit Entscheidungswert $\in \{0, 1\}$ markiert.
  - Innere Knoten mit den noch möglichen Entscheidungswerten.
  - Bivalenter Knoten: Markierung 0 und 1
  - Univalenter Knoten: Markierung 0 (0-valent) oder Markierung 1 (1-valent)
  - Da Algorithmus wait-frei, ist der Baum endlich!

Beweisskizze (4)

Aussage:

Jeder 2-Prozess-Konsensusalgorithmus hat einen bivalenten Anfangszustand.

Beweis:

- Nehme an P_1 hat Eingabewert $x_1 = 0$ und P_2 hat Eingabewert $x_2 = 1$.
- Wenn nur P_1 Schritte macht (linkester Pfad im Baum), dann muss P_1 als Entscheidungswwert 0 berechnen
- Wenn nur P_2 Schritte macht, dann muss als Entscheidungswert 1 berechnet werden.

Beweisskizze (5)

Ein Knoten ist **kritisch**, wenn er bivalent ist und jeder Nachfolger ist univalent.

Aussage:

> Jeder Berechnungsbaum mit bivalenten Anfangszustand
> zu einem Konsensusalgorithmus hat einen kritischen Knoten.

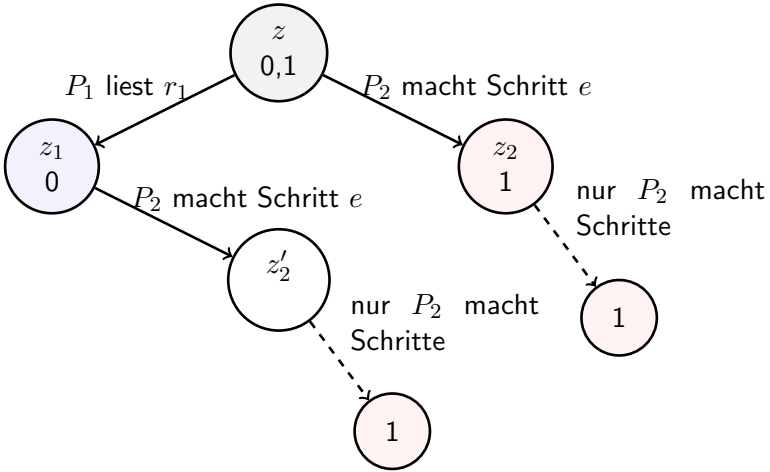
Beweis:

- Angenommen das gilt nicht.
- Starte mit einem bivalenten Anfangszustand.
- Solange es Schritte gibt, die zu einem bivalenten Zustand führen, führe diese Schritte aus.
- Wenn das unendlich lange möglich ist, dann ist der Algorithmus nicht wait-frei. Widerspruch. □

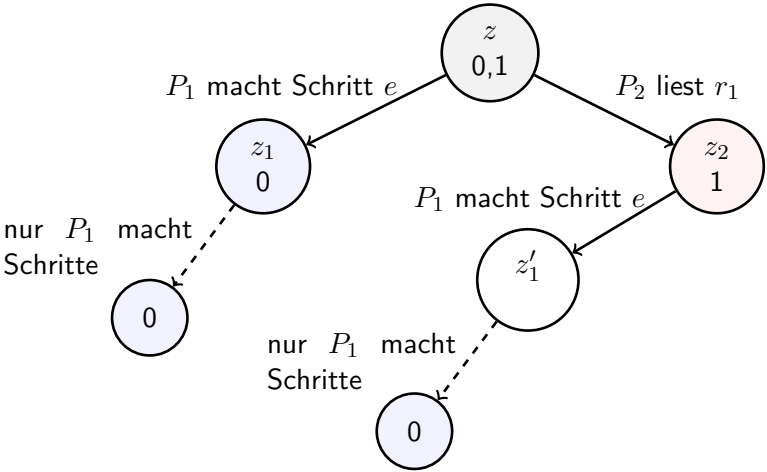
Beweisskizze (6)

- Sei nun ein Konsensusalgorithmus für 2 Prozesse gegeben.
- Gehe zu einem kritischem bivalenten Zustand z
- O.b.d.A. linkes Kind ist 0-valent, rechtes Kind ist 1-valent
- Untersuche alle Fälle.

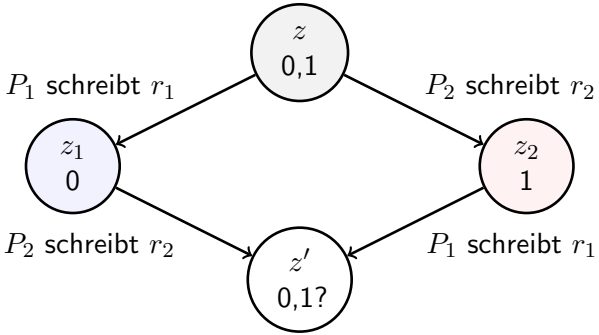
Beweisskizze (7)



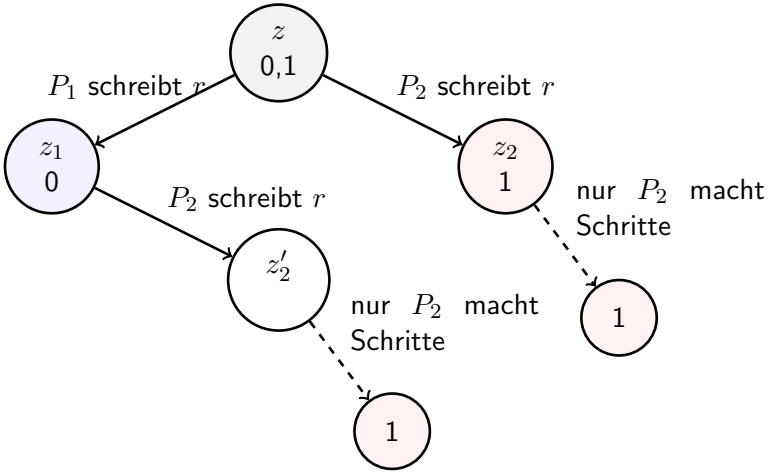
Beweisskizze (8)



Beweisskizze (9)



Beweisskizze (10)



Die Konsensus-Zahl

Definition

Für ein nebenläufiges Objekt vom Typ o ist die **Konsensus-Zahl** $\mathbb{CN}(o)$ die größte Zahl an Prozessen n für die man das Konsensus-Problem für n Prozesse lösen kann, indem man beliebig viele Objekte vom Typ o und beliebig viele atomare Register (mit *read* und *write*) verwendet.

Ist die Anzahl unbeschränkt, so sei $\mathbb{CN}(o) = \infty$.

Konsensus-Hierarchie

$\mathbb{CN}(o)$	Objekt o
1	atomares Register mit *read* und *write*
2	test-and-set-Objekt, fetch-and-increment-Objekt, fetch-and-add-Objekt, swap-Objekt, read-modify-write-Bit
$\Theta(\sqrt{m})$	swap^m-Objekt
$2m-2$	m-Register mit m-facher Zuweisung ($m > 1$)
∞	(drei-wertiges) RMW-Objekt, Compare-and-swap-Objekt, Sticky-Bit

Eigenschaften der Konsensus-Hierarchie

Theorem

Wenn o_1 und o_2 zwei Objekte sind mit $\mathbb{CN}(o_1) < \mathbb{CN}(o_2)$,
dann gilt für ein System mit $\mathbb{CN}(o_2)$ Prozessen:

- Es gibt keine wait-freie Implementierung von Objekt o_2
  ausschließlich mit Objekten vom Typ o_1 und atomaren Registern.
- Es gibt eine wait-freie Implementierung von Objekt o_1
  ausschließlich mit Objekten vom Typ o_2 und atomaren Registern.

- Für Teil 1: Gäbe es eine Implementierung von o_2-Objekten mit o_1-Objekten, könnte man damit auch das Konsensusproblem für $\mathbb{CN}(o_2)$ Prozesse lösen. Dann gilt $\mathbb{CN}(o_1) \geq \mathbb{CN}(o_2)$. Widerspruch!
- Für Teil 2: Die Aussage folgt aus dem nächsten Theorem (nächste Folie), welches auch besagt: Mit o_2-Objekten und atomaren Registern kann man jedes Objekt mit sequentieller Beschreibung für $\mathbb{CN}(o_2)$ Prozesse wait-frei implementieren.

Universalität

Theorem

Ein Objekt o mit $\mathbb{CN}(o) \geq n$ ist universell in einem System mit n Prozessen. D.h. jedes wait-freie Objekt (mit einer sequentiellen Beschreibung) kann durch Objekte vom Typ o und atomaren Registern in einem System mit n Prozessen implementiert werden.

Bemerkungen:

- Wir verzichten auf den genauen Beweis (dieser ist in der Literatur zu finden).
- Wesentliche Ideen des Beweises:
  - Jeder Prozess speichert die Zugriffe auf die Objekte und rechnet die Nachfolgezustände der Objekte solange aus bis sein Zugriff stattfindet.
  - Ausrechnen ist aufgrund der sequentiellen Beschreibung kein echtes Problem.
  - Die Hürden sind:
    - Wann führt welcher Prozess eine Operation aus?
      Für diese Entscheidungen wird der Konsensusalgorithmus verwendet!
    - Sicherstellen, dass die Operationen wait-frei sind.

Universalität (2)

Konsequenzen des Theorems:

- Universelle Objekte können viele andere Objekte implementieren (unabhängig vom Konsensus-Problem)
- Objekte mit Konsensus-Zahl $\geq n$ "reichen aus".