Grundlagen der Analysis [GdA]

Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. David Sabel

Lehr- und Forschungseinheit für Theoretische Informatik
Institut für Informatik
Ludwig-Maximilians-Universität München
Oettingenstr. 67
80538 München
Email: david.sabel@ifi.lmu.de

Dieses Skript basiert auf dem Skript von Dr. Ulrich Schöpp zur Vorlesung „Grundlagen der Analysis“ im WS 2018/19 an der LMU, welches freundlicherweise zur Weiterverwendung zur Verfügung gestellt wurde.

Stand: 5. Februar 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Vorlesung orientiert sich in Inhalt und Notation am Buch *Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen* von Otto Forster (For16). Empfehlenswert ist auch das Buch (Gri15). Beide Bücher sind als eBook für die Studierenden an der LMU kostenlos über die Universitätsbibliothek abrufbar (Links sind auf der Vorlesungswebseite zu finden).

Dieses Dokument enthält die Auswahl der Definitionen und Sätze, die in der Vorlesung behandelt werden. Es ist nicht als vollständiges Vorlesungsskript zu verstehen, sondern als Verzeichnis des relevanten Stoffes. Für Erklärungen der Definitionen und Sätze sei auf die Vorlesung oder das Buch verwiesen.

2 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Wir schreiben $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen, d.h. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Wir schreiben $\mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3, \dots\}$ für die natürlichen Zahlen ohne 0. Wie üblich verwenden wir $\mathbb{Z}$ für die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Q}$ für die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ (wobei man äquivalente Brüche als gleich betrachtet), $\mathbb{R}$ für die Menge der reellen Zahlen und $\mathbb{C}$ für die Menge der komplexen Zahlen. Die Definition der reellen Zahlen und der komplexen Zahlen folgen noch.

Wir verwenden häufig das *Summenzeichen*:

Definition 2.1 (Summenzeichen). *Für jede ganze Zahl i mit $m \leq i \leq n$ sei a_i eine reelle Zahl. Dann definieren wir*

$$\sum_{i=m}^{n} a_i := a_m + a_{m+1} + \dots a_n.$$

Für $m = n$ ist daher $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i = a_m$ Für $m > n$ definieren wir die leere Summe *als $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i := 0$*

In Beweisen verwenden wir das Prinzip der vollständigen Induktion:

Definition 2.2 (Beweisprinzip der Vollständigen Induktion). *Um zu zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt, genügt es die folgenden beiden Aussagen zu zeigen:*

1. *(Induktionsanfang): $A(0)$ gilt.*
2. *(Induktionsschritt): Für eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $A(n)$ gilt, dann auch $A(n+1)$.*

Wir demonstrieren die vollständige Induktion im Beweis des folgenden Satzes

Satz 2.3 (Gaußsche Summenformel). *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$.*

Beweis. Wir zeigen den Satz durch Induktion über n, d.h. die Aussage $A(n)$ ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$.

- Induktionsanfang: Die zu zeigende Aussage $A(0)$ ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{0} i = 0$, die direkt nach Definition der Summe gilt.

- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige Zahl. Wir dürfen $A(n)$ annehmen und müssen $A(n+1)$ zeigen. Angenommen $A(n)$ gilt, d.h. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$. Wir müssen $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ zeigen. Es gilt $\sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + n + 1$ nach Definition. Nach Annahme ist letzteres gleich $\frac{(n+1)n}{2} + n + 1$. Durch Ausrechnen erhält man $\frac{(n+1)n}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)n + 2n + 2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$, also insgesamt die zu zeigende Eigenschaft. □

Zum Einüben zeigen wir noch einen Satz:

Satz 2.4 (Geometrische Reihe). *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$ gilt:* $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

Beweis. Wir zeigen den Satz durch Induktion über n, d.h. die Aussage $A(n)$ ist $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ für $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$.

- Induktionsanfang: Die zu zeigende Aussage $A(0)$ ist $\sum_{i=0}^{0} x^i = \frac{1 - x^{0+1}}{1 - x}$. Durch Umformen erhält man: $\sum_{i=0}^{0} x^i = x^0 = 1 = \frac{1 - x^1}{1 - x}$
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige Zahl. Wir dürfen $A(n)$ annehmen und müssen $A(n+1)$ zeigen. Angenommen $A(n)$ gilt, d.h. $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Wir müssen $\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$. zeigen. Wir formen um:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} x^i = (\sum_{i=0}^{n} x^i) + x^{n+1} \overset{I.V.}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + \frac{x^{n+1}(1 - x)}{1 - x} \\
= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1}(1 - x)}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x \cdot x^{n+1}}{1 - x} \\
= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}
\end{aligned}
$$
□

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion kann leicht verallgemeinert werden zu:

Definition 2.5 (Beweisprinzip der Vollständigen Induktion, mit variabler Basis). *Um zu beweisen, dass eine Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ gilt, genügt es zu zeigen, dass:*

1. *(Induktionsanfang): $A(n_0)$ gilt.*
2. *(Induktionsschritt): Für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: Wenn $A(n)$ gilt, dann auch $A(n+1)$.*

Z.B. können wir damit den folgenden Satz zeigen:

Satz 2.6. *Für alle $n \geq 3 \in \mathbb{N}$ gilt:* $n + 1 < n^2$

Beweis. Verwende vollständige Induktion über n.

- Induktionsanfang $n = 3$: $3 + 1 = 4 < 9 = 3^2$
- Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei $n \geq 3$. Nehme als Induktionssvoraussetzung an, dass $n + 1 < n^2$ gilt. Schließe für $n+1$: $(n+1)+1 \overset{I.V.}{<} n^2 + 1 \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. □

Eine weitere Verallgemeinerung ist die sogenannte starke Induktion:

Definition 2.7 (Starke Induktion). *Um zu beweisen, dass eine Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ gilt, genügt es zu zeigen, dass:*

> *Für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:*
> *Wenn $A(k)$ für alle $n_0 \leq k \leq n-1$ gilt, dann gilt auch $A(n)$.*

Die Korrektheit dieses Induktionsschemas, lässt sich mit der „normalen" Induktion beweisen: Wir nehmen zunächst an, dass die Voraussetzung des Induktionsschemas gilt, d.h.

(*) Für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gelte: Wenn $A(k)$ für alle $n_0 \leq k \leq n-1$ gilt, dann gilt auch $A(n)$.

Nun sei $B(n) :=$ Aussage $A(k)$ gilt für $n_0 \leq k \leq n$.

Wir zeigen, dass $B(n)$ für alle $n \geq n_0$ gilt mit vollständiger Induktion:

- Für den Induktionsanfang: Aus (*) folgt, dass

  Wenn $A(k)$ für alle $n_0 \leq k \leq n_0 - 1$, dann gilt auch $A(n_0)$.

  Die Aussage ist äquivalent dazu, dass $A(n_0)$ gilt, und damit gilt auch $B(n_0)$.
- Induktionsschritt: Nehme an, dass $B(n)$ gilt. Dann gilt $A(k)$ für alle k mit $n_0 \leq k \leq n$. Mit der Voraussetzung (*) folgt: $A(n)$ gilt. Damit folgt $A(k)$ für alle k mit $n_0 \leq k \leq n+1$, d.h. $B(n+1)$ gilt.

Damit gilt $B(n)$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt aber sofort, dass auch $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Ein Beispiel für die starke Induktion ist der Beweis des folgenden Satzes („Produkt" erlaubt dabei auch eine einzelne Zahl):

Satz 2.8. *Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ lässt sich als Produkt endlich vieler Primzahl schreiben.*

Beweis. Mit starker Induktion über $n \geq 2$ Betrachte zunächst als Basis den Fall $n = 2$. Dann gilt die Aussage, da 2 eine Primzahl ist.

Für den Induktionsschritt sei $n > 2 \in \mathbb{N}$, und nehme an, dass sich alle Zahlen $2 \leq k \leq n-1$ als Produkt von Primzahlen schreiben lassen.

Wenn n eine Primzahl ist, dann gilt die Aussage. Wenn n keine Primzahl ist, dann gibt es ein $2 \leq q \leq n-1$ dass n teilt, d.h. n lässt sich $n = q \cdot m$ schreiben, wobei auch $2 \leq m \leq n-1$ gilt. Die Induktionsvoraussetzung zeigt, dass sich m und auch q jeweils alls Produkt von Primzahlen schreiben lassen, daher lässt sich n auch als Produkt von Primzahlen schreiben. □

Definition 2.9. *Das Produktzeichen ist Π. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}$. Dann ist $\prod_{k=m}^{n} a_i := a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n$ (falls $n \geq m$) und $\prod_{k=m}^{n} a_i :== 1$ falls $m > n$ (leeres Produkt).*

Definition 2.10 (Fakultät)**.** *Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ (die* Fakultät von n*) definiert durch* $n! = \prod k = 1^n k = 1 \cdot \dots \cdot n$*. Genauer:* $0! = 1$ *und* $(n+1)! = n!(n+1)$*.*

Satz 2.11. *Die Anzahl aller möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge $\{A_1, \dots, A_n\}$ (mit $n \geq 1$) ist $n!$.*

Beweis. Durch vollständige Induktion über n. Für den Induktionsanfang $n = 1$, ist die Menge $\{A_1\}$. Diese kann man nur als (A_1) anordnen und $1! = 1$. D.h. die Behauptung gilt für $n = 1$.

Für Induktionsschritt $(n \to n+1)$ verwenden wir als Induktionsannahme, dass $\{A_1, \dots, A_n\}$ auf $n!$ mögliche Weisen angeordnet werden kann. Für jede diese Anordnungen $(A_{i_1}, \dots, A_{i_n})$ mit $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$ können wir A_{n+1} an $n+1$ verschiedenen Positionen einfügen. D.h. es gibt $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ verschiedene Anordnungen von $\{A_1, \dots, A_{n+1}\}$. □

3 Die reellen Zahlen

Wir definieren die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht direkt, sondern charakterisieren sie durch Axiome. Es gibt drei Arten von Axiomen:

- Körperaxiome (Gesetze der Grundrechenarten)
- Anordnungsaxiome (Gesetze für $<$)
- Vollständigkeitsaxiom (Lückenlosigkeit von $\mathbb{R}$)

3.1 Körperaxiome

Die Körperaxiome sagen im Wesentlichen, dass die reellen Zahlen über die Grundrechenarten $+$, $-$, $\cdot$, $/$ und die Zahlen $0 \in \mathbb{R}$ und $1 \in \mathbb{R}$ verfügen, die sich wie gewohnt verhalten.

Wir geben die neun Körperaxiome aber nun doch genauer an.

Definition 3.1 (Körperaxiome für $\mathbb{R}$)**.** *Auf $\mathbb{R}$ sind Operationen $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert, die den neun Körperaxiomen genügen:*

Axiome der Addition

(A1) *Assoziativgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $(x + y) + z = x + (y + z)$*

(A2) *Kommutativgesetz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x + y = y + x$*

(A3) *Existenz der Null: Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$*

(A4) *Existenz des Negativen: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert $-x \in \mathbb{R}$, sodass $x + (-x) = 0$.*

Axiome der Multiplikation

(M1) *Assoziativgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $(xy)z = x(yz)$*

(M2) *Kommutativgesetz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $xy = yx$*

(M3) *Existenz der Eins: Es gibt eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$*

(M4) *Existenz des Inversen: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ existiert $x^{-1} \in \mathbb{R}$, sodass $xx^{-1} = 1$. Statt $b^{-1}a$ schreibt man auch a/b oder $\frac{a}{b}$.*

Distributivgesetz

(D) *Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $x(y + z) = xy + xz$*

Bereits aus den Axiomen der Addition kann man folgende Eigenschaften folgern:

Satz 3.2.

(3.1) *Die Zahl $0 \in \mathbb{R}$ ist eindeutig durch ihre Eigenschaft bestimmt.*

(3.2) *Das Negative einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist eindeutig durch ihre Eigenschaft bestimmt.*

(3.3) *Es gilt $-0 = 0$.*

(3.4) *Die Gleichung $a + x = b$ hat eine eindeutige Lösung: $x = b - a$.*

(3.5) *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $-(-x) = x$.*

(3.6) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $-(x + y) = -x - y$.*

Beweis. Für den Beweis von (3.1) sei $0' \in \mathbb{R}$ eine weitere Zahl, die die Nulleigenschaft (A3) hat. Aus (A3) folgt $0' + 0 = 0'$. Aus (A3) folgt $0 + 0' = 0$. Aus (A2) folgt $0' + 0 = 0 + 0'$. Daher folgt $0 = 0'$.

Für (3.2) sei $x' \in \mathbb{R}$ eine Zahl, die die Eigenschaft $x + x' = 0$ hat. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
x + x' = 0 &\Leftrightarrow -x + (x + x') = (-x) + 0 && \text{(Addition von } -x \text{ auf beiden Seiten)}\\
&\Leftrightarrow -x + (x + x') = -x && \text{(mit (A3))}\\
&\Leftrightarrow x' + (x + (-x)) = -x && \text{(Kommutativität \& Assoziativität)}\\
&\Leftrightarrow x' + 0 = -x && \text{(mit (A4))}\\
&\Leftrightarrow x' = -x && \text{(mit (A3))}
\end{aligned}
$$

Für (3.3) folgt zunächst aus (A3): $0+(-0) = 0$ Aus (A4) folgt $0+0 = 0$. Da das Negative eindeutig bestimmt ist, folgt $0 = -0$.

Für (3.4) kann man zunächst prüfen, dass $x = b - a$ eine Lösung ist: $a + (b - a) = (a + (-a)) + b = b$. Für den Nachweis der Eindeutigkeit sei y eine weitere Lösung mit $a + y = b$. Dann ergibt sich durch Addition von $-a$ auf beiden Seiten $a + y + (-a) = b - a$ und mit Anwendung der Assoziativität, Kommutativität und (A4) folgt $y = b - a$.

Die Aussagen (3.5) und (3.6) können ähnlich gezeigt werden, wir verzichten darauf und lassen dies als Übung dem Leser oder zum Nachlesen in (For16). □

Aus den Axiomen (M1) bis (M4) und (D) lassen sich die folgenden Eigenschaften folgern:

Satz 3.3.

(3.7) *Die Zahl $1 \in \mathbb{R}$ ist eindeutig durch ihre Eigenschaft bestimmt.*

(3.8) *Das Inverse einer Zahl $x \neq 0$ ist eindeutig bestimmt.*

(3.9) *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $ax = b$ eine eindeutige Lösung $x = a^{-1}b$.*

(3.10) *Für alle $x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y)z = xz + yz$*

(3.11) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot 0 = 0$.*

(3.12) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $xy = 0$, genau dann wenn $x = 0$ oder $y = 0$.*

(3.13) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-x = (-1)x$.*

(3.14) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $(-x)(-y) = xy$.*

(3.15) *Für alle $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ gilt $(x^{-1})^{-1} = x$.*

(3.16) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0, y \neq 0$ gilt $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.*

Beweis. Für (3.7) erfülle $1'$ auch (M3). Dann folgt $1 \cdot 1' \overset{M3}{=} 1'$. Ebenso gilt $1' \cdot 1 \overset{M3}{=} 1$. Da $1 \cdot 1' \overset{M2}{=} 1' \cdot 1$ folgt $1' = 1$

Für (3.8) sei $x' \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot x' = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & x \cdot x' = 1 \Leftrightarrow x^{-1} \cdot (x \cdot x') = x^{-1} \cdot 1 \\ \Leftrightarrow\ & (x^{-1} \cdot x) \cdot x' = x^{-1} \cdot 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1 \cdot x' = x^{-1} \cdot 1 \\ \Leftrightarrow\ & x' \cdot 1 = x^{-1} \cdot 1 \\ \Leftrightarrow\ & x' = x^{-1} \end{aligned}$$

Für (3.9) zeigen wir zunächst, dass $x = a^{-1}b$ eine Lösung ist: $a \cdot (a^{-1}b) = (a \cdot a^{-1})b = 1 \cdot b = b \cdot 1 = b$. Für die Eindeutigkeit, sei y eine weitere Lösung. Dann kann man zunächst beide Seiten der Gleichung $ay = b$ mit a^{-1} multiplizieren und erhält $a^{-1}(ay) = a^{-1}b$. Mit Verwendung der Assoziativität, Kommutativität und (M4) kann die linke Seite zu y vereinfacht werden, was zeigt $y = a^{-1}b$.

Die Aussage 3.10 folgt aus (M2) und (D), denn $(x + y)z \overset{M2}{=} z(x + y) \overset{D}{=} zx + zy \overset{M2}{=} xz + yz$

Für (3.11) können wir zunächst umformen $x \cdot 0 \overset{A3}{=} x(0 + 0) \overset{D}{=} (x \cdot 0) + (x \cdot 0)$. Anschließend kann man $x \cdot 0$ von beiden Seiten der Gleichung $x \cdot 0 = (x \cdot 0) + (x \cdot 0)$ subtrahieren, was $0 = x \cdot 0$ zeigt.

Für (3.12) muss man beide Richtungen der genau-dann-wenn-Beziehung betrachten. Betrache zunächst den Fall, dass $x = 0$ oder $y = 0$ gilt, und zeige, dass in beiden Fällen $xy = 0$ folgt: Wenn $x = 0$, dann $0y \overset{M2}{=} y0 \overset{2.11}{=} 0$. Wenn $y = 0$, dann $x0 \overset{2.11}{=} 0$. Für die andere Richtung gelte $xy = 0$. Wir machen eine Fallunterscheidung, jenachdem, ob $x = 0$ oder $x \neq 0$ gilt: Falls $x = 0$ gilt, dann gilt auch „$x = 0$ oder$y = 0$“. Falls $x \neq 0$, dann folgt mit (3.9) $y = x^{-1}0 = 0$.

Für (3.13) kann man umformen: $x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 - 1)x = 0x = 0$. Damit folgt $(-1)x$ ist Negatives von x. Wegen Eindeutigkeit des Negativen folgt die Behauptung.

Aussage (3.14) lässt sich durch umformen zeigen: $(-x)(-y) = (-x)(-1)y = (-1)(-x)y = -(-x)y = xy$.

Für (3.15) kann man aus $x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1} = 1$ und $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$ und der Eindeutigkeit des Inversen folgern: $(x^{-1})^{-1} = 1$.

Für Aussage (3.16) kann man mit der Gleichung $(xy)(xy)^{-1} = 1$ beginnen und diese umformen:

$$\begin{aligned} (xy)(xy)^{-1} = 1 \quad & \Leftrightarrow (xy)(xy)^{-1}x^{-1} = 1x^{-1} \\ & \Leftrightarrow xx^{-1}y(xy)^{-1} = x^{-1} \\ & \Leftrightarrow 1y(xy)^{-1} = x^{-1} \\ & \Leftrightarrow y(xy)^{-1} = x^{-1} \end{aligned}$$

Mit (3.9) folgt $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$. □

Durch mehrfaches Anwenden der Assoziativ- und Kommutativgesetze lassen sich allgemeine Assoziativ- und Kommutativgesetze nachweisen. Ab sofort lassen wir Klammern weg und definieren

- $x_1 + x_2 + \ldots + x_n := (\ldots(x_1 + x_2) + \ldots) + x_n$
- $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n := (\ldots(x_1 \cdot x_2) + \ldots) \cdot x_n$

Für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Das allgemeine Assoziativgesetz besagt, dass jede andere Anordnung der Klammerung zum selben Ergebnis führt. Das allgemeine Kommutativgesetz besagt, dass für jede Permutation $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ von $(1, 2, \ldots, n)$ gilt:

- $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_{i_1} + \ldots + x_{i_n}$

- $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}$

Mit den Operationen eines Körpers kann jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Element von $\mathbb{R}$ verstanden werden, vermöge $1 + \cdots + 1$ (n Summanden).

Allerdings reichen die Körperaxiome nicht aus, um die z.B. 1+1 und 0 zu unterscheiden: Z.B. ist die Menge $\{0, 1\}$ mit Operationen $+$ und $\cdot$, definiert durch

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

ebenfalls ein Körper (erfüllt die Körperaxiome), aber in diesem Körper gilt offensichtlich 0+0=1.

Definition 3.4 (Ganzzahlige Potenzen). *Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die* Potenz $x^n \in \mathbb{R}$ *definiert durch $x^0 := 1$ und $x^{n+1} := x^n x$.*
Man schreibt x^{-n} für $(\frac{1}{x})^n$.

Satz 3.5 (Rechenregeln für Potenzen). *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gelten die Potenzgesetze:*

(3.17) $x^n x^m = x^{n+m}$
(3.18) $(x^m)^n = x^{mn}$
(3.19) $x^n y^n = (xy)^n$

Beweis. Wir zeigen (3.17) durch vollständige Induktion über n, (3.18) und (3.19) gehen analog mit Induktion über n. Für die Induktionsbasis betrachte den Fall $n = 0$: Dann gilt $x^0 x^m = 1x^m = x^m = x^{m+0} = x^{0+m}$. Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ forme um:

$$x^{n+1}x^m = x^n x x^m = x x^n x^m \overset{I.V.}{=} x x^{n+m} = x^{n+m}x = x^{n+m+1} = x^{n+1+m}$$

$\square$

Zahlen in Dezimalbruchdarstellung mit endlich vielen Nachkommastellen, wie zum Beispiel 1.32 können ebenfalls definiert werden. Der Ausdruck $z_1 z_2 \ldots z_k . z_{k+1} \ldots z_n$ bezeichnet die Zahl

$$\sum_{i=1}^{n+k} z_i 10^{k-i}.$$

Zum Beispiel ist 1.32 durch $1 + 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$ gegeben.

3.2 Anordnungsaxiome

Definition 3.6. *Wir nehmen wir an, dass für jede reelle Zahl bestimmt ist, ob diese positiv ist. Wir schreiben $x > 0$ wenn $x \in \mathbb{R}$ positiv ist und nehmen folgende Axiome an.*

Anordnungsaxiome

(O1) *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x > 0$ oder $x = 0$ oder $-x > 0$.*

(O2) *Wenn $x > 0$ und $y > 0$ dann $x + y > 0$.*

(O3) *Wenn $x > 0$ und $y > 0$ dann $xy > 0$.*

Wir definieren $x < y$ und $y > x$ als Abkürzung für $y - x > 0$. Wir schreiben $x \leq y$ und $y \geq x$ falls $x < y$ oder $x = y$ gilt.

Der folgende Satz erfasst einige nützliche Rechenregeln für die Ordnungsrelation.

Satz 3.7. *Für alle $x, y, a \in \mathbb{R}$ gilt:*

(3.20) *Wenn $x < y$, dann $a + x < a + y$.*

(3.21) *Wenn $x < y$ und $a > 0$, dann $ax < ay$.*

(3.22) $x < y \iff -x > -y$

(3.23) *Wenn $x < y$ und $a < 0$, dann $ax > ay$.*

(3.24) *Wenn $x \neq 0$, dann $x^2 > 0$, insbesondere $1 > 0$.*

(3.25) *Wenn $x > 0$, dann $\frac{1}{x} > 0$.*

(3.26) *Wenn $0 < x$ und $x < y$, dann $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.*

Beweis.

(3.20): $x < y$ entspricht $y - x > 0$. Außerdem gilt $y - x = a + y - x - a = (a + y) - (a + x)$. Daher gilt $(a + y) - (a + x) > 0$ und somit $a + x < a + y$.

(3.21): $x < y$ entspricht $y - x > 0$. Da $a > 0$, folgt aus (O3) $(y - x)a > 0$, und daher $ay - ax > 0$, d.h. $ax < ay$.

(3.22): $x < y$ entspricht $y - x > 0$ und daher $y - x = y + -x = -(-y) + (-x) = (-x) - (-y) > 0$, was $-x > -y$ entspricht.

(3.23): $x < y$ entspricht $y - x > 0$, $a < 0$ entspricht $-a > 0$ (aus (3.22)). Daher folgt aus (3.21) $-ax < -ay$ d.h. $-ay - (-ax) > 0$ d.h. $ax - ay > 0$ und daher $ax > ay$

(3.24): Aus (O3) folgt $x^2 > 0$ für $x > 0$. Wenn $x < 0$, dann verwende (3.23) für $a = x$, $y = 0$: $a \cdot x = x^2 > ay = x \cdot 0 = 0$ Da $0 \neq 1$ folgt $1^2 = 1 > 0$

(3.25): Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Nach (O1) muss $x \neq 0$ gelten, also existiert $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$. Nach (3.24) gilt $\left(\frac{1}{x}\right)^2 > 0$. Nach (O3) dann auch $x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 > 0$. Das bedeutet aber $\frac{1}{x} > 0$.

(3.26): Aus (O3) folgt $xy > 0$. Aus (3.25) folgt $(xy)^{-1} > 0$ also $x^{-1}y^{-1} > 0$- Aus $x < y$ und $x^{-1}y^{-1} > 0$ folgt mit (3.21) $xx^{-1}y^{-1} < yx^{-1}y^{-1}$, was $y^{-1} < x^{-1}$ ergibt.

□

Satz 3.8 (Bernoulli Ungleichung). *Es gilt $(x + 1)^n \geq 1 + nx$ für alle $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion über n. Induktionsbasis: Für $n = 0$ gilt $(x + 1)^0 = 1 = 1 + 0x$. Für den Induktionsschritt, nehme an, dass $(x + 1)^n \geq 1 + nx$ für n gilt und forme um

$$(x+1)^{n+1} = (x+1)^n(x+1) \overset{I.V.}{\geq} (1+nx)(x+1) = x+nx^2+1+nx = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

Beachte, dass im Schritt $(x+1)^n(x+1) \geq (1+nx)(x+1)$ Aussage (3.21) implizit verwendet wird und daher aus $(x + 1)^n \geq (1 + nx)$ nur $(x + 1)^n(x + 1) \geq (1 + nx)(x + 1)$ gefolgert werden darf, wenn $(x + 1) \geq 0$ gilt, was durch die Bedingung $x \geq -1$ des Satzes sichergestellt ist. □

3.3 Absoluter Betrag

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den *Absolutbetrag von* x, $|x| \in \mathbb{R}$, durch

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x > 0, \\ -x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Definition gilt $|x| \geq 0$.

Satz 3.9. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq |x|$ und $-x \leq |x|$.*

Beweis. Wir betrachten die drei möglichen Fälle für x nach (O1).

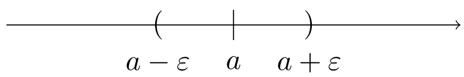
1. Fall $x > 0$. Dann gilt $|x| = x$ nach Definition. Wir haben dass sofort $x \leq |x|$. Für $-x \leq |x|$ ist $-x \leq x$ zu zeigen. Wir zeigen $-x < x$. Dafür genügt es zu zeigen $0 < 2x$. Folgt aus $0 < x$ und $0 < 2$ und (O3).
2. Fall $x < 0$. Dann gilt $|x| = -x$ nach Definition. Damit folgt $-x \leq |x|$ sofort. Für $x \leq |x|$ zeige $x \leq -x$. Dafür zeige $x < -x$. Dafür zeige $0 < -2x = 2(-x)$. Da $0 < 2$ und $0 < -x$ folgt mit (O3) $2(-x) = -2x > 0$.
3. Fall $x = 0$. Dann gilt $|x| = -x = 0$ nach Definition und damit sofort $-x \leq |x|$ und $x \leq |x|$ □.

Satz 3.10. *Die folgenden Aussagen gelten für alle $x, y \in \mathbb{R}$.*

- *Es gilt $|x| = 0$ genau dann wenn $x = 0$.*
- $|xy| = |x||y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung)*

Beweis. Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung. Nach (O1) ist $x + y$ entweder positiv, gleich null oder negativ. Wenn $x + y > 0$, dann gilt $|x + y| = x + y$ nach Definition und wir müssen $x + y \leq |x| + |y|$ zeigen. Das folgt aus $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ (vorangegangener Satz) mit (O2). Der Fall $x + y < 0$ folgt analog. Im Fall $x + y = 0$ ist $0 \leq |x| + |y|$ zu zeigen, was aus $0 \leq |x|$ und $0 \leq |y|$ folgt. □

Die folgende Aussage besagt, dass x in einer ε-Umgebung von x_0 liegt. In $\mathbb{R}$ ist die ε-Umgebung einer Zahl a, dass offene Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (siehe Abschnitt 3.6 für die Definition von Intervallen). Auf der Zahlengeraden kann die ε-Umgebung um a dargestellt werden als



Satz 3.11. *Für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt: Es gilt $|x - x_0| < \varepsilon$ genau dann wenn $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$.*

Beweis. Übung. □

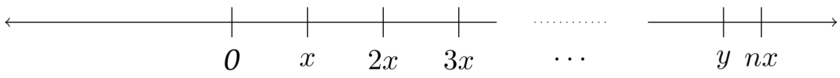
3.4 Archimedisches Axiom

Wir werden sehen, dass aus dem noch fehlenden Vollständigkeitsaxiom (das wir später angeben) folgende Aussage folgt. Diese Aussage ist auch als *archimedisches Axiom* bekannt.

Definition 3.12 (Archimedisches Axiom)**.**

(Arch) *Für alle $x > 0$ und $y > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$, sodass $nx > y$.*

Als Skizze auf der Zahlengerade



Die folgenden Aussagen sind Konsequenzen des Archimedischen Axioms (Arch).

Satz 3.13. *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $x := \varepsilon$ und $y := 1$. Nach (Arch) existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $y < nx$, also $1 < n\varepsilon$. Division durch n (d.h. Multiplikation mit $\frac{1}{n}$) liefert $\frac{1}{n} < \varepsilon$. □

Satz 3.14. *Für alle b mit $b > 1$ und alle $K \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > K$.*

Beweis. Sei $b > 1$ und $K \in \mathbb{R}$. Wenn $K \leq 0$ dann gilt die Aussage, weil alle Potenzen von b^n positiv sind, nach (O3). Betrachte also den Fall $K > 1$. Setze $x := b - 1$. Dann gilt $b^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx$ nach Definition und Bernoulli-Ungleichung. Nach (Arch) gibt es eine Zahl n, sodass $nx > K - 1$. Daraus folgt $1 + nx > K$. Zusammen ergibt das $b^n \geq 1 + nx > K$, was zu zeigen war. □

Satz 3.15. *Für alle c mit $0 < c < 1$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $c^n < \varepsilon$.*

Zum Beweis kann man Satz 3.14 mit $b := \frac{1}{c}$ und $K := \frac{1}{\varepsilon}$ verwenden.

3.5 Vollständigkeit

Alle bisher formulierten Axiome werden auch von der Menge der rationalen Zahlen erfüllt. Wir brauchen noch ein Vollständigkeitsaxiom, das die Lückenlosigkeit der reellen Zahlen bereitstellt.

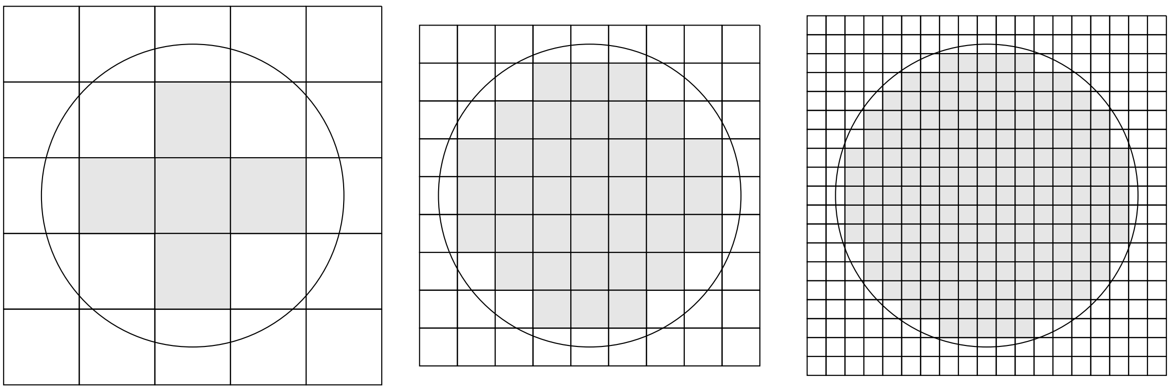
Definition 3.16. *Sei M eine Menge von reellen Zahlen.*

- *Eine Zahl a heißt* obere Schranke für *M falls $x \leq a$ für alle $x \in M$ gilt.*
- *Eine Zahl a heißt* Supremum für *M falls a die kleinste obere Schranke für M ist. Das bedeutet:*
  1. *a ist eine obere Schranke für M.*
  2. *Für jede obere Schranke b für M gilt $a \leq b$.*
- *Eine Menge M heißt nach* oben beschränkt*, wenn sie eine obere Schranke hat.*

(Vollständigkeitsaxiom) Jede nichtleere und nach oben beschränkte Menge hat ein Supremum.

Beispiel 3.17. Sei M die Menge $\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$, d.h. $M = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\}$. Die Zahl 1 ist eine obere Schranke für M, da $\frac{n}{n+1} \leq 1$ für alle n gilt. Die Zahl 1 ist sogar Supremum für M. Der Beweis erfolgt durch Widerspruch. Wir nehmen an, dass es eine kleinere obere Schranke $b < 1$ gibt und leiten daraus einen Widerspruch her. Wenn b eine obere Schranke ist, dann muss $\frac{n}{n+1} \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gelten. Für $b < 1$ kann das aber nicht sein: Aus $b < 1$ folgt $0 < 1 - b$. Nach Satz 3.13 gibt es dann $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\frac{1}{n} < 1 - b$. Gleichzeitig gilt $1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Damit haben wir $1 - \frac{n}{n+1} < 1 - b$. Daraus folgt $b < \frac{n}{n+1}$, was aber der Annahme widerspricht, dass $\frac{n}{n+1} \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt. Also muss die Annahme, dass es eine kleinere obere Schranke als 1 gibt, falsch gewesen sein. □

Die reellen Zahlen erfüllen das Vollständigkeitsaxiom, die rationalen aber nicht. Wenn man zum Beispiel den Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser 2 durch ausgefüllte Quadrate auf Karopapier approximiert und dabei die Seitenlänge der Quadrate auf 1/2, 1/4, 1/8,... anpasst, dann ist die Menge aller solcher Approximationen eine Menge von rationalen Zahlen (denn jeder approximierte Flächeninhalt ist von der Form $m_i^2/2^i$ für $i, m_i \in \mathbb{N}$), Eine Illustration für $i = 1, 2, 3$:



Das Supremum dieser Menge ist π, was keine rationale Zahl ist.
Wir zeigen den üblichen Beweis, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist:

Satz 3.18. *$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.*

Beweis. Durch Widerspruch. Nehme an: $\sqrt{2}$ ist rational. Dann gilt $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ wobei p, q teilerfremd (d.h. $\dfrac{p}{q}$ ist unkürzbar). Da $\sqrt{2}^2 = 2 = \dfrac{p^2}{q^2}$, gilt $p^2 = 2q^2$. D.h. p^2 ist durch 2 teilbar. Da $p^2 = p \cdot p$ ist daher p selbst durch 2 teilbar, d.h. $p = 2 \cdot p'$. Aus $p^2 = 2q^2$ folgt $q^2 = \dfrac{p^2}{2} = p' \cdot p = p' \cdot 2p'$. Daher ist q^2 durch 2 teilbar. Da $q^2 = q \cdot q$ ist auch q durch 2 teilbar, d.h. $q = 2 \cdot q'$. Dann ist $\dfrac{p}{q} = \dfrac{2 \cdot p'}{2 \cdot q'}$ kürzbar! Widerspruch. □ □

Definition 3.19 (Ganzzahliger Anteil). *Für $x > 0$ definieren wir:*

$$\lfloor x \rfloor := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$$

Satz 3.20. *Für alle $x > 0$ ist $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$ und es gilt $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.*

Beweis. Definiere M als die Menge aller ganzen Zahlen kleiner-gleich x, d.h. $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$. Da $\lfloor x \rfloor$ die *kleinste* obere Schranke ist, und da $\lfloor x \rfloor - 1$ kleiner als $\lfloor x \rfloor$ ist, kann $\lfloor x \rfloor - 1$ keine obere Schranke sein. Also gibt es $m \in M$ mit $m > \lfloor x \rfloor - 1$, d.h. $m + 1 > \lfloor x \rfloor$. Dann kann aber $m + 1$ nicht in M sein, da $\lfloor x \rfloor$ eine oberere Schranke ist. Somit gilt *nicht* $m + 1 \leq x$. Wegen (O1) muss also $m + 1 > x$ gelten. Wegen $m \in M$ gilt auch $m \leq x$.

Wir haben also gezeigt, dass die natürliche Zahl m die Eigenschaft $m \leq x < m + 1$ hat. Das heißt aber, dass M gleich $\{0, 1, ..., m\}$ ist. Die kleinste obere Schranke dieser Menge ist $m \in \mathbb{N}$, also $m = \lfloor x \rfloor$. □

3.6 Intervallschachtelungen

Wir verwenden folgende Notation für Intervalle:

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \mid a \leq x \leq b\} && \text{(abgeschlossenes Intervall)}\\
[a, b) &= \{x \mid a \leq x < b\} && \text{(halboffenes Intervall)}\\
(a, b] &= \{x \mid a < x \leq b\} && \text{(halboffenes Intervall)}\\
(a, b) &= \{x \mid a < x < b\} && \text{(offenes Intervall)}
\end{aligned}$$

Definition 3.21 (Intervallschachtelung). *Eine* Intervallschachtelung *ist durch eine Folge von Intervallen* $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ... *gegeben (für jede natürliche Zahl* n *ein Intervall* $[a_n, b_n]$*), die folgende Eigenschaften haben müssen:*

1. $a_n < b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Das Intervall* $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ *ist echt in* $[a_n, b_n]$ *enthalten, d.h. es gilt* $a_n \leq a_{n+1}$ *und* $b_{n+1} \leq b_n$ *und (mindestens) eine dieser Ungleichheiten ist echt, also* $a_n < a_{n+1}$ *oder* $b_{n+1} < b_n$.
3. *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

Punkt 1 sagt, dass alle Intervalle nichtleer sind. Punkt 2 sagt, dass das Intervall $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ echt in $[a_n, b_n]$ enthalten ist. Punkt 3 sagt, dass die Intervalle beliebig klein werden.

Satz 3.22. *Für jede Intervallschachtelung gibt es genau ein* $x \in \mathbb{R}$*, das in allen Intervallen enthalten ist, d.h.* $x \in [a_n, b_n]$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Setze $x := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Nach Definition als obere Schranke gilt $x \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nun bemerken wir, dass wir für jedes n folgende Ungleichungen haben:

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq ... \leq b_1 \leq b_0$$

Daraus folgt, dass jedes b_i eine obere Schranke für die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist. Nach Definition von x als *kleinste* obere Schranke folgt daraus wiederum $x \leq b_n$.

Somit haben wir $a_n \leq x \leq b_n$ für beliebiges n, also ist x in allen Intervallen enthalten.

Es bleibt noch zu zeigen, dass x die einzige reelle Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Angenommen $x' \in \mathbb{R}$ mit $x \neq x'$ wäre auch in allen Intervallen. Setze $\varepsilon = |x - x'|$. Beachte: $\varepsilon > 0$. Nach der dritten Eigenschaft der Intervallschachtelungen gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - a_n| < \varepsilon$. Da x und x' beide in $[a_n, b_n]$ liegen, folgt $|x - x'| \leq |b_n - a_n|$. Das heißt dann aber $\varepsilon = |x - x'| \leq |b_n - a_n| < \varepsilon$. Das ist nicht möglich, also muss unsere Annahme, dass es neben x noch eine zweite Zahl mit der Eigenschaft gibt, falsch gewesen sein. □

3.7 Dezimalbruchentwicklung

Wir können jetzt zeigen, dass die übliche Darstellung reeller Zahlen in der Form

$$z_1 z_2 \dots z_k . z_{k+1} \dots ,$$

wobei jedes $z_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ tatsächlich eine eindeutige reelle Zahl definiert.
Die Folge definiert eine Intervallschachtelung.

$$a_{n-1} := \sum_{i=1}^{n} z_i 10^{k-i} \qquad b_{n-1} := a_{n-1} + 10^{k-n}$$

Die drei Eigenschaften der Intervallschachtelung sind mit dieser Definition nicht schwer zu beweisen.
Satz 3.22 zeigt also, dass $z_1 z_2 \dots z_k . z_{k+1} \dots$ eine eindeutige reelle Zahl bestimmt.

Beispiel 3.23. Für den Ausdruck $1.1111\dots$ ist die Intervallschachtelung $[a_0, b_0] = [1, 2]$, $[a_1, b_1] = [1.1, 1.2]$, $[a_2, b_2] = [1.11, 1.12]$, $[a_3, b_3] = [1.111, 1.112]$, usw.

Beispiel 3.24. Für den Ausdruck $1.0000\dots$ ist die Intervallschachtelung $[a_0, b_0] = [1, 2]$, $[a_1, b_1] = [1, 1.1]$, $[a_2, b_2] = [1, 1.01]$, $[a_3, b_3] = [1, 1.001]$, usw. Die Zahl 1 ist in allen diesen Intervallen enthalten. Also gilt $1.\overline{0} = 1$.

Beispiel 3.25. Für den Ausdruck $0.9999\dots$ ist die Intervallschachtelung $[a_0, b_0] = [0, 1]$, $[a_1, b_1] = [0.9, 1]$, $[a_2, b_2] = [0.99, 1]$, $[a_3, b_3] = [0.999, 1]$, usw. Beachte, dass die Zahl 1 in allen diesen Intervallen enthalten ist. Also gilt $0.\overline{9} = 1$.

Beispiel 3.26. Approximation von $\sqrt{2}$ durch Intervallschachtelung. Eine Möglichkeit ist es, mit dem Intervall $[a_0, b_0] = [1, 2]$ zu starten und anschließend immer eine Dezimalstelle hinzufügen. D.h. für $i \geq 2$ konstruiert man

$$[a_{i-1}, b_{i-1}] = [a_{i-2} + x_i \cdot 10^{-i}, a_{i-2} + (x_i + 1) \cdot 10^{-i}]$$

wobei $x_i \in \{0, \dots, 9\}$ jeweils maximal gewählt wird, sodass $a_i^2 \leq 2$ und $2 \leq b_i^2$. Hierbei benutzt man, dass für $0 \leq x \leq y$ gilt: Aus $x \leq y$ folgt auch $x^2 \leq y^2$.
Dann ist $\sqrt{2}$ in allen Intervallen enthalten, die Intervalle werden immer echt kleiner und auch beliebig klein (wir beweisen das hier nicht).
Die Berechnung weiterer Intervalle ergibt:

- $[a_1, b_1] = [1 + 4 \cdot 10^{-1}, 1 + 5 \cdot 10^{-1}]$, denn $1.4^2 = 1.96 \leq 2 \leq 2.25 = 1.5^2$
- $[a_2, b_2] = [1.4 + 1 \cdot 10^{-2}, 1.4 + 2 \cdot 10^{-2}]$, denn $1.41^2 = 1.9881 \leq 2 \leq 2.0164 = 1.42^2$
- $[a_3, b_3] = [1.41 + 4 \cdot 10^{-3}, 1.41 + 5 \cdot 10^{-3}]$, denn $1.414^2 = 1.999396 \leq 2 \leq 2.002225 = 1.415^2$
- $[a_4, b_4] = [1.414 + 2 \cdot 10^{-4}, 1.414 + 3 \cdot 10^{-4}]$, denn $1.4142^2 = 1.99996164 \leq 2 \leq 2.00024449 = 1.4143^2$
- usw.

4 Folgen und Grenzwerte

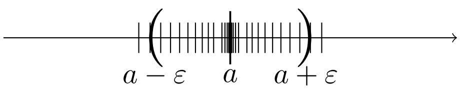
Eine *Folge* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist gegeben durch eine reelle Zahl a_n für jede natürliche Zahl n. Wir schreiben auch $(a_0, a_1, a_2, \dots)$. Weiterhin schreiben wir $(a_n)_{n \geq k}$ für die Folge $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$, d.h. $(a_{k+n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel 4.1.

- $a_n := \dfrac{1}{n}$ *definiert die Folge* $(a_n)_{n\geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$.
- $a_n := (-1)^n$ *definiert die Folge* $(a_n)_{n\geq 1} = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$.
- $a_n := \dfrac{n}{n+1}$ *definiert die Folge* $(a_n)_{n\geq 1} = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots)$.
- $a_n := \dfrac{n}{2^n}$ *definiert die Folge* $(a_n)_{n\geq 1} = (\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \ldots)$.

Definition 4.2 (Konvergenz einer Folge). *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.*
Die reelle Zahl a heißt dann Grenzwert der Folge.

Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ für den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn dieser existiert.
Die Konvergenz einer Folge, besagt, dass es beliebig kleine ε-Umgebungen des Grenzwertes $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gibt, so dass fast alle (nämlich alle bis auf endlich viele) Folgenglieder in der ε-Umgebung liegen. Illustration dazu:



Beispiel 4.3.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

  Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 3.13 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$. Dann gilt sicher auch $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n > N$, was die gewünschte Aussage zeigt.
- $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *hat keinen Grenzwert.*

  Angenommen a wäre ein Grenzwert. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ müsste dann $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle hinreichend großen n gelten. Da die Folge immer abwechselnd die Werte 1 und -1 annimmt, bedeutet das: $|1-a| < \varepsilon$ und $|-1-a| < \varepsilon$. Mit der Dreiecksungleichung folgt daraus aber $2 = |1-a+a+1| \leq |1-a| + |a+1| = |1-a| + |-a-1| \leq 2\varepsilon$, also $1 \leq \varepsilon$, was für beliebiges $\varepsilon > 0$ sicher nicht wahr ist. Unsere Annahme, dass a ein Grenzwert der Folge ist, muss also falsch gewesen sein.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

  Dies beweist man analog zum ersten Punkt.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

  Man zeigt zunächst, dass $\frac{n}{2^n} < \frac{1}{n}$ für alle $n > 4$ gilt[1].

  Im ersten Punkt haben wir gezeigt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N' \in \mathbb{N}$ gibt, sodass mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n > N'$. Dann existiert aber ein $N \in \mathbb{N}$ (nämlich zum Beispiel $N := \max(N', 4)$) sodass $\frac{n}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

[1] Die Aussage $\frac{n}{2^n} < \frac{1}{n}$ kann äquivalent in $n^2 < 2^n$ umgeformt werden. Man zeigt durch Induktion, dass diese Aussage für alle $n > 4$ gilt. Für $n = 5$ folgt die Aussage durch Ausrechnen: $5^2 = 25 < 32 = 2^5$. Für den Induktionsschritt dürfen wir neben $n \geq 5$ noch $n^2 < 2^n$ annehmen und müssen $(n+1)^2 < 2^{n+1}$ zeigen. Dazu haben wir $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 2n + n = n^2 + 3n < n^2 + n^2 = 2n^2 < 2(2^n) = 2^{n+1}$. Damit folgt dann die Aussage.

Satz 4.4. *Jede Folge hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hätte zwei verschiedene Grenzwerte a und a'. Setze $\varepsilon := \frac{|a-a'|}{2}$. Da a ein Grenzwert ist, gibt es nach Definition ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$. Da a' ein Grenzwert ist, gibt es nach Definition ein $N' \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a'| < \varepsilon$ für alle $n > N'$. Für alle $n > \max(N, N')$ gelten beide Ungleichungen. Durch Addition der beiden Ungleichungen erhalten wir $|a_n - a'| + |a_n - a| < 2\varepsilon$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|a - a'| = |a_n - a' + (a - a_n)| \leq |a_n - a'| + |a - a_n| = |a_n - a'| + |a_n - a| < 2\varepsilon = |a - a'|$$

Das heißt aber $|a - a'| < |a - a'|$, was wegen (O1) nicht möglich ist. Unsere Annahme, dass die Folge zwei verschiedene Grenzwerte hat, muss also falsch gewesen sein. □

4.1 Einige Rechenregeln

Satz 4.5. *Für alle konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:*

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n) + (\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$

Beweis. Wir zeigen den ersten Fall. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Zu zeigen ist $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Annahme existieren $N \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathbb{N}$ sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_m - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N$ und alle $m > M$ gilt. Wir haben dann $|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für alle $n > \max(N, M)$, womit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ gezeigt ist. □

Satz 4.6. *Für alle konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ dann $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)/(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$.*

Beachte: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, dann muss es ein $N \in \mathbb{N}$ geben, sodass $b_n \neq 0$ für alle $n > N$.

Satz 4.7. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $a_n < b_n$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*

Beachte: Unter den Annahmen des Satzes gilt *nicht* immer $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) < (\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$.

4.2 Beschränktheit

Definition 4.8 (Monotonie für Folgen).

- *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*
- *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt streng monoton wachsend falls $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Definition 4.9 (Beschränktheit). *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt nach oben beschränkt falls die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine obere Schranke hat.*

Satz 4.10. *Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt.*

Beweis. Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ (der Grenzwert existiert nach Annahme). Nach Definition der Konvergenz gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < 1$ für alle $n > N$ gilt. Dann gilt aber $a_k \leq \max\{a_0, a_1, \ldots, a_N, a+1\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. □

Satz 4.11. *Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* $a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $0 \leq a - a_N < \varepsilon$. Andernfalls hätten wir $a - a_n \geq \varepsilon$ für alle n. Das hieße aber, dass $a - \varepsilon$ eine obere Schranke für $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ wäre, die kleiner als a ist. Wegen der Definition von a als die *kleinste* obere Schranke ist das nicht möglich.

Wegen der Monotonie der Folge gilt dann $a_N \leq a_n$ für alle $n > N$. Daraus folgt dann $0 \leq a - a_n \leq a - a_N < \varepsilon$.

Damit haben wir gezeigt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a - a_n| \leq \varepsilon$ für alle $n > N$. Das heißt, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

4.3 Divergenz

Definition 4.12. *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen ∞, *falls für jedes* $K \in \mathbb{R}$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert, sodass* $a_n > K$ *für alle* $n > N$. *Wir schreiben dann* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Definition 4.13. *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$, *falls für jedes* $K \in \mathbb{R}$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert, sodass* $a_n < K$ *für alle* $n > N$. *Wir schreiben dann* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Beispiel 4.14. *Es gilt* $\lim_{n\to\infty} -n = -\infty$ *und* $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty$.

Wenn eine Folge weder konvergiert noch bestimmt divergiert, sprechen wir von unbestimmter Divergenz.

5 Unendliche Reihen

Mit dem Grenzwertbegriff können wir die Bedeutung von unendlichen Summen erklären. Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten wir die *Partialsummen*:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Allgemein: $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Summen heißt *unendliche Reihe*. Wenn diese Folge konvergiert, so schreiben wir $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ für ihren Grenzwert.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Wenn der Grenzwert nicht existiert, dann sagen wir, dass die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht konvergiert, sondern divergiert. Die Definition der bestimmten Divergenz überträgt sich vom Grenzwert der Partialsummen auf die Reihe.

Entsprechende Definitionen gelten, wenn die Summation nicht mit 0, sondern mit $m \in \mathbb{N}$ beginnt:

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Mit den folgenden Sätzen geben wir einige Beispiele an.

Satz 5.1 (Unendliche geometrische Reihe). *Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Beweis. Es gilt $\sum\limits_{n=0}^{k} x^n = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$ (siehe Satz 2.4) sowie $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1-x^{k+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$, da $\lim\limits_{k\to\infty} x^{k+1} = 0$ (vgl. Satz 3.15). □

Der Satz erfasst alle Möglichkeiten für die Konvergenz der unendlichen geometrischen Reihe. Für $x \geq 1$ gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \infty$ (vgl. Satz 3.14). Für $x < -1$ divergiert die unendliche geometrische Reihe unbestimmt.

Satz 5.2. *Es gilt* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$

Beweis. Man zeigt mit Induktion $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ und verwendet $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$ □

Satz 5.3 (Unendliche harmonische Reihe). *Die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *konvergiert nicht.*

Beweis. Wir zeigen zunächst per Induktion über n: $\sum\limits_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

- Induktionsanfang $n = 1$: $\frac{1}{1} \geq \frac{1}{2}$

- Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k} \overset{I.V.}{\geq} \frac{n}{2}+\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}+\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{2^{n+1}}\\ &= \frac{n}{2}+((2^{n+1}-1)-(2^n-1))\frac{1}{2^{n+1}}\\ &= \frac{n}{2}+((2^{n+1}-2^n)\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2}+(2^n(2-1))\frac{1}{2^{n+1}}\\ &= \frac{n}{2}+\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2}+\frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

Schließlich folgt aus der Ungleichung $\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$, dass $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}$ divergiert. □

Für den Beweis des folgenden Satzes fehlen uns noch die Techniken:

Satz 5.4. *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergiert (gegen $\frac{\pi}{6}$).*

5.1 Rechenregeln

Satz 5.5. *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und sei $u \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Gleichungen*

$$u\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} ua_k, \qquad \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)+\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k).$$

Insbesondere sind die Reihen auf den rechten Seiten der Gleichungen konvergent.

Beispiel 5.6. *Als Beispiel betrachten wir unendliche Dezimalbrüche, Diese lassen mithilfe von speziellen Reihen darstellen. Z.B. kann er periodische Dezimalbruch $0,8\overline{12}$ durch die Reihe*

$$\frac{8}{10}+\frac{12}{1000}+\frac{12}{100000}+\ldots = \frac{8}{10}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{12}{10^{3+2k}}$$

dargestellt werden.
Mit den Rechenregeln und dem Grenzwert der unendlichen geometrischen Reihe (siehe Satz 5.1) kann man den Grenzwert der Reihe umformen:

$$\frac{8}{10}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{12}{10^{3+2k}} = \frac{8}{10}+\frac{12}{10^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^{2k}} = \frac{8}{10}+\frac{12}{10^3}\sum_{k=0}^{\infty}(10^{-2})^k$$

$$= \frac{8}{10}+\frac{12}{10^3}\cdot\frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{8}{10}+\frac{12}{10^3}\cdot\frac{100}{99} = \frac{8}{10}+\frac{12}{990}$$

$$= \frac{8}{10}+\frac{2}{165} = \frac{4}{5}+\frac{2}{165} = \frac{4\cdot 33}{165}+\frac{2}{165} = \frac{134}{165}$$

Oft ist es schwierig zu berechnen, wir der Grenzwert einer konvergenten Reihe lautet (oder gar unbekannt). Auch das Prüfen, ob die Reihe überhaupt konvergiert ist ein schwieriges Unterfangen. Im Rest dieses Kapitels führen wir Hilfsmittel ein, die manchmal beim Nachweis der Konvergenz helfen.

5.2 Absolute Konvergenz

Definition 5.7. *Eine Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut *falls die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *konvergiert.*

Satz 5.8. *Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.*

Wir bemerken zunächst, dass die Umkehrung gilt nicht, d.h. dass es konvergente Reihen gibt, die nicht absolut konvergieren. Zum Beispiel werden wir sehen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergent ist. Wir haben aber schon gesehen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ nicht konvergiert.

Der Satz macht eine Aussage über die Existenz eines Grenzwerts, ohne den Grenzwert konkret anzugeben. Bisher haben wir noch keine Techniken kennengelernt, mit denen man solche Aussagen beweisen kann. Folgender Satz ist dafür nützlich.

Satz 5.9 (Cauchy)**.** *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert genau dann, wenn es für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, sodass* $|a_N - a_n| < \varepsilon$ *für alle* $n > N$ *gilt.*

Beweisskizze. Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der Konvergenz gibt es $N' \in \mathbb{N}$ sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N'$. Wenn wir $N := N' + 1$ setzen, dann gilt die behauptete Eigenschaft, denn mit der Dreiecksungleichung erhalten wir $|a_N - a_n| \leq |a_N - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für alle $n > N$.

Für die andere Richtung definiert man eine Intervallschachtelung. Mit der Annahme können wir eine Folge von natürlichen Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ definieren, sodass $|a_{n_k} - a_n| < \frac{1}{2^k}$ für alle $n > n_k$ gilt. Das heißt, alle Folgenglieder a_n mit Index $n > n_K$ sind im Intervall $I_k := [a_{n_k} - \frac{1}{2^k}, a_{n_k} + \frac{1}{2^k}]$ enthalten. Die Intervalle $I_1, I_2, I_3, \dots$ bilden dann eine Intervallschachtelung: Hierfür muss man zeigen, dass $I_{k+1} \subset I_k$ für alle $k \in N$ gilt. Sei $x \in I_{k+1}$. Wir zeigen $x \in I_k$: Aus $x \in I_{k+1}$ folgt $|a_{n_{k+1}} - x| \leq \frac{1}{2^k}$. Zudem gilt $|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < \frac{1}{2^k}$ da $n_{k+1} > n_k$. Mit der Dreiecksungleichung folgt dann

$$\begin{aligned} |a_{n_k} - x| &= |(a_{n_{k+1}} - a_{n_k}) + a_{n_{k+1}} - x)| \\ &\leq |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| + |a_{n_{k+1}-x}| = |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| + |a_{n_{k+1}} - x| < \tfrac{2}{2^k} = \tfrac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

Damit folgt $x \in I_k$. D.h. $I_{k+1} \subseteq I_k$. Es gilt sogar $I_{k+1} \subset I_k$, da die Länge der Intervalle echt kleiner wird.

Schließlich schließt man, dass die eindeutige reelle Zahl, die in allen Intervallen enthalten ist, der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. □

Wir beweisen nun Satz 5.8:

Beweis von Satz 5.8. Wir benutzen Satz 5.9, um die Konvergenz der Folge der Partialsummen zu zeigen. Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen $N \in \mathbb{N}$ finden, sodass $\left|\sum\limits_{k=0}^{N} a_k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt. Da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, liefert Satz 5.9 ein N, sodass $\left|\sum\limits_{k=0}^{N} |a_k| - \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|\right| < \varepsilon$ für alle $n > N$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir die gewünschte Ungleichung:

$$\left|\sum_{k=0}^{N} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=N+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=N+1}^{n} |a_k| = \left|\sum_{k=0}^{N} |a_k| - \sum_{k=0}^{n} |a_k|\right| < \varepsilon$$

□

5.3 Konvergenzkriterien

5.3.1 Majorantenkriterium

Satz 5.10 (Majorantenkriterium). *Sei $\sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k$ eine konvergente Reihe. Dann konvergiert $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ absolut, wenn $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \geq n$ gilt.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |a_k|$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist. Nach Satz 4.11 folgt daraus die Konvergenz der Folge der Partialsummen und damit auch der Reihe.

Die Folge der Partialsummen von $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |a_k|$ ist sicher monoton wachsend, da die Summenglieder $|a_k|$ alle nichtnegativ sind. Mit der Annahme $|a_k| \leq c_k$ haben wir

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} c_k$$

für alle m. Also ist $\sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k$ eine obere Schranke für die Partialsummen. □

Beispiel 5.11. *Das Majorantenkriterium zeigt, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ absolut konvergiert.*

Nach Satz 5.2 wissen wir bereits, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2}{k(k+1)}$ konvergiert. Es gilt $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$ für alle $k > 0$[2], also zeigt das Majorantenkriterium, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ absolut konvergiert.

[2] Offensichtlich gilt $1 \leq k$ für alle $k > 0$. Daraus folgt $k+1 \leq k+k$ und damit auch $1 \leq \frac{k+k}{k+1} = \frac{2k}{k+1}$. Division durch k^2 zeigt $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$

Den Wert der Reihe kann man so aber nicht bestimmen, man weiss nur, dass *es ihn gibt. Zur Information:* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5.3.2 Quotientenkriterium

Satz 5.12 (Quotientenkriterium)**.** *Die Reihe* $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ *konvergiert absolut, wenn es eine Zahl* $0 \leq q < 1$ *gibt, sodass*

$$\left| \frac{a_{(k+1)}}{a_k} \right| \leq q$$

für fast alle k *gilt (d.h. für alle bis auf endlich viele* k*).*

Beweis. Wir benutzen das Majorantenkriterium mit der geometrischen Reihe.
Sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\left| a_{(k+1)}/a_k \right| \leq q$ für alle $k \geq N$ gilt. Solch ein N existiert nach Annahme.
Dann gilt $|a_k| \leq |a_N| q^{k-N}$ für alle $k > N$. Diese Aussage zeigt man durch Induktion. Der Induktionsanfang $|a_{N+1}| \leq |a_N| q$ folgt direkt aus $\left| \frac{a_{(N+1)}}{a_N} \right| \leq q$. Für den Induktionsschritt haben wir:

$$\begin{aligned} |a_{k+1}| &\leq |a_k| q && \text{wegen } \left| a_{(k+1)}/a_k \right| \leq q \\ &\leq |a_N| q^{k-N} q && \text{nach Induktionsannahme} \\ &= |a_N| q^{k+1-N} \end{aligned}$$

Wir können nun das Majorantenkriterium anwenden. Die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} |a_N| q^{k-N}$ konvergiert, da $\sum_{k=N}^{\infty} |a_N| q^{k-N} = \frac{|a_N|}{q^N} \sum_{k=N}^{\infty} q^k$ gilt und da die geometrische Reihe für $0 \leq q < 1$ konvergiert.
Mit $|a_k| \leq |a_N| q^{k-N}$ für $k > N$ zeigt das Majorantenkriterium, dass die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert. Dann konvergiert aber auch $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ absolut, da höchstens noch endlich viele Summanden hinzukommen. □

Beispiel 5.13.

- *Die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ *konvergiert absolut.*

  Hier gilt

  $$\left| \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2},$$

  also können wir das Quotientenkriterium mit $q = \frac{1}{2}$ *verwenden.*
  N.B.: Der Grenzwert der Reihe ist $e = 2.71828\ldots$.

- *Die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ *konvergiert absolut für alle* $x \in \mathbb{R}$.

  Hier gilt

$$\left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \frac{|x| \cdot k!}{(k+1)!} = \frac{|x|}{k+1} \leq \frac{1}{2}$$

  für alle $k \in \mathbb{N}$ *mit* $k > 2|x|$. *Da es nur endlich viele natürliche Zahlen* $\leq 2|x|$ *gibt, können wir das Quotientenkriterium ebenfalls mit* $q = \frac{1}{2}$ *verwenden.*

  N.B.: Der Grenzwert der Reihe ist e^x.

Beachte: Es genügt im Quotientenkriterium *nicht* $|a_{k+1}/a_k| < 1$ zu zeigen. Zum Beispiel konvergiert die harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ nicht, aber für alle k gilt:

$$\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} < 1$$

5.3.3 Leibnizsches Kriterium

Satz 5.14 (Leibnizsches Kriterium)**.** *Sei* $(a_k)_{k \geq n}$ *eine Folge mit* $a_k \geq 0$ *und* $a_k \geq a_{k+1}$ *für alle* $k \geq n$. *Gilt weiterhin* $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$*, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k \quad .$$

Beispiel 5.15. *Die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium (mit $a_k = \frac{1}{k}$*). Über den Grenzwert macht das Kriterium wie immer keine Aussage. Hier ist er* $\ln(2)$.

Beachte, dass man aus $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$ allein *nicht* schließen kann, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert. Die harmonische Reihe ist ein Gegenbeispiel.

Es gibt noch eine Anzahl weiterer Konvergenzkriterien (z.B. Cauchy-Kriterium, Wurzelkriterium). Auch wenn keines der Kriterien anwendbar ist, kann es noch sein, dass eine Reihe konvergiert. Dann muss man direkt mit der Grenzwertdefinition arbeiten.

6 Funktionen und Stetigkeit

Eine *Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ordnet jeder Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$ zu. Der Graph der Funktion ist die Menge der Paare $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Zeichnet man den Graphen in ein x-y-Koordinatensystem, so befindet sich über jedem x-Wert genau ein y-Wert (nämlich $y = f(x)$).

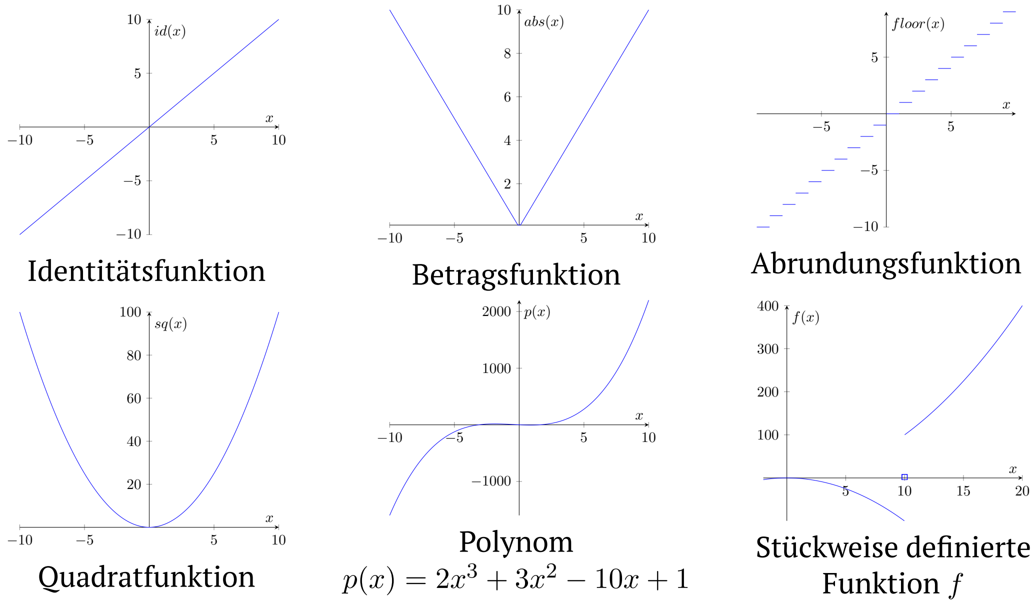


Abbildung 1: Ausschnitte einiger Funktionsgraphen

Beispiel 6.1. *Ausschnitte der Graphen zu einigen der folgenden Beispielen sind in Abbildung 1 zu finden.*

- *Identische Funktion* $id(x) = x$.
- *Betragsfunktion* $abs(x) = |x|$.
- *Die floor-Funktion:* $floor(x) = \lfloor x \rfloor$.
- *Quadratfunktion* $sq(x) = x^2$ *und allgemeiner Polynome* $p(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
- *Stückweise definierte Funktionen:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \textit{falls } x > 10, \\ 2 & \textit{falls } x = 10, \\ -x^2 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

- *Funktionen müssen nicht „glatt“ sein, z.B.*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } x \textit{ rational (d.h. } x = \frac{m}{n} \textit{ für geeignete } m, n \in \mathbb{N}), \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Es gibt auch Funktionen, die nicht für alle Argumente $x \in \mathbb{R}$ definiert sind. Sind D und W Teilmengen von $\mathbb{R}$, so schreibt man $f\colon D \to W$, wenn f jedem $x \in D$ einen Wert $y = f(x)$ in W zuordnet. Die Menge D heißt *Definitionsbereich* von f und W heißt *Wertebereich*.

Beispiel 6.2.

- $f(x) = \frac{1}{x}$. *Hier z.B.* $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *und* $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $f(x) = \sqrt{x}$. *Hier z.B.* $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

- *Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann als Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$ angesehen werden, mittels $f(n) = a_n$.*

In der Regel rührt ein Definitionsbereich $D \neq \mathbb{R}$ daher, dass der Funktionsterm nicht sinnvoll außerhalb von D definiert werden kann. Man kann den Definitionsbereich auch willkürlich einschränken. Beispiel: $id : \mathbb{R} \setminus \{42\} \to \mathbb{R}$.

Funktionen gibt es auch mit Definitions- und Wertebereichen, die nicht Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, so gibt es zweistellige Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oder einer Teilmenge davon. Definitions- und Wertebereich können auch ganz andere Mengen sein, wie die aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, usw. Im Folgenden sind aber, wenn nichts anderes gesagt ist, Funktionen immer auf einer Teilmenge der reellen Zahlen definiert und liefern reelle Zahlen zurück.

6.1 Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad .$$

Satz 6.3. *Die folgenden Aussagen sind wahr:*

- $\exp(0) = 1$.
- $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$.

Aus dem Satz folgt insbesondere $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, denn

$$\exp(-x) = \frac{\exp(x)\exp(-x)}{\exp(x)} = \frac{\exp(x + (-x))}{\exp(x)} = \frac{\exp(0)}{\exp(x)} = \frac{1}{\exp(x)} \quad .$$

Satz 6.4. *Es gilt:*

- $\exp(x) > 1$ *für alle* $x > 0$.
- $0 < \exp(x) < 1$ *für alle* $x < 0$.

Beweis. Für $x > 0$ ist die Aussage klar, da die Summe $\exp(x) = 1 + x + \frac{x}{2} + \ldots$ nur echt positive Glieder enthält. Für $x < 0$ verwenden wir $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$ und den ersten Punkt. □

6.2 Grenzwerte von Funktionen

Definition 6.5. *Sei D eine Menge von reellen Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt* Berührpunkt *von D falls es eine Folge (a_n) von Zahlen $a_n \in D$ gibt mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.*

Beispiele:

- Jede Zahl $a \in D$ ist ein Berührpunkt von D, da man einfach die konstante Folge $a_n := a$ wählen kann.
- Für $a < b$ sind die Zahlen a und b Berührpunkte des offenen Intervalls (a, b).
- Für kein $\varepsilon > 0$ ist $b + \varepsilon$ ein Berührpunkt des offenen Intervalls (a, b).

Definition 6.6. *Ist $f: D \to W$ eine Funktion und a ein Berührpunkt von D, dann schreibt man*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

Die Funktionswerte $f(x_n)$ streben also gegen b, sofern die Argumentfolge (x_n) gegen a strebt. Die Annahme, dass a ein Berührpunkt von D ist, ist nötig, damit es überhaupt eine solche Argumentfolge gibt.

Man kann die obigen beiden Definitionen auch mit ∞ und $-\infty$ anstelle von $a \in \mathbb{R}$ machen. Man schreibt dann

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = c \ .$$

Ersteres bedeutet, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$ im Definitionsbereich auch $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$ gilt (und dass der Definitionsbereich mindestens eine solche Folge enthält).

Beispiel 6.7.

- $\lim_{x \to a} x^2 + 7 = a^2 + 7$ *und analoges gilt für beliebige Polynome.*
- $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to \infty} x^2 + 7 = \infty$*, analog zur bestimmten Divergenz von Folgen.*
- $\lim_{x \to 2} \frac{(x-1)}{(x^2-1)} = \frac{1}{3}$
- $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)}{(x^2-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

Grenzwerte müssen nicht existieren, z.B. existiert $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ nicht.

Manchmal schränkt man bei der Limesbildung den Definitionsbereich D der Funktion auf $\{x \in D \mid x > a\}$ oder $\{x \in D \mid x < a\}$ ein. Man nähert sich also dem Punkt von links oder von rechts an. Dafür schreibt man dann

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) \ .$$

Beispiel 6.8.

- *Es gilt* $\lim_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$ *aber* $\lim_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$ *und* $\lim_{x \to 1} \lfloor x \rfloor$ *existiert nicht.*
- *Ein weiteres Beispiel ist* $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ *aber* $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Satz 6.9. *Sei $f(a) = b$ oder $f(a)$ undefiniert. Dann gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ genau dann, wenn*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = b.$$

Der Satz wird weiter unten bewiesen.

Lemma 6.10. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt $|\exp(x) - 1| \leq 2|x|$.*

Beweis.

$$
\begin{aligned}
|\exp(x)-1| &= \left| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) - 1 \right| && \text{nach Definition}\\
&= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| && \text{Vereinfachung}\\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} && \text{Dreiecksungleichung}\\
&= |x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{k!} && |x| \text{ ausklammern}\\
&\leq |x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{2^{k-1}} && \text{denn es gilt } 2^{k-1} \leq k! \text{ für alle } k \geq 1\\
&< |x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} && \text{wegen } |x| < 1\\
&\leq |x| 2 && \text{geometrische Reihe}
\end{aligned}
$$

□

Satz 6.11. *Es gilt* $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1$.

Beweis. Wir müssen zeigen: Wenn $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dann $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = 1$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gibt es für $\varepsilon' = \min(1, \varepsilon/2)$ einen Index N, sodass $|x_n| < \varepsilon' \leq 1$ für alle $n > N$ gilt. Mit Lemma 6.10 folgt daraus $|\exp(x_n) - 1| \leq |2x_n| < 2\varepsilon' \leq \varepsilon$ für alle $n > N$. Das zeigt $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = 1$. □

Satz 6.12 (Epsilon-Delta-Charakterisierung des Grenzwerts)**.** *Es gilt* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *genau dann wenn es für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, sodass* $|f(x) - b| < \varepsilon$ *für alle* x *im Definitionsbereich von* f *mit* $|x - a| < \delta$ *gilt.*

Für jede geforderte Genauigkeit ε gibt es eine δ-Umgebung von a, innerhalb derer alle Funktionswerte höchstens ε von $f(a)$ abweichen.

Der Beweis ist nicht schwer und wird hier weggelassen. Stattdessen geben wir einen Beweis von Satz 6.9 als Beispiel zur Verwendung der Epsilon-Delta-Charakterisierung an.

Beweis von Satz 6.9. Aus $\lim_{x\to a} f(x) = b$ folgt $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ und $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$ direkt nach Definition.

In die andere Richtung können wir $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ und $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$ annehmen. Mit der Epsilon-Delta-Formulierung bedeutet das, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ zwei Zahlen $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$ gibt, sodass $|f(x_1) - b| < \varepsilon$ für alle $x_1 > a$ aus dem Definitionsbereich f mit $|x_1 - a| < \delta_1$ sowie $|f(x_2) - b| < \varepsilon$ für alle $x_2 < a$ aus dem Definitionsbereich f und $|x_2 - a| < \delta_2$. Dann gilt aber sicher erst recht $|f(x) - b| < \varepsilon$ für alle x aus dem Definitionsbereich von f mit $|x - a| < \min(\delta_1, \delta_2)$ (wenn a im Definitionsbereich liegt, folgt dies aus $f(a) = b$).

Wir haben also gezeigt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt (nämlich $\min(\delta_1, \delta_2)$), sodass $|f(x) - b| < \varepsilon$ für alle x mit $|x - a| < \delta$ gilt. □

6.3 Stetigkeit

Definition 6.13. *Eine Funktion* $f\colon D \to W$ *ist im Punkt* $a \in D$ *stetig falls* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ *gilt.*

Beispiel 6.14.

- $f(x) = x^2$ *ist überall stetig. Analog sind Polynome überall stetig.*
- $f(x) = \lfloor x \rfloor$ *ist an allen nicht-ganzzahligen Punkten stetig.*
- $f(x) = |x|$ *ist überall stetig.*

Satz 6.15. *Die Exponentialfunktion* $\exp(x)$ *ist überall stetig.*

Beweis. Wir haben bereits $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1$ und $\exp(0) = 1$ gezeigt, was Stetigkeit im Punkt 0 entspricht. Die Stetigkeit in einem anderen Punkt $a \in \mathbb{R}$ können wir darauf zurückführen. Sei (x_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Wir müssen $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)$ zeigen. Wir haben

$$\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a + a) = \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a)\exp(a) = \exp(a) \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a).$$

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ folgt aber $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a) = 0$. Also ist (x'_n) mit $x'_n := x_n - a$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$. Aus der Stetigkeit im Punkt 0 folgt dann $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x'_n) = 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = 1$. Durch Einsetzen in die obige Gleichung erhalten wir $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)$, was zu zeigen war. □

Satz 6.16. *Wenn* f *und* g *im Punkt* x_0 *stetig sind, dann sind auch folgende Funktionen im Punkt* x_0 *stetig.*

- $h_1(x) = f(x) + g(x)$.
- $h_2(x) = f(x)g(x)$.
- $h_3(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, *falls* $g(x_0) \neq 0$.

Wenn g *im Punkt* x_0 *stetig ist und* f *im Punkt* $y_0 = g(x_0)$ *stetig ist, dann ist auch* $h_4(x) = f(g(x))$ *im Punkt* x_0 *stetig.*

Beispiel 6.17.

- $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{(x-2)(x+3)(x-5)}$ *ist in allen Punkten außer* 2, -3 *und* 5 *stetig.*
- $\exp\left(\dfrac{x^2}{3}\right)$ *ist überall stetig.*

6.4 Zwischenwertsatz

Satz 6.18 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und seien* $a < b \in \mathbb{R}$ *Zahlen mit* $f(a) < 0$ *und* $f(b) > 0$. *Dann gibt es eine Zahl* $c \in [a, b]$ *mit* $f(c) = 0$.

Beweis. Wir definieren eine Intervallschachtelung $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \ldots$ wie folgt:

- $a_0 := a$ und $b_0 := b$.

- Wenn das n-te Intervall schon definiert ist, dann definieren wir das $(n+1)$-te Intervall wie folgt. Sei $m := \frac{a_n+b_n}{2}$ der Mittelpunkt von a_n und b_n. Wenn $f(m) \geq 0$, dann definieren wir $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := m$. Wenn $f(m) < 0$, dann definieren wir $a_{n+1} := m$ und $b_{n+1} := b_n$.

Man überlegt sich, dass dies eine Intervallschachtelung definiert. Zum Beispiel halbiert sich die Länge der Intervalle in jedem Schritt.

Nach dem Satz über Intervallschachtelungen gibt es also eine eindeutige Zahl $c \in \mathbb{R}$, die in allen Intervallen enthalten ist.

Wir zeigen, dass $f(c) = 0$ gilt. Zunächst bemerken wir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. Dies gilt, da c in allen Intervallen liegt, und sich die Länge Intervalle in jedem Schritt halbiert. Wegen der Stetigkeit von f folgt weiterhin $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$.

Nach Konstruktion gilt aber $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) \geq 0$ für alle n (Beweis durch Induktion). Also muss $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$ gelten. Das heißt $f(c) \leq 0$ und $f(c) \geq 0$, somit $f(c) = 0$. □

Satz 6.19. *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, seien $a < b$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ Zahlen mit $f(a) < y_0$ und $f(b) > y_0$. Dann gibt es eine Zahl $c \in [a,b]$ mit $f(c) = y_0$.*

Beweis. Definiere $g(x) = f(x) - y_0$. Diese Funktion erfüllt die Voraussetzungen des Zwischenwertsatzes, also gibt es $x \in [a,b]$ mit $g(c) = 0$. Nach Definition von g gilt dann aber $f(c) - y_0 = 0$, also $f(c) = y_0$, was zu zeigen war. □

6.5 Monotonie und Umkehrfunktion

Definition 6.20. *Eine Funktion f ist* monoton steigend, *wenn aus $x < y$ folgt $f(x) \leq f(y)$. Sie ist* monoton fallend, *wenn aus $x < y$ folgt $f(x) \geq f(y)$. Sie ist* streng monoton steigend, *wenn aus $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$. Sie ist* streng monoton fallend, *wenn aus $x < y$ folgt $f(x) > f(y)$.*

Der Graph einer streng monoton steigenden Funktion steigt von links nach rechts gelesen an. Der Graph einer monoton steigenden Funktion darf auch streckenweise liegenbleiben.

Die Funktionen x^3 , $\sqrt{x}$ und $\lfloor x \rfloor$ sind monoton steigend[3], die ersten zwei sogar streng.

Die Funktion $\frac{1}{x}$ eingeschränkt auf positive reelle Zahlen ist streng monoton fallend.

Definition 6.21 (Umkehrfunktion)**.** *Sei $f\colon D \to W$ eine Funktion. Eine Funktion $g\colon W \to D$ heißt* Umkehrfunktion *von f falls $f(x) = y$ genau dann wenn $g(y) = x$ (für alle $x \in D$ und $y \in W$).*

Satz 6.22. *Ist $g\colon W \to D$ Umkehrfunktion von $f\colon D \to W$, so gilt $g(f(x)) = x$ und $f(g(y)) = y$ für alle $x \in D$ und $y \in W$.*

Beweis. Nach Definition gilt $g(f(x)) = x$ genau dann wenn $f(x) = f(x)$, was aber offensichtlich wahr ist. Analogt gilt $f(g(y)) = y$ genau dann wenn $g(y) = g(y)$, was ebenfalls wahr ist. □

[3] N.B.: Strenggenommen müsste man schreiben, die Funktionen sq, $sqrt$, $floor$ mit $sq(x) = x^2$, $sqrt(x) = \sqrt{x}$ und $floor(x) = \lfloor x \rfloor$ sind monoton steigend. Der Ausdruck x^2 ist eigentlich keine Funktion, sondern ein Term. Es hat sich aber eingebürgert, über diese Ungenauigkeit wegen der besseren Lesbarkeit hinwegzugehen.

Satz 6.23. *Sei $f\colon D \to W$ eine streng monoton steigende Funktion und sei W so gewählt, dass jedes Element von W auch tatsächlich als Funktionswert auftritt. Dann hat f eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion $f^{-1}\colon W \to D$, die ebenfalls streng monoton steigend ist.*

Beweis. Nach Annahme gibt es für jedes $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$. Da f streng monoton steigend ist, kann es auch nur ein solches x geben. Denn wenn es $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$ gäbe, dann wäre f nicht streng monoton steigend. Wir definieren $g(y)$ als das eindeutige Element $x \in D$ mit $f(x) = y$ und erhalten so eine Umkehrfunktion.

Für die Monotonie müssen wir zeigen, dass für alle $y_1, y_2 \in W$ mit $y_1 < y_2$ auch $g(y_1) < g(y_2)$ gilt. Angenommen $g(y_1) \geq g(y_2)$. Wegen der Monotonie von f folgt daraus $f(g(y_1)) \geq f(g(y_2))$. Da g Umkehrfunktion von f ist, gilt $f(g(y_1)) = y_1$ und $f(g(y_2)) = y_2$, also auch $y_1 \geq y_2$. Das widerspricht aber $y_1 < y_2$, also muss die Annahme falsch gewesen sein und $g(y_1) < g(y_2)$ gelten. □

Man erhält den Graphen der Umkehrfunktion aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der 45 Grad steilen Ursprungsgeraden.

Beispiel 6.24. *Für $f(x) = x^2$ mit $D = W = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ gilt $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Nimmt man $D = \mathbb{R}$, so ist f nicht monoton und hat keine Umkehrfunktion.*

Man beachte: Die Notation $f^{-1}(x)$ nicht mit $f(x)^{-1}$ verwechseln. Die Notation $f(x)^{-1}$ steht für $\frac{1}{f(x)}$, während $f^{-1}(x)$ den Wert der Umkehrfunktion von f im Punkt x bezeichnet.

6.6 Logarithmus

Satz 6.25. *Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist streng monoton steigend.*

Beweis. Sei $x < y$. Dann ist $y - x > 0$ und es gilt $\exp(y - x) > 1$ nach Satz 6.4. Damit haben wir $\exp(y) = \exp(x + (y - x)) = \exp(x)\exp(y - x) > \exp(x)$, wie behauptet. □

Folgerung: Wenn $\exp(x) = \exp(y)$ dann $x = y$.

Satz 6.26. *Die Exponentialfunktion nimmt jeden Wert in $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ an.*

Beweis. Durch Ausrechnen der ersten Glieder der Exponentialreihe wissen wir $\exp(1) > 2$. Mit der Rechenregel $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ folgt daraus $\exp(k) > 2^k$ und $\exp(-k) < \frac{1}{2^k}$. Für jede Zahl $y > 0$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^k} < y < 2^k$ (Sätze 3.14 und 3.15). Für dieses k gilt also $\exp(-k) < y < \exp(k)$. Da $\exp$ stetig ist, können wir den Zwischenwertsatz anwenden und erhalten, dass es ein x mit $-k < x < k$ und $y = \exp(x)$ gibt. Also haben wir gezeigt, dass $\exp$ jedes $y > 0$ als Wert annimmt. □

Definition 6.27 (Logarithmus). *Die* Logarithmusfunktion $\ln\colon \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \to \mathbb{R}$ *ist definiert als die Umkehrfunktion von* $\exp$.

Wir haben also $\ln(\exp(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\exp(\ln(y)) = y$ für alle $y > 0$.

Definiere $e := \exp(1)$.

Satz 6.28. *Es gelten folgende Rechenregeln:*

$$\begin{aligned}\ln(1) &= 0\\ \ln(e) &= 1\\ \ln(xy) &= \ln(x)+\ln(y) \text{ für alle } x,y>0\end{aligned}$$

Beweis. Die ersten beiden Gleichungen folgen aus $\exp(0)=1$ und $\exp(1)=e$ und der Definition der Umkehrfunktion: $\ln(1)=\ln(\exp(0))=0$ und $\ln(e)=\ln(\exp(1))=1$.

$\ln(xy)=\ln(\exp(\ln(x))\exp(\ln(y)))=\ln(\exp(\ln(x)+\ln(y)))=\ln(x)+\ln(y)$ □

6.7 Allgemeine Potenzen

Für $x,y\in\mathbb{R}$ mit $x>0$ ist die allgemeine Potenz definiert durch:

$$x^y := \exp(y\ln(x))$$

Für ganzzahlige y stimmt das mit der bisherigen Definition überein.

Weiterhin gilt $e^x=\exp(x)$ nach Definition und wegen $\ln(e)=1$.

Es gelten folgende Potenzgesetze:

$$\begin{aligned}a^0 &= 1 & a^1 &= a & a^{u+v} &= a^u a^v\\ a^{u-v} &= \frac{a^u}{a^v} & a^{uv} &= (a^u)^v & a^{\frac{u}{v}} &= (a^u)^{\frac{1}{v}}\end{aligned}$$

Diese beweist man direkt mit der Definition und den Rechenregeln für $\exp$ und $\ln$. Beispiel:

$$a^{u+v}=\exp((u+v)\ln(a))=\exp(u\ln(a)+v\ln(a))=\exp(u\ln(a))\exp(v\ln(a))=a^u a^v$$

7 Komplexe Zahlen

7.1 Definition durch Hinzunahme der Wurzel aus -1

Man erhält die komplexen Zahlen, indem man zu den reellen Zahlen die *imaginäre Einheit* i, die dem Gesetz $i^2=-1$ genügt, hinzunimmt.

Bemerkung: Man kann nicht „einfach so“ Zahlen dazu nehmen. Käme z.B. jemand auf die Idee, eine Zahl j einzuführen, sodass $j=\frac{1}{0}$, so hätte man $0\cdot j=1$, also $0=1\cdot j-1\cdot j=(1-1)\cdot j=0\cdot j=1$, ein Widerspruch. Im Falle der Wurzel aus -1 ist diese Hinzunahme von i aber widerspruchsfrei möglich.

Jede komplexe Zahl hat dann die Form $a+i\cdot b$ für $a,b\in\mathbb{R}$, denn jeder Rechenausdruck mit komplexen Zahlen lässt sich mithilfe der folgenden Rechenregeln auf dieses Format bringen.

Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\
(a+bi)\cdot(c+di) &= ac+(ad+bc)\cdot i+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i \text{ wegen } i^2=-1 \\
(a+bi)-(c+di) &= (a-c)+(b-d)i \\
\frac{(a+bi)}{(c+di)} &= \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{1}{(c^2+d^2)}\cdot(ac+bd+(bc-ad)i)
\end{aligned}$$

Ist $z = a + bi$, so heißt a *Realteil von* z und b *Imaginärteil von* z. Man schreibt $a = \mathrm{Re}(z)$ und $b = \mathrm{Im}(z)$.

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

7.2 Konjugation und Betrag

Definition 7.1. *Die* Konjugierte *von* $z \in \mathbb{C}$ *ist die komplexe Zahl* $\overline{z} := \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)\cdot i$.

Es ist $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.

Man definiert den Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl z durch

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
|w+z| &\leq |w|+|z| \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \\
|w\cdot z| &= |w|\cdot|z|
\end{aligned}$$

Der Division komplexer Zahlen liegt also das Erweitern mit der Konjugierten des Nenners zugrunde: $\frac{w}{z} = \frac{w\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{|z|^2}\cdot w\cdot\overline{z}$.

7.3 Komplexe Zahlenebene

Man veranschaulicht sich die komplexen Zahlen als Ortsvektoren in der Ebene (Realteil = x-Koordinate, Imaginärteil = y-Koordinate, siehe auch Abbildung 2). Die Länge dieser Vektoren entspricht dann gerade dem eben definierten Betrag.

Die Addition komplexer Zahlen entspricht der Vektoraddition, die Multiplikation entspricht der Operation „stretch and turn“: Die Längen (Beträge) der zu multiplizierenden Vektoren werden multipliziert, die Winkel der Vektoren, gemessen von der x-Achse entgegen dem Uhrzeigersinn, werden *addiert*.

Zum Beispiel ist die imaginäre Einheit i der Einheitsvektor in y-Richtung. Multipliziert man ihn mit sich selbst nach der „stretch-and-turn“ Vorschrift, so erhält man offensichtlich die Minus Eins. Ebenso gilt natürlich $i^3 = -i$ und $i^4 = 1$.

Ist ε die komplexe Zahl mit Betrag 1 und Winkel 120 Grad, also $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$, so ist $\varepsilon^2 = \overline{\varepsilon}$ und $\varepsilon^3 = 1$.

Man sagt: ε ist eine primitive dritte Einheitswurzel („Wurzel aus Eins“). „Primitiv“ deshalb, weil alle drei dritten Einheitswurzeln, nämlich 1, ε und $\overline{\varepsilon}$ Potenzen von ε sind. Ebenso ist $\overline{\varepsilon}$ primitive dritte Einheitswurzel, denn $\overline{\varepsilon}^2 = \varepsilon$ und $\overline{\varepsilon}^3 = 1$.

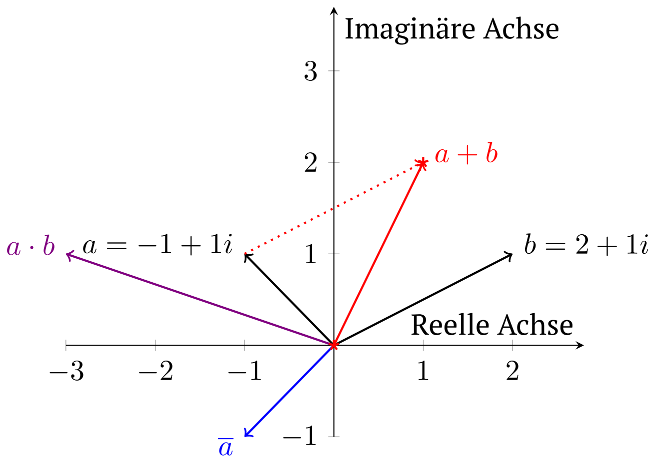


Abbildung 2: Veranschaulichung der Komplexen Zahlenebene: Addition (rot), Konjugation (blau), Multiplikation (violett)

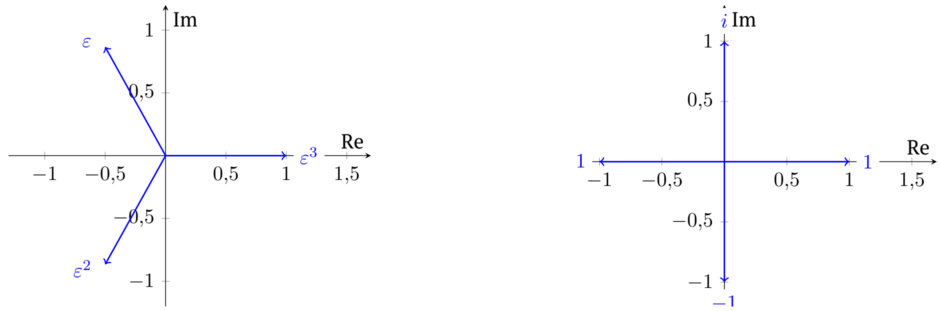


Abbildung 3: Komplexe Einheitswurzeln: Veranschaulichung

Die Zahlen $1, i, -1, -i$ sind vierte Einheitswurzeln, i und $-i$ sind sogar primitiv. In Abbildung 3 sind Veranschaulichungen für dritte und vierte Einheitswurzeln gezeigt.

Die Einheitswurzeln spielen unter anderem bei der diskreten Fouriertransformation, einem wichtigen Hilfsmittel bei der Signalverarbeitung eine bedeutende Rolle.

7.4 Komplexe Nullstellen von Polynomen

In den komplexen Zahlen hat jede (nichttriviale[4]) quadratische Gleichung eine Lösung, z.B. $x^2 - 2x + 5 = 0$ hat die Lösungen $x_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{(\frac{-2}{2})^2 - 5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$.

Es gilt sogar, dass jedes nichtkonstante Polynom eine Nullstelle in den komplexen Zahlen hat („Fundamentalsatz der Algebra“). Hat man eine Nullstelle x_0 gefunden, dann kann man die „rausdividieren“ und findet so insgesamt genau so viele Nullstellen (Vielfachheit eingerechnet), wie der Grad des Polynoms.

So hat das Polynom $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = (x^2 - 2x + 5) \cdot (x - 1)$ eine reelle Nullstelle, nämlich 1 und zwei komplexe Nullstellen, nämlich $1 + 2i$ und $1 - 2i$.

[4] Bemerkung: $ax^2 + bx + c = 0$ heißt hier „trivial“, wenn $a = b = 0$.

Da die komplexe Konjugation mit Addition und Multiplikation verträglich ist ($\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$), folgt, dass wenn z eine Nullstelle eines Polynoms $P(x)$ ist, so auch die Konjugierte $\overline{z}$.

7.5 Konvergenz im Komplexen

Konvergenz von Folgen und Grenzwerte von Funktionen werden im Komplexen genauso wie im Reellen definiert. An die Stelle des Absolutbetrages tritt hier der Betrag der komplexen Zahlen.

Also konvergiert eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen gegen $b \in \mathbb{C}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n > N$ gilt $|a_n - b| < \varepsilon$.

Die Konvergenzkriterien für Reihen und bereits hergeleitete Summenformeln gelten sinngemäß fort.

Beispiel 7.2. *Sei* $z := \frac{1}{(1+i)} = \frac{1}{2} \cdot (1-i)$. *Es gilt* $|z| = \frac{1}{2} < 1$, *also ist*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(1+i)} \right)^k = \frac{1}{1-z} = \frac{2}{(1+i)} = 1 - i \ .$$

7.6 Komplexe Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Man erweitert die Exponentialfunktion $\exp(x)$ auf die komplexen Zahlen, indem man die Reihe auf komplexen Zahlen auffasst.

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Es gilt dann weiterhin $\exp(w+z) = \exp(w) \cdot \exp(z)$, selbst wenn w und z komplex sind.

Es gilt $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$ (siehe z.B. (For16)). Da $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ kann man folgern

$$|e^{i \cdot t}|^2 = e^{i \cdot t} \cdot \overline{e^{i \cdot t}} = e^{i \cdot t} \cdot e^{\overline{i \cdot t}} = e^{i \cdot t - i \cdot t} = e^0 = 1$$

Daraus folgt $|e^{i \cdot t}| = 1$, d.h. für jedes t liegt $e^{i \cdot t}$ auf dem Einheitskreis (siehe Abbildung 4).

Die trigonometrischen Funktionen $\sin$ und $\cos$ werden durch

$$\sin(t) = \mathrm{Im}(\exp(i \cdot t))$$

und

$$\cos(t) = \mathrm{Re}(\exp(i \cdot t))$$

definiert.

Es gilt also insbesondere $\exp(i \cdot t) = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$ (siehe die geometrische Interpretation am Einheitskreis). Weiterhin folgt $e^{(a+bi)} = e^a \cdot (\cos(b) + i \cdot \sin(b))$.

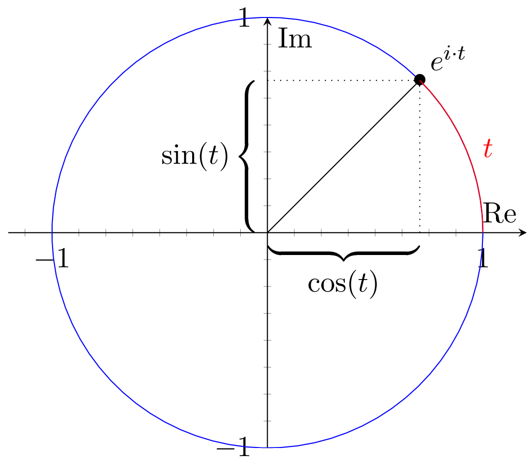


Abbildung 4: Veranschaulichung der Exponentialfunktion am Einheitskreis und der Definition von $\sin$ *und* $\cos$

Aus der geometrischen Interpretation ergeben sich folgende spezielle Werte.

$$\begin{aligned} \sin(0) &= 0 & \cos(0) &= 1 \\ \sin(\pi) &= 0 & \cos(\pi) &= -1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 1/2 \cdot \sqrt{3} & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 1/2 \qquad (\tfrac{\pi}{3} \text{ entspricht 60 Grad}) \end{aligned}$$

Ebenfalls anhand der geometrischen Interpretation wird klar, dass folgende Gleichungen für alle α gelten.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 2\pi) &= \sin(\alpha) & \cos(\alpha + 2\pi) &= \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) & \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) &= \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) & \sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Satz 7.3. *Für alle α und β gilt:*

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

Beweis. Die Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion impliziert

$$e^{i(x+y)} = e^{ix+iy} = e^{ix} \cdot e^{iy}.$$

Anwendung der geometrischen Interpretation am Einheitskreis (s.o.) ergibt dann

$$\begin{aligned} \cos(x + y) + i\sin(x + y) &= (\cos(x) + i\sin(x)) \cdot (\cos(y) + i\sin(y)) \\ &= (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)) + i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt durch Vergleich von Real- und Imaginärteil. □

Satz 7.4. *Es gelten folgende Reihenentwicklungen für die trigonometrischen Funktionen:*

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Beweis. Nach Definition $\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!}$. Es gilt $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ usw. In der Reihe sind (für reelles x) also die Glieder mit geradem Index alle reell und die mit ungeradem Index imaginär. Der Realteil von $\exp(ix)$ lässt sich dann schreiben als:

$$\frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Der Imaginärteil von $\exp(ix)$ lässt sich schreiben als:

$$\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

□

Für den speziellen Wert $x = \pi$ ergibt sich aus $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ die berühmte Eulersche Formel

$$e^{i\pi} = -1$$

und ebenso $e^{2\pi i} = 1$.

7.7 Trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen

Die Funktionen $\cos(x)$ und $\sin(x)$ wurden als Real- und Imaginärteil von $\exp(ix)$ definiert.

Man verwendet auch häufig die Tangens-Funktion, die durch

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

definiert ist. Die Tangens-Funktion ist an den Nullstellen von $\cos(x)$ undefiniert, d.h. an den Punkten $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{N}$.

Die Funktion $\sin$ ist im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton steigend und nimmt alle Werte aus $[-1, 1]$ an. Eingeschränkt auf dieses Intervall hat $\sin$ also eine Umkehrfunktion, die Arcussinus genannt wird $\arcsin\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Analog ist $\cos$ im Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend und nimmt alle Werte aus $[-1, 1]$ an. Eingeschränkt auf dieses Intervall hat $\cos$ also eine Umkehrfunktion, die Arcuscosinus genannt wird $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$.

Die Tangensfunktion ist im offenen Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton wachsend und nimmt alle Werte aus $\mathbb{R}$ an. Ihre Umkehrfunktion wird $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ genannt.

7.8 Polarkoordinaten

Jede komplexe Zahl $z = a + bi$ kann in der Form $r \cdot e^{i \cdot \alpha}$ geschrieben werden, wobei $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und α der Winkel des Ortsvektors (a, b) ist. Es gilt

$$\alpha = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}) & \text{falls } a > 0, b \geq 0 \\ \pi - \arctan(\frac{b}{a}) & \text{falls } a < 0 \\ 2\pi + \arctan(\frac{b}{a}) & \text{falls } a > 0, b < 0 \\ \pi/2 & \text{falls } a = 0, b > 0 \\ 3\pi/2 & \text{falls } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

(für $(a, b) \neq (0, 0)$)

In vielen Programmiersprachen gibt es die Funktion `atan2` für diesen Zweck.

Man erhält als Anwendung eine praktische Darstellung der n-ten Einheitswurzeln. Wenn man $w_z := e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i}{n}}$ setzt, dann sind die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks vom Radius Eins in der Zahlenebene $w_z, w_z^2, ..., w_z^n$. Es gilt $w_z^n = 1$.

Anwendung: Die Gleichung $e^x = z$ hat für alle $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung, nämlich $\ln(r) \cdot i \cdot (\phi + 2 \cdot \pi \cdot k)$, falls $z = r \cdot e^{i \cdot \phi}$ und $k \in \mathbb{Z}$ beliebig.

7.9 Komplexe Potenzen

Für reelles $a > 0$ und komplexes z definiert man

$$a^z := \exp(z \cdot \ln(a)).$$

Es gilt dann $a^{w+z} = a^w \cdot a^z$.

Potenzen mit komplexen Basen sind ebenso wie solche mit negativen Basen nach wie vor nur für ganzzahlige Exponenten erklärt. Zum Beispiel gäbe es für die Definition von $(-1)^{0.5}$ zwei verschiedene Möglichkeiten, nämlich i und $-i$.

Auch für komplexe Exponenten und negative Basen ist nicht klar, wie die Potenz zu definieren wäre. Zum Beispiel gilt $e^{i2\pi} = 1$, also würde man (durch Potenzieren mit i) auch $e^{-2\pi} = 1^i = 1$ erwarten, was im Reellen aber sicher nicht gilt.

8 Differentiation

8.1 Definition und Beispiele

Nach der Definition der trigonometrischen Funktionen durch die komplexe Exponentialfunktion beschäftigen wir uns im Folgenden zunächst wieder mit reellen Funktionen.

Definition 8.1. *Sei $f\colon D \to W$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $W \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt an der Stelle $x \in D$* differenzierbar, *wenn der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Man schreibt dann $f'(x)$ für diesen Grenzwert.

Man findet auch die Notation $\frac{df(x)}{dx}$ („$df(x)$ nach dx“).

Beachte, dass der Grenzwert nicht immer existieren muss. Nicht alle Funktionen sind überall differenzierbar.

Die Zahl $f'(a)$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle a, also die Steigung des Graphen im Punkt a. Die Tangente im Punkt a ist die lineare Funktion $t(x) = (x - a)f'(a) + f(a)$.

Die durch

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

definierte Funktion f' heißt die *Ableitung von* f.

Beispiel 8.2.

- *Für* $f(x) = c$ *mit* $c \in \mathbb{R}$ *gilt* $f'(x) = 0$.

  Es gilt $\lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$, *also* $f'(x) = 0$ *und der Grenzwert existiert für alle* $x \in \mathbb{R}$.

- *Für* $f(x) = x$ *gilt* $f'(x) = 1$, *denn*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1 \quad .$$

- *Für* $f(x) = x^2$ *gilt* $f'(x) = 2x$, *denn*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x \quad .$$

- *Für* $f(x) = \frac{1}{x}$ *gilt* $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, *denn*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{x(x+h)h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{x(x+h)h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \quad .$$

- *Für* $f(x) = \exp(x)$ *gilt* $f'(x) = \exp(x)$, *denn*

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)}{h} \\ &= \exp(x) \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \\ &= \exp(x) \quad .\end{aligned}$$

  Um $\lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1$ *zu zeigen, kann man die Reihendarstellung* $\exp(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}$ *verwenden. Daraus folgt* $\frac{\exp(h)-1}{h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{(k+1)!}$. *Beachte, dass diese Reihe für* $h = 0$ *den Wert* 1 *hat. Die Reihe definiert eine stetige Funktion (das kann man wie in Satz 6.11 zeigen), d.h.* $\lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{(k+1)!} = 1$.

- *Für $f(x) = \sin(x)$ gilt $f'(x) = \cos(x)$.*

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}\\ &= \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} + \sin(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\\ &= \cos(x)\end{aligned}$$

- *Für $f(x) = \cos(x)$ gilt analog $f'(x) = -\sin(x)$.*

Satz 8.3. *Sei f eine im Punkt $a \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion. Definiere die Funktion r durch*

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + r(x) \quad .$$

Dann gilt $\lim_{h\to 0}\frac{r(a+h)}{h} = 0$.

Die Funktion f wird zerlegt in die Summe einer linearen Funktion $f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$ (die Tangente von f im Punkt a) plus einen Rest $r(x)$. Der Satz sagt aus, dass der Rest um den Punkt a einen geringeren als linearen Beitrag leistet. Es geht $r(a+h)$ für $h \to 0$ schneller gegen 0 als die lineare Funktion h.

Beweis. Durch Umstellen von $f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + r(x)$ erhalten wir

$$\frac{r(x)}{(x-a)} = \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} - f'(a) \quad .$$

Einsetzen von $a+h$ für x ergibt

$$\frac{r(a+h)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a).$$

Daraus folgt

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(a+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \quad .$$

Nach Definition der Ableitung ist die rechte Seite gleich $f'(a)-f'(a) = 0$, was zu zeigen war. □

Auch die Umkehrung des Satzes gilt. Wenn man eine Funktion f so in eine lineare Funktion plus Rest zerlegen kann, sodass der Rest im Punkt a geringer als linear ist, dann muss die lineare Funktion die Tangente sein.

Satz 8.4. *Sei f eine Funktion und seien $a, b \in \mathbb{R}$. Definiere r durch*

$$f(x) = f(a) + b\cdot(x-a) + r(x) \quad .$$

Wenn $\lim_{h\to 0}\frac{r(a+h)}{h} = 0$, dann gilt $f'(a) = b$.

Beweis. Durch Umstellen und Einsetzen wie im vorangegangenen Beweis erhalten wir

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(a+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - b = f'(a) - b \quad .$$

Wenn der Grenzwert auf der linken Seite also 0 ist, dann muss auch $f'(a) - b = 0$ gelten, also $f'(a) = b$. □

Satz 8.5. *Ist eine Funktion f in einem Punkt a differenzierbar, so ist sie in a auch stetig.*

Beweis. Wir müssen $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ zeigen. Nach Satz 8.3 können wir $f(x)$ als $f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)$ mit $\lim_{h\to 0} \frac{r(a+h)}{h} = 0$ schreiben. Aus $\lim_{h\to 0} \frac{r(a+h)}{h} = 0$ folgt erst recht $\lim_{h\to 0} r(a+h) = 0$. Somit haben wir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} f(a) + f'(a)\cdot h + r(a+h) = f(a),$$

was zu zeigen war. □

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht immer. Zum Beispiel ist $f(x) = |x|$ im Punkt $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar.

8.2 Differentiationsregeln

Satz 8.6 (Linearität). *Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt x differenzierbare Funktionen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.
- $(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$.

Satz 8.7 (Produktregel). *Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt x differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad .$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} g(x+h) + f(x)\frac{(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0} g(x+h)\right) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Stetigkeit von g im Punkt x verwendet, die uns $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ liefert. □

Satz 8.8 (Quotientenregel). *Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt x differenzierbare Funktionen und sei g im ganzen Definitionsbereich nichtnull. Dann gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad .$$

Beweis. Wir zeigen den Spezialfall $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$. Der allgemeine Fall folgt daraus mit der Produktregel, indem man $\left(\frac{f}{g}\right) = f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)$ verwendet. Den Spezialfall sieht man durch direktes Ausrechnen des Grenzwerts.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x)g(x+h)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \cdot \frac{g(x)-g(x+h)}{h} = \frac{1}{g(x)^2} \cdot (-g'(x))\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir wieder die Stetigkeit von g benutzt. □

Beispiel 8.9.

- *Für $f(x) = x^3 = x^2 \cdot x$ erhalten wir mit der Produktregel (und den obigen Beispielen) $f'(x) = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$.*
- *Es gilt $(x^n)' = nx^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das zeigt man durch Induktion über n. Der Fall für $n = 0$ entspricht dem Beispiel für konstante Funktionen. Der Induktionsschritt folgt mit der Produktregel wie für x^3.*
- *Für $f(x) = \sin(x)\exp(x)$ gilt $f'(x) = \cos(x)\exp(x) + \sin(x)\exp(x)$ nach der Produktregel.*
- *Für $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ gilt $f'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x)-\sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$.*

Satz 8.10 (Kettenregel)**.** *Seien $g\colon D \to W$ und $h\colon W \to \mathbb{R}$ und sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = h(g(x))$ definiert. Ist g im Punkt x differenzierbar und h im Punkt $g(x)$, dann gilt*

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) \quad .$$

Ein Beweis des Satzes ist z.B. in (For16) zu finden.

Beispiel 8.11.

- *Für $f(x) = \exp(-x^2)$ gilt $f'(x) = \exp(-x^2) \cdot (-2x)$.*
- *Für $f(x) = (\sin(x))^2$ gilt $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.*

Satz 8.12 (Differentiation der Umkehrfunktion)**.** *Sei $f\colon D \to W$ und sei $g\colon W \to D$ die Umkehrfunktion von f (angenommen, dass diese existiert). Dann gilt*

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Beweis. Definiere eine Funktion h durch $h(x) = g(f(x))$. Durch Anwenden der Kettenregel auf h erhalten wir $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Da f die Umkehrfunktion von g ist, gilt aber auch $h(x) = x$, mithin $h'(x) = 1$. Somit haben wir $1 = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Division durch $f'(x)$ liefert die Behauptung. □

Beispiel 8.13.

- *Für $f(x) = \exp(x)$ und $g(x) = \ln(x)$ gilt $g'(\exp(x)) = \frac{1}{\exp(x)}$, also $g'(z) = \frac{1}{z}$.*

  Mit $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ können wir auch die Ableitung allgemeiner Potenzen bestimmen. Betrachte zum Beispiel x^x. Nach Definition der allgemeinen Potenz gilt $x^x = \exp(x\ln(x))$. Die Ableitung

$(x^x)'$ kann nun mit Kettenregel und Produktregel bestimmt werden.

$$(x^x)' = (\exp(x \cdot \ln(x)))' = \exp(x \cdot \ln(x)) \cdot (x \ln(x))' = \exp(x \cdot \ln(x)) \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\ln(x)+1)$$

- *Für $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \arcsin(x)$ haben wir $g'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)^2}}$, also $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*
- *Für $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = \arccos(x)$ haben wir $g'(\cos(x)) = \frac{-1}{\sin(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos(x)^2}}$, also $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.*
- *Für $f(x) = \tan(x)$ und $g(x) = \arctan(x)$ haben wir $g'(\tan(x)) = \cos(x)^2 = \frac{1}{1+\tan(x)^2}$, also $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. NR: $\tan(x)^2 = \frac{1-\cos(x)^2}{\cos(x)^2}$, also $\cos(x)^2 = \frac{1}{1+\tan(x)^2}$.*

Es ist bemerkenswert, dass die Ableitungen der Umkehrfunktionen von $\exp$, $\sin$, $\cos$ und $\tan$ vergleichsweise einfach aussehen.

Beispiel 8.14 (Anwendungsbeispiel). *Wir können folgende bekannte Formel beweisen.*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \tag{8.1}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) &= \lim_{n\to\infty} n \cdot \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} x \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\\
&= \lim_{h\to 0} x \cdot \frac{\ln(1+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} x \cdot \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} x \cdot \ln'(1)\\
&= x
\end{aligned}$$

Obige Formel folgt daraus aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion.

Formel (8.1) drückt „stetige Verzinsung“ aus. Die jährlichen Zinsen seien x, z.B. $x = 0.03$ (drei Prozent). Das Jahr wird in n Teile zerlegt, z.B. $n = 360$, nach jedem Teil werden die Zinsen berechnet und zum Kapital addiert. Es multipliziert sich also mit $1 + \frac{x}{n}$, bzw. nach einem Jahr um $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Lässt man die Teile immer kleiner werden, so wird im Grenzwert das Kapital mit e^x multipliziert.

8.3 Komplexe Funktionen

Die Definition der Ableitung kann man auch auf Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ übertragen. Auch für solche komplexen Funktion definiert man

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad .$$

Dabei ist nun h eine komplexe Zahl, die betragsmäßig gegen 0 geht.

Der Spezialfall $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist geometrisch noch leicht darzustellen. Dann definiert f eine Kurve in der Ebene. Zum Beispiel definiert $f(x) = e^{ix}$ den Einheitskreis. Die Ableitung $f'(z)$ ist eine komplexe Zahl, die man als Tangentialvektor der Kurve verstehen kann.

Die obigen Beispiele zur Differentiation von Funktionen (c, x, x^2, $\exp(x)$, $\ldots$) sind auch im Komplexen korrekt. Insbesondere gilt $\exp'(z) = \exp(z)$ auch im Komplexen.

Für eine komplexe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ schreiben wir $\mathrm{Re}f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im}f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ für die Funktionen, die den Real- bzw. Imaginärteil von f angeben. Das heißt, $\mathrm{Re}f(z) = \mathrm{Re}(f(z))$ und $\mathrm{Im}f(z) = \mathrm{Im}(f(z))$ und es gilt $f(z) = \mathrm{Re}f(z) + i \cdot \mathrm{Im}f(z)$.

Satz 8.15. *Für $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt $(\mathrm{Re}f)'(z) = \mathrm{Re}(f'(z))$ und $(\mathrm{Im}f)'(z) = \mathrm{Im}(f'(z))$.*

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{Re}(f(z+h)) + i \cdot \mathrm{Im}(f(z+h)) - (\mathrm{Re}(f(z)) + i \cdot \mathrm{Im}(f(z)))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{Re}(f(z+h)) - \mathrm{Re}(f(z))}{h} + i \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{Im}(f(z+h)) - \mathrm{Im}(f(z))}{h} \\
&= (\mathrm{Re}f)'(z) + i \cdot (\mathrm{Im}f)'(z)
\end{aligned}
$$

□

Aus dem Satz ergeben sich alternative Beweise für die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen. Setze $f(x) := \exp(ix)$. Es gilt $\sin = \mathrm{Im}f$ und $\cos = \mathrm{Re}f$ und $f'(x) = i\exp(ix)$ (Kettenregel). Damit haben wir:

$$
\begin{aligned}
\sin'(x) &= (\mathrm{Im}f)'(x) = \mathrm{Im}(f'(x)) = \mathrm{Im}(i\exp(ix)) = \mathrm{Re}\exp(ix) = \cos(x) \\
\cos'(x) &= (\mathrm{Re}f)'(ix) = \mathrm{Re}(f'(ix)) = \mathrm{Re}(i\exp(ix)) = -\mathrm{Im}\exp(ix) = -\sin(x)
\end{aligned}
$$

8.4 Lokale Extrema

Definition 8.16 (Lokale Extrema)**.** *Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Die Funktion f hat in $x \in (a,b)$ ein* lokales Maximum *(bzw.* lokales Minimum*), wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass für alle y mit $|x-y| < \varepsilon$ gilt $f(y) \leq f(x)$ (bzw. $f(y) \geq f(x)$). Ist die Ungleichung echt, so spricht man von einem strengen Maximum (bzw. Minimum). Der Oberbegriff für Maxima und Minima lautet Extremum.*

Beispiel 8.17.

- *$f(x) = x^2$ hat bei $x = 0$ ein lokales Minimum.*
- *$f(x) = \sin(x)$ hat lokale Maxima bei $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ und lokale Minima bei $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.*
- *$f(x) = \exp(x)$ hat keine lokalen Extrema.*

Satz 8.18. *Hat f ein lokales Extremum in x und ist f differenzierbar in x, dann gilt $f'(x) = 0$.*

Beweis. Wir betrachten den Fall, dass f in x ein lokales Minimum hat. Sei ε wie in der Definition des lokalen Minimums. Nach den Annahmen dort gilt $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ für alle $h \in (0, \varepsilon)$. Daraus folgt

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(h)}{h} \geq 0 \ .$$

Analog gilt $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$ für alle $h \in (-\varepsilon, 0)$. Daraus folgt

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(h)}{h} \leq 0 \ .$$

Die beiden Grenzwerte müssen aber mit der Ableitung $f'(x)$ übereinstimmen, also muss $f'(x) = 0$ gelten. □

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht, z.B. ist $f'(0) = 0$ für $f(x) = x^3$.

Ein hinreichendes (aber nicht notwendiges!) Kriterium ist die zweite Ableitung:

Satz 8.19. *Gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, so hat f bei x ein strenges lokales Minimum. Ist $f''(x) < 0$, so hat f bei x ein strenges lokales Maximum.*

Den Beweis geben wir weiter unten an.

8.5 Mittelwertsatz

In diesem Abschnitt geben wir den nützlichen Mittelwertsatz der Differentialrechnung an. Für seinen Beweis benötigen wir folgende Eigenschaft stetiger Funktionen: Eine stetige Funktion ist auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stets nach oben beschränkt und nimmt ihr Maximum an (Eine analoge Aussage für das Minimum gilt ebenfalls.).

Satz 8.20. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es $c \in [a, b]$ sodass $f(c) \geq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.*

Beweisskizze. Man zeigt zuerst, dass f im Intervall $[a, b]$ nach oben beschränkt ist. Andernfalls gäbe es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten, sodass $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$. Die Folge (x_n) muss selbst keinen Grenzwert haben. Da sie im Intervall $[a, b]$ liegt, kann man sie durch Weglassen von Elementen zu einer konvergenten Teilfolge $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ machen (Satz von Bolzano-Weierstrass). Mit $x := \lim\limits_{n \to \infty} x_{k_n}$ haben wir dann $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_{k_n}) = f(x)$ wegen der Stetigkeit von f. Dann kann aber nicht $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$ gelten. Also muss f im Intervall $[a, b]$ nach oben beschränkt sein.

Mit einem ähnlichen Argument zeigt man, dass das Supremum der Funktionswerte von f im Intervall $[a, b]$ in einem Punkt c angenommen werden muss. □

Satz 8.21 (Rolle)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Sei f im Intervall (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.*

Beweis. Wenn f konstant ist, dann ist die Aussage klar. Sonst hat f nach dem vorangegangen Satz (und dem analogen Satz für Minima) ein lokales Maximum oder Minimum (oder beides). Ein solches Extremum wird in (mindestens) einem Punkt c auch angenommen. Mit Satz 8.18 folgt $f'(c) = 0$. □

Satz 8.22 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Intervall (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $x \in (a, b)$ mit*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad .$$

Das heißt, an einem Punkt in (a, b) entspricht die Steigung gerade der Steigung der Sekanten durch a und b.

Beweis. Definiere

$$g(x) := f(x) - f(a) - (x - a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad .$$

Es gilt $g(a) = g(b) = 0$. Nach dem Satz von Rolle gibt es $c \in (a, b)$ mit $g'(c) = 0$. Nach den Rechenregeln für Ableitungen folgt aber

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad ,$$

also folgt aus $g'(c) = 0$ die zu zeigende Aussage. □

Die folgenden Sätze sind Beispielanwendungen des Mittelwertsatzes.

Satz 8.23. *Ist I ein Intervall und $f\colon I \to W$ differenzierbar und gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist f konstant, d.h. es gilt $f(x) = c$ für ein $c \in W$ und alle $x \in I$.*

Beweis. Seien $a, b \in I$ mit $a \neq b$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es $x \in I$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x) = 0$, also $f(a) = f(b)$.
Es gilt daher, $f(x) = c$ für $c := f(a)$ für beliebig gewähltes $a \in I$. □

Satz 8.24. *Ist I ein Intervall und $f\colon I \to W$ differenzierbar und gilt $f'(x) = af(x)$ für alle $x \in I$, so existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = c \cdot \exp(ax)$.*

Beweis. Betrachte $g(x) := f(x)\exp(-ax)$. Es gilt $g'(x) = f'(x)\exp(-ax) - af(x)\exp(-ax) = 0$ nach Annahme an f. Also ist $g(x)$ konstant und die Behauptung folgt. □

8.6 Monotonie

Satz 8.25. *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Intervall (a, b) differenzierbar. Dann gilt:*

- *f ist in $[a, b]$ monoton wachsend wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.*
- *f ist in $[a, b]$ streng monoton steigend wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$.*
- *f ist in $[a, b]$ monoton fallend wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$.*
- *f ist in $[a, b]$ streng monoton fallend wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$.*

Beweis. Wir betrachten den ersten Punkt. Sei $a \leq x < y \leq b$. Wir müssen $f(x) \leq f(y)$ zeigen. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es c mit $x < c < y$ sodass $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Daraus folgt $f(y) = f(x) + f'(c) \cdot (y - x)$. Nach Annahme gilt $f'(c) \geq 0$ sowie $y > x$, also ist $f'(c) \cdot (y - x) \geq 0$. Es folgt $f(y) \geq f(x)$, wie gewünscht. □

Wir können jetzt den bereits oben formulierten Satz 8.19 über strenge lokale Extrema beweisen.

Beweis von Satz 8.19. Die Behauptung ist:

> Gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, so hat f bei x ein strenges lokales Minimum. Ist $f''(x) < 0$, so hat f bei x ein strenges lokales Maximum.

Wir betrachten den Fall für ein lokales Minimum. Wegen

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

folgt aus $f''(x) > 0$, dass es $\varepsilon > 0$ gibt sodass $\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} > 0$ für alle h mit $|h| < \varepsilon$. Mit $f'(x) = 0$ folgt daraus, dass $f'(x+h) > 0$ und $f'(x-h) < 0$ für alle $h \in (0, \varepsilon)$ gilt. Mit Satz 8.25 folgt daraus, dass f „links von x" streng monoton fallend ist und „rechts von x" streng monoton steigend. Dann liegt aber ein strenges lokales Minimum vor, was zu zeigen war. □

8.7 Regeln von l'Hospital

Aus dem Mittelwertsatz der Differentialgleichung können folgende nützliche Regeln zur Berechnung von Grenzwerten hergeleitet werden.

Satz 8.26 (Regeln von l'Hospital). *Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$, seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen und sei entweder $x_0 = a$ oder $x_0 = b$. Es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ und es existiere der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*
Unter diesen Annahmen gilt: Wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) \in \{0, \infty\}$ dann

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad .$$

Beweisskizze. Wir skizzieren nur den Fall mit $x_0 = b \in \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, in dem f' und g' auch noch stetig sind. Durch die Setzungen $f(x_0) := 0$ und $g(x_0) := 0$ können wir f und g als stetige Funktionen mit Definitionbereich $(a, b]$ auffassen.

Für alle $x \in (a, x_0)$ gibt es dann nach dem Mittelwertsatz jeweils $u \in (x, x_0)$ und $v \in (x, x_0)$ mit

$$f'(u) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \quad \text{und} \quad g'(v) = \frac{g(x_0) - g(x)}{x_0 - x} \quad .$$

Nach Annahme ist g' im ganzen Intervall (x, x_0) ungleich 0. Also können wir $f'(u)$ durch $g'(v)$ teilen und erhalten

$$\frac{f'(u)}{g'(v)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \quad ,$$

da sich $x_0 - x$ wegkürzt.

Wenn wir jetzt x gegen x_0 gehen lassen, dann gehen auch die entsprechenden u und v gegen x_0, da diese im Intervall (x, x_0) liegen. Damit erhält man dann

$$\frac{\lim_{u\to x_0} f'(u)}{\lim_{v\to x_0} g'(v)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x_0) - f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x_0) - g(x)} \quad .$$

Wir haben oben $f(x_0) = g(x_0) = 0$ gesetzt, also folgt mit den Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

□

Beispiel 8.27.

- *Grenzwert vom Typ* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x)}{1} = 1$$

- *Grenzwerte vom Typ* $0 \cdot \infty$ *können auf den Typ* $\frac{\infty}{\infty}$ *reduziert werden:*

$$\lim_{x \to 0} x \ln(x) = -\lim_{x \to 0} \frac{-\ln(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = -\lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{-1}{x}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = -\lim_{x \to 0} x = 0$$

- *Grenzwerte vom Typ* 0^0 *können auf den Typ* $\frac{\infty}{\infty}$ *reduziert werden:*

$$\lim_{x \to 0} x^x = \lim_{x \to 0} \exp(x \cdot \ln(x)) = \exp\left(-\lim_{x \to 0} \frac{-\ln(x)}{\frac{1}{x}}\right) = \exp(0) = 1$$

- *Manchmal ist es hilfreich, die l'Hospitalschen Regeln mehrfach nacheinander anzuwenden.*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\exp(x)}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\exp(x)}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\exp(x)}{2} = \infty$$

Achtung: Damit die Regel von L'Hospital anwendbar ist, *muss* eine der sogenannten unbestimmten Formen, also $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{-\infty}{-\infty}$ vorliegen. Zum Beispiel gilt

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1 + x} \neq \lim_{x \to 0} \frac{1}{1} = 1 \quad .$$

9 Integration

Definition 9.1. *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$*. Sei* $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ *eine Funktion, die bis auf endlich viele Ausnahmen in allen Punkten von* $[a, b]$ *stetig ist. Das* Riemann-Integral *ist dann als folgender Grenzwert definiert:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \cdot \tfrac{b-a}{n}) \cdot \frac{b-a}{n}$$

Man kann zeigen, dass der Grenzwert unter den Annahmen der Definition stets existiert.

Beispiel 9.2.

- $\displaystyle\int_0^b x\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(k \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k = \lim_{n \to \infty} \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{b^2}{2}$
- $\displaystyle\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(k \cdot \frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \lim_{n \to \infty} \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n+1) = \frac{b^3}{3}$

Die Definition erfasst nur einen Spezialfall. Normalerweise definiert man das Riemann-Integral zunächst für beliebige Funktionen als Grenzwert von Summen wie oben, wobei allerdings die Wahl der Stützstellen nicht unbedingt äquidistant zu erfolgen hat. Existiert der Grenzwert unabhängig von der Wahl der Stützstellen, sofern nur deren Abstand gegen Null geht, so bezeichnet man die Funktion als „Riemann-integrierbar".

Die beliebige Wahl der Stützstellen ist zum Beispiel für die Dirichlet-Funktion

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wichtig. Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar, da man die Stützstellen auch stets irrational wählen könnte. Die obige Definition verwendet nur rationale Stützstellen und funktioniert daher nur unter den obigen Stetigkeitsannahmen.

Es gibt auch noch allgemeinere Integralbegriffe (heutiger Standard ist das Lebesgue-Integral), mit dem auch noch anderen Funktionen ein Integral zugewiesen werden kann, insbesondere solchen, die auf einem offenen Intervall, wie $[0, \infty)$ definiert sind, oder solchen, die nirgendwo stetig sind, wie etwa die Dirichlet Funktion

Für unsere Zwecke (und die allermeisten in der Praxis vorkommenden Fälle) genügt die Definition des Integrals für stückweise stetige Funktionen.

Satz 9.3. *Für $c \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c \cdot (b - a)$$

Satz 9.4. *Für $a \leq b \leq c$ gilt:*

$$\int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x + \int_b^c f(x) \, \mathrm{d}x$$

(sofern die vorkommenden Ausdrücke überhaupt definiert sind)

Intuitiv ist das klar, für einen rigorosen Beweis muss man etwas vorsichtig sein, weil die Zusammensetzung von zwei äquidistanten Einteilungen im allgemeinen nicht wieder eine äquidistante Einteilung liefert.

Satz 9.5 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert $x_0 \in [a, b]$ derart dass*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = f(x_0)(b - a) \quad .$$

Beweis. Da f stetig ist, hat f auf $[a, b]$ sowohl ein Maximum als auch ein Minimum, siehe Satz 8.20. Sei $m = f(x_1)$ das Minimum und $M = f(x_2)$ das Maximum. Nach Definition des Integrals gilt

$$m \cdot (b - a) = \int_a^b m \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b M \, \mathrm{d}x = M \cdot (b - a)$$

Die Funktion f nimmt nach dem Zwischenwertsatz (Satz 6.18) zwischen x_1 und x_2 jeden Wert zwischen m und M mindestens einmal an. Also gibt es ein x_0 mit der gewünschten Eigenschaft. □

Veranschaulichung: $f(x_0) \cdot (b-a)$ ist ein Rechteck der Breite $b-a$ und Höhe $f(x_0)$. Man wählt zunächst die Höhe so, dass diese Fläche gerade dem Integral entspricht. Dann erhält man mit dem Zwischenwertsatz einen passenden Wert x_0.

Satz 9.6. *Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Dann ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$.

Beweisskizze. Es gilt

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = h \cdot f(\xi)$$

für ein $\xi \in [x, x+h]$ nach dem Mittelwertsatz. Es folgt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi)$$

Wenn man h gegen 0 gehen lässt, geht der linke Ausdruck gegen $F'(x)$. Rechts muss dann ξ gegen x gehen, da $\xi \in [x, x+h]$. Man erhält $F'(x) = f(x)$. □

Definition 9.7. *Eine differenzierbare Funktion F mit $F' = f$ heißt* Stammfunktion *von f.*

Satz 9.8. *Sind F und G Stammfunktionen für f, dann gilt $F(x) = G(x) + C$ für eine Konstante C.*

Beweis. Betrachte $H(x) := F(x) - G(x)$. Es gilt $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Nach Satz 8.23 ist H konstant, also gilt $H(x) = C$ für eine Konstante C. Daraus folgt $C = F(X) - G(x)$ und daraus die Behauptung. □

Aus obigem Satz folgt unmittelbar der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung:

Satz 9.9 (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Ist f stetig und ist F Stammfunktion von f, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \ .$$

Beweis. Nach Satz 9.6 ist $G(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion für f. Also muss $G(x) = F(x) + C$ für eine Konstante C gelten.
Es gilt $G(a) = 0$ und $G(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ und damit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) \ .$$

□

Man verwendet die Notation

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \ .$$

Der Fundamentalsatz erlaubt die sehr komfortable Auswertung von Integralen:

Beispiel 9.10. *Aus* $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$ *ergibt sich, dass* $\frac{1}{k+1}x^{k+1}$ *Stammfunktion zu* x^k *ist. Also folgt*

$$\int_a^b x^k \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1}\Big|_a^b$$

Man schreibt für eine Stammfunktion von f abkürzend

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

und bezeichnet das als *unbestimmtes Integral*, im Gegensatz zu den vorher eingeführten *bestimmten Integralen* mit expliziten Integrationsgrenzen. Zum Beispiel ist:

$$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2$$

Die Notation ist aber mit etwas Vorsicht zu verwenden, denn $\frac{1}{2}x^2 + 1$ ist ja auch eine Stammfunktion. Man sieht daher auch die Notation

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \quad ,$$

wobei C eine beliebige Konstante repräsentieren soll.

9.1 Integrationsregeln

Integration ist linear, d.h. es gilt:

- $\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad$ für $c \in \mathbb{R}$
- $\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$

Für die Berechnung von Integralen gibt es keine so leicht automatisch anwendbaren Regeln wie bei der Differentiation.

- Für einige einfache Funktionen kann man die Stammfunktion direkt angeben. Beispiele:

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$

- Man kann die Differentiationsregeln „rückwärts“ anwenden. Das ist aber oft nicht einfach, da die zu integrierende Funktion dafür eine ganz bestimmte Form haben muss. Im Folgenden sind zwei Beispiele für diesen Ansatz angegeben: partielle Integration und die Substitutionsregel.
- Man kann versuchen, die zu integrierende Funktion umzuformen, so dass einer der beiden vorangegangenen Fälle anwendbar wird.
- Für bestimmte Funktionsklassen (z.B. Potzenreihen) kann man sich allgemeine Verfahren zur Integration überlegen.

9.1.1 Partielle Integration

Aus der Produktregel des Differenzierens erhält man folgende Rechenregel für die Integration, die sogenannte *partielle Integration*:

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

oder in nützlicher Form:

$$\begin{aligned}\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\\ \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x &= u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Man kann diese Regel verwenden, wenn der Integrand ein Produkt ist, sodass für einen der Faktoren eine Stammfunktion bekannt ist. Leider wird durch die partielle Integration das Integral nicht komplett gelöst, sondern nur auf ein anderes zurückgeführt, welches leichter, aber auch schwieriger sein kann.

Beispiel 9.11.

- *Es gilt* $\int \cos(x)x\,\mathrm{d}x = \sin(x)x - \int \sin(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)x + \cos(x)$.
  Im ersten Schritt wird mit $u' = \cos(x)$*,* $u = \sin(x)$*,* $v = x$*, und* $v' = 1$ *partiell integriert.*
- $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int \frac{x}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x$
  Im zweiten Schritt wird mit $u' = 1$*,* $u = x$*,* $v = \ln(x)$*,* $v' = 1/x$ *partiell integriert.*
- *Es gilt* $\int \cos(y)^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(y + \sin(y)\cos(y))$.
  Durch partielle Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int \cos(y)^2\,\mathrm{d}y &= \sin(y)\cos(y) + \int \sin(y)^2\,\mathrm{d}y\\ &= \sin(y)\cos(y) + \int 1 - \cos(y)^2\,\mathrm{d}y\\ &= \sin(y)\cos(y) + y - \int \cos(y)^2\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

  Umstellen liefert das behauptete Ergebnis.

9.1.2 Substitutionsregel

Die Kettenregel lautet bekanntlich: Ist $f(x) = h(g(x))$, so ist $f'(x) = h'(g(x))g'(x)$.
Dementsprechend ist $h(g(x))$ eine Stammfunktion zu $h'(g(x))g'(x)$:

$$\int h'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = h(g(x))$$

Die Schwierigkeit liegt darin, dass der *Integrand* dieses ganz bestimmte Format $h'(g(x))g'(x)$ für geeignete Funktionen g und h haben muss, damit die Gleichung anwendbar ist.

Beispiel 9.12.

- $\int \exp(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\int \exp(\lambda x)\lambda\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\exp(\lambda x)$
- $\int \exp(x^2)x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \exp(x^2)2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\exp(x^2)$

Man kann obiges Integral auch als *Substitutionsregel* formulieren:

Gesucht ist

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad .$$

Man berechnet dazu

$$H(y) := \int f(g(y))\cdot g'(y)\,\mathrm{d}y$$

Es wird also $g(y)$ für x substituiert. Wenn g eine Umkehrfunktion hat, dann erhält man:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = H(g^{-1}(x))$$

(Das folgt aus dem oben Gesagten. Wenn wir $F(x) := \int f(x)\,\mathrm{d}x$ setzen, dann gilt $F' = f$ und die obige Gleichung liefert $H(y) = F(g(y))$. Einsetzen von $g^{-1}(x)$ für y liefert $F(x) = H(g^{-1}(x))$.)

Beispiel 9.13. *Um $\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x$ zu berechnen, kann man mit $g(x) = \frac{x}{2}$ substitutieren. Man berechnet dafür*

$$\int \sin(y)\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{-\cos(y)}{2}$$

Die Umkehrfunktion von g ist $g^{-1}(x) = 2x$, also erhalten wir

$$\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{-\cos(2x)}{2} \quad ,$$

was man leicht durch Differenzieren nachprüft.

Für bestimmte Integrale gilt:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Begründung: Sei F Stammfunktion von f. Die linke Seite der Gleichung ist also $F(g(b)) - F(g(a))$. Die Stammfunktion auf der rechten Seite ist $F(g(x))$, also ist das bestimmte Integral auch $F(g(b)) - F(g(a))$.

Beispiel 9.14.

$$\int_0^2 \exp(x^2)x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^4 \exp(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\exp(u)\Big|_0^4 = \frac{\exp(4)}{2} - \frac{1}{2}$$

9.2 Anwendung: Integrale und Konvergenz von Reihen

Satz 9.15. *Sei* $f\colon \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ *eine monoton fallende stetige Funktion und* $a, b \in \mathbb{N}$ *mit* $a < b$*. Dann gilt*

$$\sum_{n=a+1}^{b} f(n) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad .$$

Beweisidee. Definiere eine Treppenfunktion ϕ durch $\phi(x) := f(\lceil x \rceil)$, wobei $\lceil x \rceil$ die kleinste natürliche Zahl mit $x \leq \lceil x \rceil$ bezeichnet („aufrunden“).

Da f monoton fallend ist, gilt sicher $\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Nach Definition des Integrals gilt aber auch $\sum_{n=a+1}^{b} f(n) = \int_a^b \phi(x)$. (Beides sieht man am besten anhand der graphischen Darstellung der Summation in der Definition des Integrals.) Aus beiden Aussagen zusammen folgt die Behauptung. □

Notation:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz 9.16. *Sei* $f\colon \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ *eine monoton fallende stetige Funktion. Wenn* $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *existiert und eine Zahl in* $\mathbb{R}$ *ist, dann konvergiert auch die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$*.*

Beweis. Nach dem vorangegangenen Satz gilt

$$\sum_{n=2}^{b} f(n) \leq \int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad .$$

Wir haben in Satz 4.11 gezeigt, dass jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge auch konvergiert. Die Folge der Partialsummen $a_k := \sum_{n=2}^{k} f(n)$ muss monoton wachsend sein, da der Wertebereich von f die nichtnegativen reellen Zahlen sind.

Die Folge $b_k := \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x$ ist aus dem gleichen Grund monoton wachsend. Beachte: Wir haben $\int_1^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x + \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ und der zweite Summand muss ≥ 0 sein, da nur f nur nichtnegative Werte hat.

Damit gilt

$$a_k = \sum_{n=2}^{k} f(n) \leq \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \quad .$$

für alle k. Nach Annahme existiert der Grenzwert auf der rechten Seite und ist in $\mathbb{R}$. Wir haben also gezeigt, dass die Folge (a_k) der Partialsummen monoton wachsend und beschränkt ist. Sie hat deshalb einen Grenzwert, woraus die Konvergenz von $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$, und damit auch die von $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ folgt . □

Beispiel 9.17. *Die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ *konvergiert.*

Wir bemerken zunächst, dass $-2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ *eine Stammfunktion von* $x^{-\frac{3}{2}}$ *ist. Es gilt*

$$\int_1^b \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int_1^b x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = -2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^b = -2 \cdot b^{-\frac{1}{2}} - (-2 \cdot 1^{-\frac{1}{2}}) = 2 - \frac{2}{\sqrt{b}}$$

sowie $\lim_{b\to\infty} 2 - \frac{2}{\sqrt{b}} = 2$.

Damit ist gezeigt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ *konvergiert. Aus dem Beweis des Satzes kann man auch* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \leq 2$ *ablesen, also erhält man* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \leq 3$.

10 Potenzreihen und Taylorapproximation

10.1 Potenzreihen

Definition 10.1 (Potenzreihe)**.** *Eine Reihe der Form*

$$P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißt Potenzreihe *mit Entwicklungspunkt* z_0 *und Koeffizienten* $(a_n)_{n\geq 0}$.
Eine Potenzreihe konvergiert im Punkt Z, *falls* $P(Z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z - z_0)^n$ *existiert*

Beispiel 10.2.

- *Beispiele mit Entwicklungspunkt* 0.

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \qquad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

  Im Fall von $\cos$ *ist die Folge der Koeffizienten* (a_n) *gleich* $(1, 0, -\frac{1}{2!}, 0, \frac{1}{4!}, \ldots)$.
- *Ein Beispiel mit Entwicklungspunkt* $\frac{1}{2}$ *ist:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(z - \frac{1}{2}\right)^n$$

  Das ist eine geometrische Reihe. Sie konvergiert wenn $\left|z - \frac{1}{2}\right| < 1$ *(Satz 5.1) und hat dann den Wert* $\frac{1}{1-(z-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3-2z}$.

Satz 10.3. *Wenn die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *im Punkt* z_1 *konvergiert, dann konvergiert sie auch* absolut *für alle* z *mit* $|z| < |z_1|$.

Beweis. Sei z mit $|z| < |z_1|$ gegeben. Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ nach Annahme konvergiert, muss $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n z_1^n| = 0$ gelten. Nach Satz 4.10 ist die Folge $(a_n z_1^n)$ nach oben beschränkt, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|a_n z_1^n| \leq c$.

Dann folgt:

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_1^n \cdot \frac{z^n}{z_1^n} \right| = |a_n z_1^n| \cdot \left| \frac{z^n}{z_1^n} \right| = |a_n z_1^n| \cdot \left| \frac{z}{z_1} \right|^n \leq c \cdot \left| \frac{z}{z_1} \right|^n$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot \left|\frac{z}{z_1}\right|^n = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$ konvergiert, da es sich um eine geometrische Reihe handelt und $\left|\frac{z}{z_1}\right| < 1$ aus der Annahme $|z| < |z_1|$ folgt. Mit dem Majorantenkriterum folgt aus der Abschätzung die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. $\square$

Folgerung: Wenn die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ im Punkt z_1 konvergiert, dann konvergiert sie *absolut* für alle z mit $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$. In der komplexen Zahlenebenen entspricht das dem Kreis um z_0 mit Radius $r := |z_1 - z_0|$.

Definition 10.4 (Konvergenzradius einer Potenzreihe)**.** *Der* Konvergenzradius *der Potenzreihe* $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *ist definiert als*

$$r(P) := \sup\{r \in \mathbb{R} \mid P(z) \text{ konvergiert für alle } z \text{ mit } |z-z_0| < r\}.$$

Wenn $P(z)$ für alle z konvergiert, setzen wir $r(P) := \infty$.

Die Menge der Punkte im Radius $r(P)$ um z_0, d.h. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < r(P)\}$, nennen wir auch *Konvergenzkreis* der Reihe.

Satz 10.5. *Sei $P(z)$ eine Potenzreihe mit Entwicklungsstelle z_0. Dann konvergiert die Reihe $P(z)$ absolut für alle z mit $|z-z_0| < r(P)$. Für alle z mit $|z-z_0| > r(P)$ divergiert die Reihe.*

Beweisskizze. Die Konvergenz innerhalb des Konvergenzkreises haben wir bereits gezeigt. Für z mit $|z-z_0| > r(P)$ kann die Reihe nicht konvergieren, denn nach Satz 10.3 würde sie sonst auch im Kreis mit Radius $|z-z_0|$ konvergieren. Nach Definition wäre dann aber der Konvergenzradius größer-gleich $|z-z_0|$, im Widerspruch zur Annahme. □

Beispiel 10.6. *Die obigen Reihen für* $\exp$, $\sin$, $\cos$ *haben den Konvergenzradius ∞. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\left(z-\frac{1}{2}\right)^n$ hat den Konvergenzradius 1 (siehe Satz 5.1).*

Eine Potenzreihe $P(z)$ kann als Funktion von z verstanden werden, deren Definitionsbereich ihr Konvergenzkreis ist. Für $z \in \mathbb{C}$ ist das ein Kreis in der komplexen Ebene. Für $z \in \mathbb{R}$ ist das ein Intervall um den Entwicklungspunkt. Die Potenzreihendarstellung einer Funktion für einen Entwicklungspunkt ist sogar eindeutig.

Satz 10.7 (Identitätssatz)**.** *Seien $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ zwei Potenzreihen mit der gleichen Entwicklungsstelle z_0 und positivem Konvergenzradius, d.h. $r(P) > 0$ und $r(Q) > 0$. Wenn $P(z) = Q(z)$ für alle z mit $|z-z_0| < \min(r(P), r(Q))$ gilt, dann gilt auch $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius sind im Konvergenzkreis beliebig oft ableitbar. Die Ableitung erhält man einfach durch Ableitung der Summenglieder:

Satz 10.8 (Ableitung von Potenzreihen)**.** *Eine Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit Konvergenzradius $r(P) > 0$. ist für alle z mit $|z-z_0| < r(P)$ differenzierbar und es gilt*

$$P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-z_0)^n \ .$$

Beachte, dass die Ableitung wieder eine Potenzreihe ist. Das heißt insbesondere, dass Funktionen, die sich durch Potenzreihen darstellen lassen beliebig oft ableitbar sind.

Beispiel 10.9.

- $\exp(z)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$
- $\sin(z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(2n)!} z^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} z^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2(n+1)-1)!} z^{2(n+1)-1}$
  $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \cos(z)$

Satz 10.10. *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Dann gilt $f^{(n)}(a) = n! \cdot a_n$, wobei $f^{(n)}$ die n-te Ableitung von f bezeichnet.*

10.2 Taylorreihen

Wir haben gesehen, dass Potenzreihen beliebig oft differenzierbare Funktionen definieren und dass die Darstellung von Funktionen als Potenzreihen eindeutig ist. Hier zeigen wir, wie man zu einer gegebenen Funktion ihre Potenzreihendarstellung berechnet.

Wir beschränken uns im Folgenden auf reelle Funktionen.

Den folgenden Satz kann man als Verallgemeinerung von Satz 8.3 verstehen. Dort wurde die Funktion linear durch ihre Tangente approximiert. Die Tangente im Punkt a ist $f(a)+f'(a)(x-a)$ und hat in a den gleichen Funktionswert und den gleichen Anstieg wie $f(x)$. Man kann die Approximation verbessern, wenn man noch die Änderung des Anstiegs, d.h. die zweite Ableitung, in Betracht zieht. Die Funktion $f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)$ hat in a den gleichen Funktionswert und die gleichen ersten und zweiten Ableitungen wie $f(x)$. Durch Betrachtung der weiteren Ableitungen kann man die Approximation weiter verbessern.

Satz 10.11. *Sei I ein Intervall mit $a \in I$ und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine $n+1$-mal differenzierbare Funktion. Definiere das Restglied $R_n(x)$ für $x \in I$ durch die Gleichung*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \quad .$$

Dann gilt $\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Beweis. Durch n-malige Anwendung der Regel von L'Hospital. □

Man kann das Restglied $R_n(x)$ des Satzes auch konkret abschätzen:

Satz 10.12 (Lagrangesche Form des Restglieds)**.** *Für das Restglied $R_n(x)$ aus dem vorangegangenen Satz gilt folgende Gleichung für eine Zahl ξ zwischen a und x.*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Definition 10.13. *Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit $a \in I$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion, so heißt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

die Taylorreihe *von f im Punkt a.*

Wenn die Taylorreihe von f konvergiert, so muss sie nicht unbedingt gegen $f(x)$ konvergieren, aber wenn f in einem Intervall I mit $a \in I$ überhaupt als Potenzreihe darstellbar ist, dann stimmt diese Reihe mit der Taylorreihe überein[5].

Satz 10.14. *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit $a \in I$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion und $x \in I$. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ für das Restglied $R_n(x)$ aus Satz 10.11 gilt, dann ist*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad .$$

Diesen Satz können wir verwenden, um Potenzreihen für beliebig oft differenzierbare Funktionen zu berechnen.

Beispiel 10.15.

- *Taylorreihe für $f(x) = \sin(x)$ mit Entwicklungspunkt $a = 0$: Wegen $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$ haben wir*

$$\begin{aligned}
\sin^{(0)}(0) &= \sin(0) = 0\\
\sin^{(1)}(0) &= \cos(0) = 1\\
\sin^{(2)}(0) &= -\sin(0) = 0\\
\sin^{(3)}(0) &= -\cos(0) = -1\\
\sin^{(4)}(0) &= \sin(0) = 0\\
&\dots
\end{aligned}$$

  Die Tayorreihe von $\sin(x)$ im Punkt 0 ist also

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

  Um zu zeigen, dass diese Taylorreihe gleich $\sin(x)$ ist, schätzen wir das Restglied nach Lagrange ab. Es gilt $|R_n(x)| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, da $|\sin^{(n)}(\xi)| \leq 1$ gilt. Man beweist direkt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ gilt. Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ und $\sin(x)$ hat den gleichen Wert wie die Taylorreihe.
  Man sieht, dass diese Reihendarstellung von $\sin$ mit der in Satz 7.4 bereits bewiesenen Reihendarstellung $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ übereinstimmt.
  Mit der Reihe und der Abschätzung des Restglieds können wir $\sin$ auch mit beliebig gewünschter Genauigkeit numerisch berechnen. Beispiel: Wir berechnen $\sin(x)$ für $x = 1$ auf zwei Nachkommastellen. Für $n = 5$ ist das Restglied $\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} < 0.0014$. Die ersten fünf Glieder der Taylorreihe mit $x = 1$ sind die Summe:

$$\frac{1}{1!} + \frac{0}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{0}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{101}{120} \approx 0.8416$$

  Wegen der Restgliedabschätzung unterscheidet sich dieser Wert von $\sin(1)$ höchstens um 0.0014, also sind die ersten beiden Kommastellen korrekt, d.h. $\sin(1) = 0.84\dots$.

[5] Wegen Satz 10.10 müssten die Koeffizienten a_n dieser Reihe dann nämlich $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ sein.

- *Wir können auch für unbekannte Funktionen eine explizite Reihendarstellung berechnen. Zum Beispiel kennen wir von* $\ln(x)$ *bisher nur die Ableitung* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$*. Wir haben*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}\ , \qquad \ln''(x) = \frac{-1}{x^2}\ , \qquad \ln'''(x) = \frac{2}{x^3}\ , \qquad \ln^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4}\ .$$

Allgemein für $n > 0$*:*

$$\ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{x^n}$$

Für $n = 0$ *kennen wir* $\ln^{(0)}(x) = \ln(x)$ *nicht genau, wissen aber* $\ln(1) = 0$*. Das genügt, um die Taylorreihe von* $\ln(x)$ *im Punkt* $a = 1$ *aufzustellen.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

Es bleibt noch das Restglied abzuschätzen. Wir wissen $R_n(x) = \frac{\ln^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{\xi^{n+1}\cdot(n+1)}(x-1)^{n+1}$ *für ein* ξ *zwischen* x *und* 1*. Für* $x \in (0.5, 2)$ *gilt dann* $|\xi| > |x-1|$.[6] *Für* $x \in (0.5, 2)$ *haben wir also*

$$|R_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{\xi^{n+1}\cdot(n+1)}(x-1)^{n+1}\right| = \frac{1}{(n+1)} \cdot \left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)}\ .$$

Das zeigt, dass die obige Taylorreihe für $x \in (0.5, 2)$ *mit* $\ln(x)$ *übereinstimmt.*

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \qquad \text{für } x \in (0.5, 2).$$

Hinweis: Man kann zeigen, dass die Reihe sogar für $x \in (0, 2)$ *mit* $\ln(x)$ *übereinstimmt.*

10.3 Eine Anwendung der Integralrechnung

Als Anwendungsbeispiel der Integralrechnung können wir eine Restgliedabschätzung der Taylorreihendarstellung beweisen.

Satz 10.16. *Sei* I *ein Intervall mit* $a \in I$ *und sei* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *eine* $n+1$*-mal differenzierbare Funktion. Definiere das Restglied* $R_n(x)$ *für* $x \in I$ *durch die Gleichung*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)\ .$$

Dann gilt $R_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.

Beweis. Der Beweis des Satzes erfolgt durch Induktion über n. Wenn $n = 0$, so lautet die Aussage des Satzes:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

[6] Für $x \in (0.5, 1)$ muss $\xi \in [x, 1]$ gelten. Dann gilt $|\xi| = \xi > 1 - x = |x-1|$. Für $x \in (1, 2)$ muss $\xi \in [1, x]$ gelten. Es ist aber $|x-1| = x - 1 < 1$, also $|\xi| = \xi > |x-1|$.

Das ist aber gerade der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.

Für den Induktionsschritt rechnen wir das Restglied wie folgt um:

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(t)\Big|_{t=a}^{x} - \int_a^x \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{partielle Integration} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} + R_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Induktionsschritt unmittelbar. □

Satz 10.17 (Cauchysche Form des Restglieds). *Für das Restglied $R_n(x)$ aus dem vorangegangenen Satz gilt folgende Gleichung für eine Zahl ξ zwischen a und x.*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a)$$

Beweis. Das folgt aus $R_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ sofort mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung. □

Wir hatten die Lagrangesche Form des Restglieds angegeben. Diese lässt sich ebenfalls leicht aus der Integraldarstellung von $R_n(x)$ ableiten. Man braucht dazu eine etwas allgemeinere Form des Mittelwertsatzes (siehe Buch).

Literatur

Forster, Otto: *Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. 12. Aufl. Wiesbaden : Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016 (Grundkurs Mathematik). – IX, 332 S. 57 Abb. – ISBN 978–3658115449

Grieser, Daniel: *Analysis I: Eine Einführung in die Mathematik des Kontinuums*. Wiesbaden : Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015. – ISBN 978–3–658–05947–7