LMU

LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

**Grundlagen der Analysis**
Wintersemester 2019/20

# Potenzreihen und Taylorapproximation

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 5. Februar 2020

# Potenzreihen

**Definition (Potenzreihe)**

Eine Reihe der Form

$$P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißt **Potenzreihe** mit Entwicklungspunkt $z_0$ und Koeffizienten $(a_n)_{n\geq 0}$.

Eine Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergiert im Punkt $Z$,

falls $P(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z - z_0)^n$ existiert

# Beispiele mit Entwicklungspunkt $0$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ mit } a_n = \frac{1}{n!} \text{ und } z_0 = 0$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ und $a_{2n+1} = 0$ für $n = 0, 1, \ldots$

D.h. die Folge der Koeffizienten $(a_n)$ ist $1, 0, -\frac{1}{2!}, 0, \frac{1}{4!}, 0, \ldots$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit $a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, für $n = 0, 1, \ldots$

D.h. die Folge der Koeffizienten $(a_n)$ ist $0, 1, -\frac{1}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, 0 \ldots$

# Beispiel mit Entwicklungspunkt $\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(z - \frac{1}{2}\right)^n \quad = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ mit } a_n = 1 \text{ und } z_0 = \frac{1}{2}$$

- Das ist eine geometrische Reihe.
- Sie konvergiert wenn $\left|z - \frac{1}{2}\right| < 1$ (Satz 5.1)

  und hat dann den Wert $\dfrac{1}{1 - \left(z - \frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{\frac{3}{2} - z} = \dfrac{2}{3 - 2z}$.

# Absolute Konvergenz

**Satz 10.3**

Wenn die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ im Punkt $z_1$ konvergiert, dann konvergiert sie auch absolut für alle $z$ mit $|z| < |z_1|$.

*Beweis.*

- Sei $z$ mit $|z| < |z_1|$ gegeben.
- Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ konvergiert, muss $\lim_{n\to\infty} |a_n z_1^n| = 0$ gelten.
- Nach Satz 4.10 ist die Folge $(a_n z_1^n)$ nach oben beschränkt, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|a_n z_1^n| \leq c$.
- ...

Zur Erinnerung:

**Satz 4.10**

Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt.

# Absolute Konvergenz (2)

- ...
- Dann folgt: $|a_n z^n| = \left|a_n z_1^n \cdot \frac{z^n}{z_1^n}\right| = |a_n z_1^n| \cdot \left|\frac{z^n}{z_1^n}\right| = |a_n z_1^n| \cdot \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leq c \cdot \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$
- Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot \left|\frac{z}{z_1}\right|^n = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$ konvergiert, da es eine geometrische Reihe ist und $\left|\frac{z}{z_1}\right| < 1$ aus Annahme $|z| < |z_1|$ folgt.
- Mit dem Majorantenkriterum folgt aus $|a_n z^n| \leq c \cdot \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$ die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. □

Zur Erinnerung:

**Satz 5.10 (Majorantenkriterium)**

Sei $\sum_{k=n}^{\infty} c_k$ eine konvergente Reihe. Dann konvergiert $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ absolut, wenn $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \geq n$ gilt.

# Folgerung

**Folgerung**

Wenn die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ im Punkt $z_1$ konvergiert, dann konvergiert sie absolut für alle $z$ mit $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

- In der komplexen Zahlenebenen entspricht das dem Kreis um $z_0$ mit Radius $r := |z_1 - z_0|$.

# Konvergenzradius und Konvergenzkreis

**Definition (Konvergenzradius einer Potenzreihe)**

Der **Konvergenzradius** der Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ist definiert als

$r(P) := \sup\{r \in \mathbb{R} \mid P(z)$ konvergiert für alle $z$ mit $|z - z_0| < r\}$.

Wenn $P(z)$ für alle $z$ konvergiert, setzen wir $r(P) := \infty$.

Die Menge der Punkte im Radius $r(P)$ um $z_0$, d.h.

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r(P)\},$$

nennen wir auch **Konvergenzkreis** der Reihe.

# Konvergenz und Divergenz bez. des Konvergenzkreises

**Satz 10.5**

Sei $P(z)$ eine Potenzreihe mit Entwicklungsstelle $z_0$. Dann konvergiert die Reihe $P(z)$ absolut für alle $z$ mit $|z - z_0| < r(P)$. Für alle $z$ mit $|z - z_0| > r(P)$ divergiert die Reihe.

*Beweisskizze.*

- Die Konvergenz innerhalb des Konvergenzkreises haben wir bereits gezeigt.
- Für $z$ mit $|z - z_0| > r(P)$ kann die Reihe nicht konvergieren, denn nach Satz 10.3 würde sie sonst auch im Kreis mit Radius $|z - z_0|$ konvergieren.
- Nach Definition wäre dann aber der Konvergenzradius größer-gleich $|z - z_0|$, im Widerspruch zur Annahme. □

# Beispiele

Die Reihen für $\exp$, $\sin$, $\cos$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

haben den Konvergenzradius $\infty$.

# Beispiele (2)

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\left(z-\frac{1}{2}\right)^n$ hat den Konvergenzradius $1$:

Zur Erinnerung:

**Satz 5.1 (Unendliche geometrische Reihe)**

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

# Identitätssatz

- Eine Potenzreihe $P(z)$ kann als Funktion von $z$ verstanden werden, deren Definitionsbereich ihr Konvergenzkreis ist.
- Für $z \in \mathbb{C}$ ist das ein Kreis in der komplexen Ebene.
- Für $z \in \mathbb{R}$ ist das ein Intervall um den Entwicklungspunkt.
- Die Potenzreihendarstellung einer Funktion für einen Entwicklungspunkt ist sogar eindeutig:

**Satz 10.7(Identitätssatz)**

Seien $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ zwei Potenzreihen mit der gleichen Entwicklungsstelle $z_0$ und positivem Konvergenzradius, d.h. $r(P) > 0$ und $r(Q) > 0$.
Wenn $P(z) = Q(z)$ für alle $z$ mit $|z - z_0| < \min(r(P), r(Q))$ gilt, dann gilt auch $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

# Ableitung von Potenzreihen

**Satz 10.8 (Ableitung von Potenzreihen)**

Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r(P) > 0$. Dann ist $P$ für alle $z$ mit $|z - z_0| < r(P)$ differenzierbar und

$$P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - z_0)^n \quad .$$

- **Potenzreihen** mit positivem Konvergenzradius sind **im Konvergenzkreis ableitbar**.
- Die Ableitung erhält man einfach durch **Ableitung der Summenglieder**
- Da die **Ableitung wieder eine Potenzreihe** ist, sind Funktionen, die sich durch Potenzreihen darstellen lassen, **beliebig oft ableitbar**.

# Beispiele

- Ableitung von $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$:

$$\exp(z)'$$

# Beispiele

- Ableitung von $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$:

$$\exp(z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1}$$

# Beispiele

- Ableitung von $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$:

$$\exp(z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

# Beispiele

- Ableitung von $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$:

$$\exp(z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

# Beispiele

- Ableitung von $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$:

$$\exp(z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

# Beispiele

- Ableitung von $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$:

$$\exp(z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

- Ableitung von $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$:

$$\sin'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n+1)!} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot}{(2n)!} z^{2n} = \cos(z)$$

**Satz 10.10**

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Dann gilt $f^{(n)}(a) = n! \cdot a_n$, wobei $f^{(n)}$ die $n$-te Ableitung von $f$ bezeichnet.

Beweis: Einfache Übung

# Berechnung der Potzenreihendarstellung

- Potenzreihen definieren beliebig oft differenzierbare Funktionen
- Darstellung von Funktionen als Potenzreihen ist eindeutig
- Nun: Wie berechnet man die Potenzreihendarstellung zu einer gegebenen Funktion?
- Wir beschränken uns auf reelle Funktionen.

# Erinnerung / Rückblick

**Satz 8.3**

Sei $f$ eine im Punkt $a \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion. Definiere die Funktion $r$ durch $f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + r(x)$. Dann gilt $\lim_{h \to 0} \frac{r(a+h)}{h} = 0$.

- Dieser Satz approximiert $f$ im Punkt $a$ linear durch ihre Tangente
- Die Tangente im Punkt $a$ ist $f(a) + f'(a)(x-a)$ und hat in $a$ den gleichen Funktionswert und den gleichen Anstieg wie $f(x)$.
- Approximation verbessern: Ziehe noch die zweite Ableitung in Betracht: Die Funktion $f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)$ hat in $a$ den gleichen Funktionswert und die gleichen ersten und zweiten Ableitungen wie $f(x)$. Durch Betrachtung der weiteren Ableitungen kann man die Approximation weiter verbessern.
- Den nun folgenden Satz kann man als Verallgemeinerung von Satz 8.3 verstehen.

# Taylorapproximation

**Satz 10.11**

Sei $I$ ein Intervall mit $a \in I$ und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine $n+1$-mal differenzierbare Funktion. Definiere das Restglied $R_n(x)$ für $x \in I$ durch die Gleichung

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

Dann gilt $\lim\limits_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$.

*Beweis.* Durch $n-1$-malige Anwendung der Regel von L'Hospital:

- Sei das Taylorpolynom $n$-ter Ordnung $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$
- Beachte, dass $R_n^{(k)}(a) = T_n^{(k)}(a)$ für k $= 0, \ldots, n$
- Beachte auch, dass für $g(x) = (x-a)^n$, die 1. bis $n$.-Ableitung für $x \neq a$ nicht 0 wird.

# Taylorapproximation (2)

- ...
- Wir wenden die Regel von L'Hospital $n-1$ mal an und dann die (alternative) Definition der Ableitung ($g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{(x-a)}$):

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-T_n'(x)}{n\cdot(x-a)^{n-1}} \\
&= \ldots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)-T_n^{(n-1)}(x)}{n!\cdot(x-a)} \\
&= \frac{1}{n!} \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a} - \frac{T_n^{(n-1)}(x)-T_n^{(n-1)}(a)}{x-a} \\
&= \frac{1}{n!}\cdot\left(f^{(n)}(a)-T_n^{(n)}(a)\right) = \frac{1}{n!}\cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

# Lagrangesche Form des Restglieds

Man kann das Restglied $R_n(x)$ des Satzes auch konkret abschätzen:

**Satz 10.12 (Lagrangesche Form des Restglieds)**

Für das Restglied $R_n(x)$ aus dem vorangegangenen Satz gilt folgende Gleichung für eine Zahl $\xi$ zwischen $a$ und $x$.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

# Taylorreihe

**Definition**

Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit $a \in I$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion, so heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

die **Taylorreihe** von $f$ im Punkt $a$.

- Wenn die Taylorreihe von $f$ konvergiert, so muss sie nicht unbedingt gegen $f(x)$ konvergieren
- Aber: Wenn $f$ in einem Intervall $I$ mit $a \in I$ überhaupt als Potenzreihe darstellbar ist, dann stimmt diese Reihe mit der Taylorreihe überein

# Taylorreihe zum Berechnen von Potenzreihen

**Satz 10.14**

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit $a \in I$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion und $x \in I$. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ für das Restglied $R_n(x)$ aus Satz 10.11 gilt, dann ist

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad .$$

Diesen Satz können wir verwenden, um Potenzreihen für beliebig oft differenzierbare Funktionen zu berechnen.

# Beispiele

Taylorreihe für $f(x) = \sin(x)$ mit Entwicklungspunkt $a = 0$:

Da $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$, haben wir

$$\begin{aligned}
\sin^{(0)}(0) &= \sin(0) = 0 \\
\sin^{(1)}(0) &= \cos(0) = 1 \\
\sin^{(2)}(0) &= -\sin(0) = 0 \\
\sin^{(3)}(0) &= -\cos(0) = -1 \\
\sin^{(4)}(0) &= \sin(0) = 0 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Die Taylorreihe von $\sin(x)$ im Punkt $0$ ist also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

# Beispiele (2)

- Um zu zeigen, dass diese Taylorreihe gleich $\sin(x)$ ist, müssen wir $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ zeigen.
- Wir benutzen die Restgliedabschätzung nach Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = \frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \text{ für ein } \xi \in [0, x].$$

- Es gilt $|R_n(x)| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, da $|\sin^{(n)}(\xi)| \leq 1$ gilt.
- Man beweist direkt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ gilt (nächste Folie)

# Beispiele (3)

Wir zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ gilt:

Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > |x|$ und $k \geq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^k \cdot |x|^{n+1-k}}{(n+1)!} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^k \cdot k^{n+1-k}}{(n+1)!} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^k \cdot k \cdot (k+1) \cdots n}{(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^k}{(k-1)! \cdot (n+1)} \\
&= \frac{|x|^k}{(k-1)!} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{|x|^k}{(k-1)!} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

# Beispiele (4)

Mit der Reihe und der Abschätzung des Restglieds können wir $\sin$ auch mit beliebig gewünschter Genauigkeit numerisch berechnen. Beispiel: Wir berechnen $\sin(x)$ für $x = 1$ auf zwei Nachkommastellen. Für $n = 5$ ist das Restglied $\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} < 0.0014$. Die ersten fünf Glieder der Taylorreihe mit $x = 1$ sind die Summe:

$$\frac{1}{1!} + \frac{0}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{0}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{101}{120} \approx 0.8417$$

Wegen der Restgliedabschätzung unterscheidet sich dieser Wert von $\sin(1)$ höchstens um $0.0014$, also sind die ersten beiden Kommastellen korrekt, d.h. $\sin(1) = 0.84\ldots$.

# Beispiele (5)

Berechne explizite Reihendarstellung für unbekannte Funktion:
Ableitungen von $\ln(x)$: Wir haben

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \ , \quad \ln''(x) = \frac{-1}{x^2} \ , \quad \ln'''(x) = \frac{2}{x^3} \ , \quad \ln^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4} \ .$$

Allgemein für $n > 0$: $\ln^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{x^n}$

Taylorreihe von $\ln(x)$ im Punkt $a = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

Es bleibt noch das Restglied abzuschätzen.

# Beispiele (6)

Wir verwenden die Restgliedabschätzung nach Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{\ln^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{\xi^{n+1} \cdot (n+1)}(x-1)^{n+1} \text{ für ein } \xi \in [x, 1]$$

# Beispiele (6)

Wir verwenden die Restgliedabschätzung nach Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{\ln^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{\xi^{n+1} \cdot (n+1)}(x-1)^{n+1} \text{ für ein } \xi \in [x, 1]$$

Für $x \in (0.5, 2)$ gilt dann $|\xi| > |x - 1|$:

- Für $x \in (0.5, 1)$ gilt $\xi \in [x, 1]$ und damit $|\xi| = \xi > 1 - x = |x - 1|$.
- Für $x \in (1, 2)$ gilt $\xi \in [1, x]$. Da $|x - 1| = x - 1 < 1$, folgt $|\xi| = \xi > |x - 1|$.

# Beispiele (6)

Wir verwenden die Restgliedabschätzung nach Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{\ln^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{\xi^{n+1} \cdot (n+1)}(x-1)^{n+1} \text{ für ein } \xi \in [x, 1]$$

Für $x \in (0.5, 2)$ gilt dann $|\xi| > |x-1|$:

- Für $x \in (0.5, 1)$ gilt $\xi \in [x, 1]$ und damit $|\xi| = \xi > 1 - x = |x-1|$.
- Für $x \in (1, 2)$ gilt $\xi \in [1, x]$. Da $|x-1| = x - 1 < 1$, folgt $|\xi| = \xi > |x-1|$.

Für $x \in (0.5, 2)$ haben wir also

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{\xi^{n+1} \cdot (n+1)}(x-1)^{n+1} \right| = \frac{1}{(n+1)} \cdot \left| \frac{x-1}{\xi} \right|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)} \quad .$$

# Beispiele (6)

Wir verwenden die Restgliedabschätzung nach Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{\ln^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{\xi^{n+1}\cdot(n+1)}(x-1)^{n+1} \text{ für ein } \xi \in [x,1]$$

Für $x \in (0.5, 2)$ gilt dann $|\xi| > |x-1|$:

- Für $x \in (0.5, 1)$ gilt $\xi \in [x, 1]$ und damit $|\xi| = \xi > 1 - x = |x-1|$.
- Für $x \in (1, 2)$ gilt $\xi \in [1, x]$. Da $|x-1| = x - 1 < 1$, folgt $|\xi| = \xi > |x-1|$.

Für $x \in (0.5, 2)$ haben wir also

$$|R_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{\xi^{n+1}\cdot(n+1)}(x-1)^{n+1}\right| = \frac{1}{(n+1)}\cdot\left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)} \; .$$

Das zeigt $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ und damit, dass die obige Taylorreihe für $x \in (0.5, 2)$ mit $\ln(x)$ übereinstimmt.

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \qquad \text{für } x \in (0.5, 2).$$

# Eine Anwendung der Integralrechnung

Als Anwendungsbeispiel der Integralrechnung können wir eine Restgliedabschätzung der Taylorreihendarstellung beweisen.

**Satz 10.16**

Sei $I$ ein Intervall mit $a \in I$ und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine $n+1$-mal differenzierbare Funktion. Definiere das Restglied $R_n(x)$ für $x \in I$ durch die Gleichung

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

Dann gilt $R_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$

# Beweis

Der Beweis des Satzes erfolgt durch Induktion über $n$.
**Basis** $n = 0$**:** Dann ist die Aussage

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Das ist der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.

# Beweis (2)

**Induktionsschritt** $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^x \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{u'(t)} \cdot \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(t)}_{u(t)v(t)}\Bigg|_{t=a}^{x} - \int_a^x \underbrace{\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}}_{u(t)} \cdot \underbrace{f^{(n+2)}(t)}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \text{(mit partieller Integration)} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} + R_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Induktionsschritt.

# Cauchysche Form des Restglieds

**Satz 10.17 (Cauchysche Form des Restglieds)**

Für das Restglied $R_n(x)$ aus dem vorangegangenen Satz gilt folgende Gleichung für eine Zahl $\xi$ zwischen $a$ und $x$.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a)$$

*Beweis*. Das folgt aus $R_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ sofort mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung. □

# Bemerkung

Lagrangesche Form des Restglieds:

Es gibt eine Zahl $\xi$ zwischen $a$ und $x$ mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Cauchysche Form des Restglieds:

Es gibt eine Zahl $\xi$ zwischen $a$ und $x$.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a)$$

Die Lagrangesche Form lässt sich ebenfalls leicht aus der Integraldarstellung von $R_n(x)$ ableiten. Man braucht dazu eine etwas allgemeinere Form des Mittelwertsatzes (siehe Forster).