LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Grundlagen der Analysis
Wintersemester 2019/20

Integration

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 22. Januar 2020

Riemann-Integral

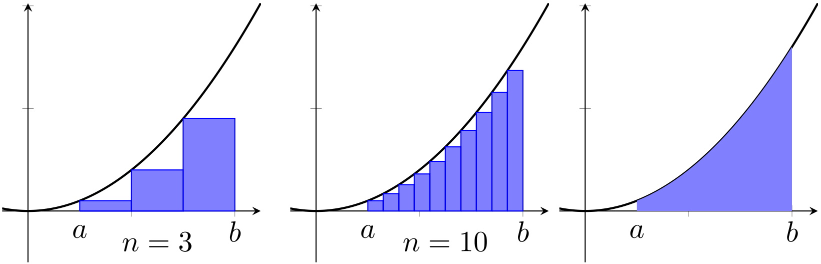
Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die bis auf endlich viele Ausnahmen in allen Punkten von $[a,b]$ stetig ist. Das Riemann-Integral ist dann als folgender Grenzwert definiert:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \tfrac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

Man kann zeigen, dass der Grenzwert unter den Annahmen der Definition stets existiert.

Veranschaulichung: Riemann-Integral

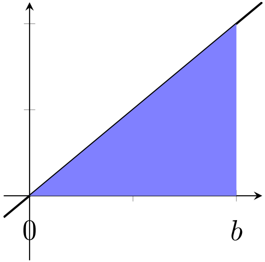


- Fläche zwischen Graph und x-Achse
- Im Grenzwert strebt die Schrittweite gegen 0 (die Anzahl der Streifen gegen ∞)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \tfrac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

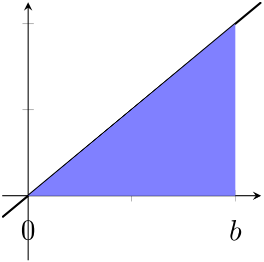
Beispiele

- $$\int_0^b x \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(k \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n}$$
  $$= \lim_{n\to\infty} \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k = \lim_{n\to\infty} \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$
  $$= \frac{b^2}{2} \lim_{n\to\infty} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{b^2}{2}$$

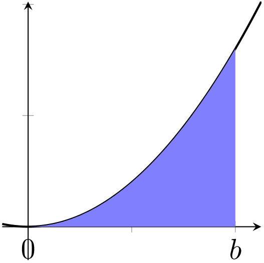


Beispiele

- $$\int_0^b x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(k \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n}$$
  $$= \lim_{n\to\infty} \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k = \lim_{n\to\infty} \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$
  $$= \frac{b^2}{2} \lim_{n\to\infty} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{b^2}{2}$$



- $$\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(k \cdot \frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n}$$
  $$= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$
  $$= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) = \frac{b^3}{3}$$



Bemerkungen

- Die Definition erfasst nur einen Spezialfall, da die Wahl der Stützstellen nicht unbedingt äquidistant zu erfolgen hat.
- Existiert der Grenzwert unabhängig von der Wahl der Stützstellen, sofern nur deren Abstand gegen Null geht, so bezeichnet man die Funktion als „Riemann-integrierbar“.
- Die beliebige Wahl der Stützstellen ist zum Beispiel für die Dirichlet-Funktion

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  wichtig. Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar, da man die Stützstellen auch stets irrational wählen könnte.
- Unsere Definition verwendet nur rationale Stützstellen und funktioniert daher nur unter den obigen Stetigkeitsannahmen.

Bemerkungen (2)

- Es gibt auch noch allgemeinere Integralbegriffe (heutiger Standard ist das Lebesgue-Integral), mit dem auch noch anderen Funktionen ein Integral zugewiesen werden kann, insbesondere solchen, die auf einem offenen Intervall, wie $[0, \infty)$ definiert sind, oder solchen, die nirgendwo stetig sind, wie etwa die Dirichlet Funktion
- Für unsere Zwecke (und die allermeisten in der Praxis vorkommenden Fälle) genügt die Definition des Integrals für stückweise stetige Funktionen.

Rechenregeln: Konstanten

Satz 9.3

Für $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b c \,\mathrm{d}x = c \cdot (b-a)$$

Beweis:

Einsetzen in die Definition und Ausrechnen

$$\int_a^b c \,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} c(b-a) \cdot \frac{1}{n} = c(b-a) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$= c(b-a) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} = c(b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = c(b-a)$$

Rechenregeln

Satz 9.4

Für $a \leq b \leq c$ gilt:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

(sofern die vorkommenden Ausdrücke überhaupt definiert sind)

Intuitiv klar. Beim genauen Beweis muss man aufpassen, da zwei äquidistante Einteilungen nicht unbedingt beim Zusammensetzen wieder eine solche geben.

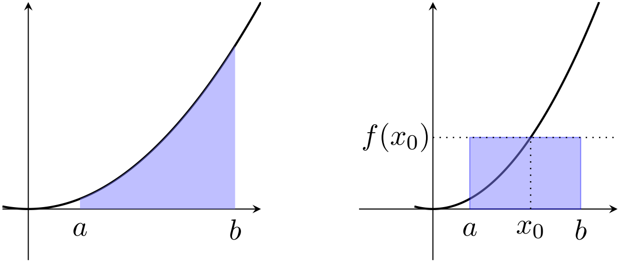
Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 9.5 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert $x_0 \in [a,b]$ derart dass

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0)(b-a) \ .$$

Veranschaulichung:



Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 9.5 (Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert $x_0 \in [a,b]$ derart dass

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0)(b-a) \ .$$

Beweis.

- Da f stetig ist, hat f auf $[a,b]$ ein Minimum $m = f(x_1)$ und ein Maximum $M = f(x_2)$ (Satz 8.20).
- Nach Definition des Integrals gilt

$$m\cdot(b-a) = \int_a^b m\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b M\,\mathrm{d}x = M\cdot(b-a)$$

- Die Funktion f nimmt nach dem Zwischenwertsatz (Satz 6.18) zwischen x_1 und x_2 jeden Wert zwischen m und M mindestens einmal an.
- Also gibt es ein passendes x_0. □

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 9.5 (Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert $x_0 \in [a,b]$ derart dass

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0)(b-a)\ .$$

Beweis.

- Da f stetig ist, hat f auf $[a,b]$ ein Minimum $m = f(x_1)$ und ein Maximum $M = f(x_2)$ (Satz 8.20).
- Nach Definition des Integrals gilt

$$m \cdot (b-a) = \int_a^b m\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\,\mathrm{d}x = M \cdot (b-a)$$

- Die Funktion f nimmt nach dem Zwischenwertsatz (Satz 6.18) zwischen x_1 und x_2 jeden Wert zwischen m und M mindestens einmal an.
- Also gibt es ein passendes x_0. □

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 9.5 (Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert $x_0 \in [a,b]$ derart dass

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0)(b-a) \ .$$

Beweis.

- Da f stetig ist, hat f auf $[a,b]$ ein Minimum $m = f(x_1)$ und ein Maximum $M = f(x_2)$ (Satz 8.20).
- Nach Definition des Integrals gilt

$$m\cdot(b-a) = \int_a^b m\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b M\,\mathrm{d}x = M\cdot(b-a)$$

- Die Funktion f nimmt nach dem Zwischenwertsatz (Satz 6.18) zwischen x_1 und x_2 jeden Wert zwischen m und M mindestens einmal an.
- Also gibt es ein passendes x_0. □

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 9.5 (Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert $x_0 \in [a,b]$ derart dass

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0)(b-a) \ .$$

Beweis.

- Da f stetig ist, hat f auf $[a,b]$ ein Minimum $m = f(x_1)$ und ein Maximum $M = f(x_2)$ (Satz 8.20).
- Nach Definition des Integrals gilt

$$m\cdot(b-a) = \int_a^b m\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\,\mathrm{d}x = M\cdot(b-a)$$

- Die Funktion f nimmt nach dem Zwischenwertsatz (Satz 6.18) zwischen x_1 und x_2 jeden Wert zwischen m und M mindestens einmal an.
- Also gibt es ein passendes x_0. $\square$

Unbestimmtes Integral: Integral mit variabler Grenze

Satz 9.6

Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Dann ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$.

Unbestimmtes Integral: Integral mit variabler Grenze

Satz 9.6

Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Dann ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$.

Beweisskizze.

- Es gilt $F(x+h) - F(x) = \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = h \cdot f(\xi)$ für ein $\xi \in [x, x+h]$ nach dem Mittelwertsatz.
- Es folgt $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi)$
- Wenn man h gegen 0 gehen lässt,
  - geht der linke Ausdruck gegen $F'(x)$;
  - geht rechts ξ gegen x, da $\xi \in [x, x+h]$.
- Man erhält $F'(x) = f(x)$. □

Unbestimmtes Integral: Integral mit variabler Grenze

Satz 9.6

Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Dann ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$.

Beweisskizze.

- Es gilt $F(x+h) - F(x) = \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = h \cdot f(\xi)$ für ein $\xi \in [x, x+h]$ nach dem Mittelwertsatz.
- Es folgt $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi)$
- Wenn man h gegen 0 gehen lässt,
  - geht der linke Ausdruck gegen $F'(x)$;
  - geht rechts ξ gegen x, da $\xi \in [x, x+h]$.
- Man erhält $F'(x) = f(x)$. □

Unbestimmtes Integral: Integral mit variabler Grenze

Satz 9.6

Sei $-\infty \le a < b \le \infty$ und sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \;.$$

Dann ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$.

Beweisskizze.

- Es gilt $F(x+h) - F(x) = \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = h \cdot f(\xi)$ für ein $\xi \in [x, x+h]$ nach dem Mittelwertsatz.
- Es folgt $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi)$
- Wenn man h gegen 0 gehen lässt,
  - geht der linke Ausdruck gegen $F'(x)$;
  - geht rechts ξ gegen x, da $\xi \in [x, x+h]$.
- Man erhält $F'(x) = f(x)$. □

Unbestimmtes Integral: Integral mit variabler Grenze

Satz 9.6

Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Dann ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$.

Beweisskizze.

- Es gilt $F(x+h) - F(x) = \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = h \cdot f(\xi)$ für ein $\xi \in [x, x+h]$ nach dem Mittelwertsatz.
- Es folgt $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi)$
- Wenn man h gegen 0 gehen lässt,
  - geht der linke Ausdruck gegen $F'(x)$;
  - geht rechts ξ gegen x, da $\xi \in [x, x+h]$.
- Man erhält $F'(x) = f(x)$. $\square$

Stammfunktion

Definition (Stammfunktion)

Eine differenzierbare Funktion F mit $F' = f$ heißt **Stammfunktion** von f.

Stammfunktion

Definition (Stammfunktion)

Eine differenzierbare Funktion F mit $F' = f$ heißt **Stammfunktion** von f.

Satz 9.8

Sind F und G Stammfunktionen für f, dann gilt $F(x) = G(x) + C$ für eine Konstante C.

Beweis.

- Sei $H(x) := F(x) - G(x)$.
- Dann gilt $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$.
- Nach Satz 8.23 ist H konstant, also gilt $H(x) = C$ für eine Konstante C.
- Daraus folgt $C = F(x) - G(x)$. □

Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 9.9 (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist f stetig und ist F Stammfunktion von f, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \ .$$

Beweis.

- Sei $G(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$
- Nach Satz 9.6 ist G eine Stammfunktion für f.
- Also muss $G(x) = F(x) + C$ für eine Konstante C gelten.
- Es gilt $G(a) = 0$ und $G(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ und damit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b)-G(a) = (F(b)+C)-(F(a)+C) = F(b)-F(a) \quad \square$$

Notation

Man verwendet die Notation

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad .$$

Der Fundamentalsatz besagt dann:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b$$

wenn F Stammfunktion von f und f stetig.

Beispiel

Auswertung von Integralen mit dem Fundamentalsatz

- Aus $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$ ergibt sich:

$$\frac{1}{k+1}x^{k+1} \text{ ist Stammfunktion zu } x^k$$

- Also folgt

$$\int_a^b x^k \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1}\Big|_a^b$$

Unbestimmtes Integral

Man schreibt abkürzend:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)$$

und bezeichnet dies als unbestimmtes Integral im Gegensatz zu den vorher eingeführten bestimmten Integralen mit expliziten Integrationsgrenzen.

Unbestimmtes Integral (2)

Zum Beispiel ist:

$$\int x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2$$

Vorsicht: Auch $\frac{1}{2}x^2 + 1$ ist eine Stammfunktion.
Man sieht daher auch die Notation

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \quad ,$$

wobei C eine beliebige Konstante repräsentieren soll.

Integrationsregeln (1)

Integration ist linear, d.h. es gilt:

- $\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad$ für $c \in \mathbb{R}$
- $\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$

Für die Berechnung von Integralen gibt es im Allgemeinen keine so leicht automatisch anwendbaren Regeln wie bei der Differentiation.

Differenzieren ist ein Handwerk, das Integrieren eine Kunst.

Integrationsregeln (2)

- Für einige einfache Funktionen kann man das Integral oder die Stammfunktion direkt angeben.
  Beispiele:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\ x\Big|_a^b \text{ für } a, b > 0$$

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$

$$\int \exp x\,\mathrm{d}x = \exp x$$

Integrationsregeln (3)

- Man kann die Differentiationsregeln „rückwärts“ anwenden.
  - Oft nicht einfach, da Integrand ganz bestimmte Form haben muss.
  - Wir betrachten zwei Beispiele dafür:
    - Partielle Integration
    - Substitutionsregel
- Man kann versuchen, die zu integrierende Funktion umzuformen, so dass einer der vorangegangenen Fälle anwendbar wird.
- Für bestimmte Funktionsklassen kann man sich allgemeine Verfahren zur Integration überlegen.

Partielle Integration

- Idee: Wende die Produktregel „rückwärts“ an.
- Erinnerung: Produktregel des Differenzierens:

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Rechenregel für die Integration (partielle Integration):

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Partielle Integration (2)

Regel in nützlicherer Form:

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

und

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

- Man kann eine solche Regel verwenden, wenn
  - der Integrand ein Produkt ist und
  - für einen der Faktoren eine Stammfunktion bekannt ist.
- Aber:
  - Das Integral wird dadurch nicht komplett gelöst!
  - Sondern auf ein anderes zurückgeführt, welches leichter, aber auch schwieriger sein kann.

Beispiele

$$\int \cos(x) \cdot \quad x$$

Beispiele

$$\int \underbrace{\cos(x)}_{u'(x)} \cdot \underbrace{x}_{v(x)} \,\mathrm{d}x$$

Beispiele

$$\int \underbrace{\cos(x)}_{u'(x)} \cdot \underbrace{x}_{v(x)} \mathrm{d}x$$

$$= \quad \underbrace{\sin(x)}_{u(x)} \underbrace{x}_{v(x)} - \int \underbrace{\sin(x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{1}_{v'(x)} \mathrm{d}x$$

Beispiele

$$
\begin{aligned}
& \int \underbrace{\cos(x)}_{u'(x)} \cdot \underbrace{x}_{v(x)} \,\mathrm{d}x \\
= \quad & \underbrace{\sin(x)}_{u(x)} \underbrace{x}_{v(x)} - \int \underbrace{\sin(x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{1}_{v'(x)} \,\mathrm{d}x \\
= \quad & \sin(x)x + \cos(x)
\end{aligned}
$$

Beispiele (2)

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiele (2)

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiele (2)

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v(x)}\,\mathrm{d}x$$

Beispiele (2)

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v(x)} - \int \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x$$

Beispiele (2)

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v(x)} - \int \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x$$

Beispiele (2)

$$
\begin{aligned}
& \int \ln(x)\,\mathrm{d}x \\
= \quad & \int \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v(x)}\,\mathrm{d}x \\
= \quad & \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v(x)} - \int \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x \\
= \quad & x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x \\
= \quad & x \ln(x) - x
\end{aligned}
$$

Beispiele (3)

Es gilt: $\int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(y + \sin(y)\cos(y))$, denn:

Durch partielle Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& \int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= \ & \int \underbrace{\cos(y)}_{u'(y)} \cdot \underbrace{\cos(y)}_{v(y)} \,\mathrm{d}y = \underbrace{\sin(y)}_{u(y)} \underbrace{\cos(y)}_{v(y)} - \int \underbrace{\sin(y)}_{u(y)} \underbrace{(-\sin(y))}_{v'(y)} \,\mathrm{d}y \\
= \ & \sin(y)\cos(y) + \int (\sin(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= \ & \sin(y)\cos(y) + \int 1 - (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= \ & \sin(y)\cos(y) + y - \int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

und damit

$$2 \cdot \int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y = \sin(y)\cos(y) + y$$

Beispiele (3)

Es gilt: $\int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(y + \sin(y)\cos(y))$, denn:

Durch partielle Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& \int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= \; & \int \underbrace{\cos(y)}_{u'(y)} \cdot \underbrace{\cos(y)}_{v(y)} \,\mathrm{d}y = \underbrace{\sin(y)}_{u(y)} \underbrace{\cos(y)}_{v(y)} - \int \underbrace{\sin(y)}_{u(y)} \underbrace{(-\sin(y))}_{v'(y)} \,\mathrm{d}y \\
= \; & \sin(y)\cos(y) + \int (\sin(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= \; & \sin(y)\cos(y) + \int 1 - (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= \; & \sin(y)\cos(y) + y - \int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

und damit

$$2 \cdot \int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y = \sin(y)\cos(y) + y$$

Beispiele (3)

Es gilt: $\int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(y + \sin(y)\cos(y))$, denn:

Durch partielle Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= &\int \underbrace{\cos(y)}_{u'(y)} \cdot \underbrace{\cos(y)}_{v(y)} \,\mathrm{d}y = \underbrace{\sin(y)}_{u(y)} \underbrace{\cos(y)}_{v(y)} - \int \underbrace{\sin(y)}_{u(y)} \underbrace{(-\sin(y))}_{v'(y)} \,\mathrm{d}y \\
= &\sin(y)\cos(y) + \int (\sin(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= &\sin(y)\cos(y) + \int 1 - (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= &\sin(y)\cos(y) + y - \int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

und damit

$$2 \cdot \int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y = \sin(y)\cos(y) + y$$

Beispiele (3)

Es gilt: $\int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(y + \sin(y)\cos(y))$, denn:

Durch partielle Integration erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&\int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= \quad &\int \underbrace{\cos(y)}_{u'(y)} \cdot \underbrace{\cos(y)}_{v(y)} \,\mathrm{d}y = \underbrace{\sin(y)}_{u(y)} \underbrace{\cos(y)}_{v(y)} - \int \underbrace{\sin(y)}_{u(y)} \underbrace{(-\sin(y))}_{v'(y)} \,\mathrm{d}y \\
= \quad &\sin(y)\cos(y) + \int (\sin(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= \quad &\sin(y)\cos(y) + \int 1 - (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= \quad &\sin(y)\cos(y) + y - \int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

und damit

$$2 \cdot \int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y = \sin(y)\cos(y) + y$$

Beispiele (3)

Es gilt: $\int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(y + \sin(y)\cos(y))$, denn:

Durch partielle Integration erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&\int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= \;& \int \underbrace{\cos(y)}_{u'(y)} \cdot \underbrace{\cos(y)}_{v(y)} \,\mathrm{d}y = \underbrace{\sin(y)}_{u(y)} \underbrace{\cos(y)}_{v(y)} - \int \underbrace{\sin(y)}_{u(y)} \underbrace{(-\sin(y))}_{v'(y)} \,\mathrm{d}y \\
= \;& \sin(y)\cos(y) + \int (\sin(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= \;& \sin(y)\cos(y) + \int 1 - (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= \;& \sin(y)\cos(y) + y - \int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

und damit

$$2 \cdot \int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y = \sin(y)\cos(y) + y$$

Beispiele (3)

Es gilt: $\displaystyle\int (\cos(y))^2 \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}(y + \sin(y)\cos(y))$, denn:

Durch partielle Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\int (\cos(y))^2 \, \mathrm{d}y \\
= \; &\int \underbrace{\cos(y)}_{u'(y)} \cdot \underbrace{\cos(y)}_{v(y)} \, \mathrm{d}y = \underbrace{\sin(y)}_{u(y)} \underbrace{\cos(y)}_{v(y)} - \int \underbrace{\sin(y)}_{u(y)} \underbrace{(-\sin(y))}_{v'(y)} \, \mathrm{d}y \\
= \; &\sin(y)\cos(y) + \int (\sin(y))^2 \, \mathrm{d}y \\
= \; &\sin(y)\cos(y) + \int 1 - (\cos(y))^2 \, \mathrm{d}y \\
= \; &\sin(y)\cos(y) + y - \int (\cos(y))^2 \, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

und damit

$$2 \cdot \int (\cos(y))^2 \, \mathrm{d}y = \sin(y)\cos(y) + y$$

Beispiele (3)

Es gilt: $\int (\cos(y))^2 \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}(y + \sin(y)\cos(y))$, denn:

Durch partielle Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& \int (\cos(y))^2 \, \mathrm{d}y \\
= \; & \int \underbrace{\cos(y)}_{u'(y)} \cdot \underbrace{\cos(y)}_{v(y)} \, \mathrm{d}y = \underbrace{\sin(y)}_{u(y)} \underbrace{\cos(y)}_{v(y)} - \int \underbrace{\sin(y)}_{u(y)} \underbrace{(-\sin(y))}_{v'(y)} \, \mathrm{d}y \\
= \; & \sin(y)\cos(y) + \int (\sin(y))^2 \, \mathrm{d}y \\
= \; & \sin(y)\cos(y) + \int 1 - (\cos(y))^2 \, \mathrm{d}y \\
= \; & \sin(y)\cos(y) + y - \int (\cos(y))^2 \, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

und damit

$$2 \cdot \int (\cos(y))^2 \, \mathrm{d}y = \sin(y)\cos(y) + y$$

Beispiele (3)

Es gilt: $\displaystyle\int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(y + \sin(y)\cos(y))$, denn:

Durch partielle Integration erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&\int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= \;& \int \underbrace{\cos(y)}_{u'(y)} \cdot \underbrace{\cos(y)}_{v(y)} \,\mathrm{d}y = \underbrace{\sin(y)}_{u(y)} \underbrace{\cos(y)}_{v(y)} - \int \underbrace{\sin(y)}_{u(y)} \underbrace{(-\sin(y))}_{v'(y)} \,\mathrm{d}y \\
= \;& \sin(y)\cos(y) + \int (\sin(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= \;& \sin(y)\cos(y) + \int 1 - (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y \\
= \;& \sin(y)\cos(y) + y - \int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

und damit

$$2 \cdot \int (\cos(y))^2 \,\mathrm{d}y = \sin(y)\cos(y) + y$$

Substitutionsregel: Idee

- Wende die Kettenregel „rückwarts“ an.
- Erinnerung: Kettenregel:

  Wenn $f(x) = h(g(x))$, dann ist $f'(x) = h'(g(x))g'(x)$.
- Daher ist $h(g(x))$ eine Stammfunktion zu $h'(g(x))g'(x)$:

$$\int h'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = h(g(x))$$

- Schwierigkeit dabei:
  Integrand muss die Form $h'(g(x))g'(x)$ haben.

Substitutionsregel: Idee

- Wende die Kettenregel „rückwarts“ an.
- Erinnerung: Kettenregel:

  Wenn $f(x) = h(g(x))$, dann ist $f'(x) = h'(g(x))g'(x)$.
- Daher ist $h(g(x))$ eine Stammfunktion zu $h'(g(x))g'(x)$:

$$\int h'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = h(g(x))$$

- Schwierigkeit dabei:
  Integrand muss die Form $h'(g(x))g'(x)$ haben.

Substitutionsregel: Idee

- Wende die Kettenregel „rückwarts“ an.
- Erinnerung: Kettenregel:

  Wenn $f(x) = h(g(x))$, dann ist $f'(x) = h'(g(x))g'(x)$.
- Daher ist $h(g(x))$ eine Stammfunktion zu $h'(g(x))g'(x)$:

$$\int h'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = h(g(x))$$

- Schwierigkeit dabei:
  Integrand muss die Form $h'(g(x))g'(x)$ haben.

Substitutionsregel: Idee

- Wende die Kettenregel „rückwarts“ an.
- Erinnerung: Kettenregel:

  Wenn $f(x) = h(g(x))$, dann ist $f'(x) = h'(g(x))g'(x)$.
- Daher ist $h(g(x))$ eine Stammfunktion zu $h'(g(x))g'(x)$:

$$\int h'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = h(g(x))$$

- Schwierigkeit dabei:
  Integrand muss die Form $h'(g(x))g'(x)$ haben.

Beispiele

- $\displaystyle\int \underbrace{\exp(kx)}_{\substack{\text{hat nicht die} \\ \text{richtige Form}}} \,\mathrm{d}x$

Beispiele

- $$\int \underbrace{\exp(kx)}_{\text{hat nicht die richtige Form}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int \underbrace{\exp}_{h'}(\underbrace{k \cdot x}_{g(x)}) \underbrace{k}_{g'(x)} \mathrm{d}x$$

Beispiele

- $$\int \underbrace{\exp(kx)}_{\text{hat nicht die richtige Form}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int \underbrace{\exp}_{h'}(\underbrace{k\cdot x}_{g(x)})\underbrace{k}_{g'(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\underbrace{\exp}_{h}(\underbrace{k\cdot x}_{g(x)})$$

Beispiele

- $$\int \underbrace{\exp(kx)}_{\substack{\text{hat nicht die}\\ \text{richtige Form}}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int \underbrace{\exp}_{h'}(\underbrace{k\cdot x}_{g(x)}) \underbrace{k}_{g'(x)} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\underbrace{\exp}_{h}(\underbrace{k\cdot x}_{g(x)})$$

- $$\int \underbrace{\exp(x^2)x}_{\substack{\text{hat nicht die}\\ \text{richtige Form}}} \,\mathrm{d}x$$

Beispiele

- $$\int \underbrace{\exp(kx)}_{\text{hat nicht die richtige Form}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int \underbrace{\exp}_{h'}(\underbrace{k\cdot x}_{g(x)})\underbrace{k}_{g'(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\underbrace{\exp}_{h}(\underbrace{k\cdot x}_{g(x)})$$

- $$\int \underbrace{\exp(x^2)x}_{\text{hat nicht die richtige Form}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \underbrace{\exp}_{h'}(\underbrace{x^2}_{g(x)})\underbrace{2x}_{g'(x)}\,\mathrm{d}x$$

Beispiele

- $$\int \underbrace{\exp(kx)}_{\text{hat nicht die richtige Form}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int \underbrace{\exp}_{h'}(\underbrace{k \cdot x}_{g(x)})\underbrace{k}_{g'(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\underbrace{\exp}_{h}(\underbrace{k \cdot x}_{g(x)})$$

- $$\int \underbrace{\exp(x^2)x}_{\text{hat nicht die richtige Form}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \underbrace{\exp}_{h'}(\underbrace{x^2}_{g(x)})\underbrace{2x}_{g'(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\underbrace{\exp}_{h}(\underbrace{x^2}_{g(x)})$$

Substitutionsregel

Will man $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnen, dann berechne

$$H(y) := \int f(g(y)) \cdot g'(y)\,\mathrm{d}y$$

„Es wird $g(y)$ für x substituiert."

Wenn g eine Umkehrfunktion hat, dann erhält man:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = H(g^{-1}(x))$$

Substitutionsregel

Will man $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnen, dann berechne

$$H(y) := \int f(g(y)) \cdot g'(y)\,\mathrm{d}y$$

„Es wird $g(y)$ für x substituiert."

Wenn g eine Umkehrfunktion hat, dann erhält man:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = H(g^{-1}(x))$$

Korrektheit:

- Sei $F(x) := \int f(x)\,\mathrm{d}x$. Dann gilt $F' = f$.
- $H(y) = F(g(y))$ denn, die Ableitung von $F(g(y))$ ist $F'(g(y))g'(y)$ mit der Kettenregel.
- Einsetzen von $g^{-1}(x)$ für y: $H(g^{-1}(x)) = F(g(g^{-1}(x)) = F(x)$.

Substitutionsregel

Will man $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnen, dann berechne

$$H(y) := \int f(g(y)) \cdot g'(y)\,\mathrm{d}y$$

„Es wird $g(y)$ für x substituiert."

Wenn g eine Umkehrfunktion hat, dann erhält man:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = H(g^{-1}(x))$$

Korrektheit:

- Sei $F(x) := \int f(x)\,\mathrm{d}x$. Dann gilt $F' = f$.
- $H(y) = F(g(y))$ denn, die Ableitung von $F(g(y))$ ist $F'(g(y))g'(y)$ mit der Kettenregel.
- Einsetzen von $g^{-1}(x)$ für y: $H(g^{-1}(x)) = F(g(g^{-1}(x)) = F(x)$.

Substitutionsregel

Will man $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnen, dann berechne

$$H(y) := \int f(g(y)) \cdot g'(y)\,\mathrm{d}y$$

„Es wird $g(y)$ für x substituiert.“

Wenn g eine Umkehrfunktion hat, dann erhält man:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = H(g^{-1}(x))$$

Korrektheit:

- Sei $F(x) := \int f(x)\,\mathrm{d}x$. Dann gilt $F' = f$.
- $H(y) = F(g(y))$ denn, die Ableitung von $F(g(y))$ ist $F'(g(y))g'(y)$ mit der Kettenregel.
- Einsetzen von $g^{-1}(x)$ für y: $H(g^{-1}(x)) = F(g(g^{-1}(x)) = F(x)$.

Beispiele

Berechnung von $\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x$:

- Substitutiere mit $g(y) = \frac{y}{2}$

$$H(y) := \int \sin(2 \cdot \underbrace{\frac{y}{2}}_{g(y)}) \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{g'(y)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \sin(y)\,\mathrm{d}y = \frac{-\cos(y)}{2}$$

- Umkehrfunktion von g ist $g^{-1}(y) = 2 \cdot y$
- Also erhalten wir $\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = H(g^{-1}(x)) = \frac{-\cos(2x)}{2}$

Probe: $\left(\frac{-\cos(2x)}{2}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot (-\sin(2x) \cdot 2) = \sin(2x)$

Beispiele (2)

Berechnung von $\int x \cdot \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ (für positive x):

- Substitutiere mit $g(y) = \sqrt{y}$

$$H(y) := \int \sqrt{y} \cdot \sin(y) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{y}}}_{g'(y)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \sin(y)\,\mathrm{d}y = \frac{-\cos(y)}{2}$$

- Umkehrfunktion von g ist $g^{-1}(y) = y^2$
- Also erhalten wir $\int x \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = H(g^{-1}(x)) = \dfrac{-\cos(x^2)}{2}$

Beispiele (3)

Berechnung von $\int \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ (für positive x):

- Substitutiere mit $g(y) = \sqrt{y}$

$$H(y) := \int \sin(y) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{y}}}_{g'(y)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \frac{\sin(y)}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$$

- Hier kommt man nicht weiter, die Substitution hilft also nicht

Substitution bei bestimmten Integralen

Für bestimmte Integrale gilt:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Begründung:

- Sei F Stammfunktion von f.
- Dann ist $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y = F(y)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$
- Die Stammfunktion auf der rechten Seite ist $F(g(x))$
- Daher gilt:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x))\,\Big|_a^b = F(g(a)) - F(g(b))$$

Beispiel

$$\int_0^2 \exp(x^2)x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^2 \exp(x^2)\cdot 2x\,\mathrm{d}x}_{\int_a^b \exp(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \text{ mit } g(x)=x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^4 \exp(y)\,\mathrm{d}y}_{\int_{g(a)}^{g(b)} \exp(y)\,\mathrm{d}y}$$

$$= \frac{1}{2}\exp(y)\Big|_0^4 = \frac{\exp(4)}{2} - \frac{1}{2}$$

Weitere Beispiele

- $$\int_a^b f(x+c)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\underbrace{x+c}_{g(x)}) \cdot \underbrace{1}_{g'(x)} \mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,\mathrm{d}y$$
  (mit $g(x) = x + c$)

- $$\int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c} \int_a^b f(\underbrace{cx}_{g(x)}) \cdot \underbrace{c}_{g'(x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{c} \int_{c\cdot a}^{c\cdot b} f(y)\,\mathrm{d}y$$
  falls $c \neq 0$ und mit $g(x) = c \cdot x$

Größeres Beispiel

$$\int x^3 \sin(x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = ?$$

- Berechne $H(y) = \displaystyle\int (g(y))^3 \sin((g(y))^2 - 1) g'(y)\,\mathrm{d}y$
- Wähle $g(y)$ so, dass $g(y)^2 - 1 = y$ (um das Integral zur Vereinfachen, sodass $\sin(y)$ integriert werden muss.
  Das ergibt $g(y) = \sqrt{y+1}$ (und $g^{-1}(y) = y^2 - 1$)
- ...

Größeres Beispiel (2)

$$
\begin{aligned}
H(y) &= \int (\sqrt{y+1})^3 \cdot \sin(y) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y+1}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{2}(y+1)(\sin(y))\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int (y+1)(\sin(y)) = \frac{1}{2}\int y(\sin(y)) + (\sin(y)) \\
&= \frac{1}{2}((\int y(\sin(y))\,\mathrm{d}y) + \int y(\sin(y))\,\mathrm{d}y) \\
&= \frac{1}{2}((\int \underbrace{y}_{u(y)} \underbrace{\sin(y)}_{v'(y)}\,\mathrm{d}y) - (\cos(y)) \\
&= \frac{1}{2}((\underbrace{y \cdot (-\cos(y))}_{(u(y)\cdot v(y)}) - \int \underbrace{1 \cdot (-\cos(y))}_{u'(y)\cdot v(y)}\,\mathrm{d}y) - (\cos(y)) \\
&= \frac{1}{2}((-y\cos(y) - (-(\int \cos(y)))\,\mathrm{d}y) - (\cos(y)) \\
&= \frac{1}{2}((-y\cos(y) - (-(\sin(y)))) - (\cos(y)) \\
&= \frac{1}{2}(\sin(y) - y\cos(y) - \cos(y))
\end{aligned}
$$

Größeres Beispiel (3)

- Berechne die gesuchte Stammfunktion:

$$\int x^3 \sin(x^2-1)\,\mathrm{d}x = H(g^{-1}(x)) = H(x^2-1)$$

$$= \frac{1}{2}(\sin(x^2-1) - (x^2-1)\cos(x^2-1) - \cos(x^2-1))$$

$$= \frac{1}{2}(\sin(x^2-1) - x^2\cos(x^2-1))$$

Anwendung: Integrale und Konvergenz

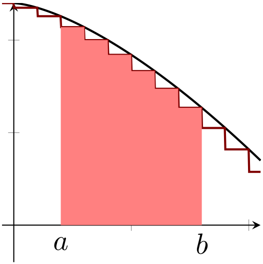
Satz 9.15

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ eine monoton fallende stetige Funktion und $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a < b$. Dann gilt

$$\sum_{n=a+1}^{b} f(n) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Beweisidee.

- Sei ϕ die Treppenfunktion $\phi(x) := f(\lceil x \rceil)$, wobei $\lceil x \rceil \in \mathbb{N}$ kleinste Zahl mit $x \leq \lceil x \rceil$ („aufrunden").
- Da f monoton fallend ist, gilt sicher $$\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
- Nach Definition des Integrals gilt aber auch $$\sum_{n=a+1}^{b} f(n) = \int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x.$$



Notation

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dies ist ein sogenanntes uneigentliches Integral.

Reihen-Konvergenz durch Berechnung des Integrals

Satz 9.16

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ eine monoton fallende stetige Funktion. Wenn $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert und eine Zahl in $\mathbb{R}$ ist, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Beweis.

- Nach Satz 9.15 gilt $\sum_{n=2}^{b} f(n) \leq \int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- Wir haben in Satz 4.11 gezeigt, dass jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge auch konvergiert.
- Die Folge der Partialsummen $a_k := \sum_{n=2}^{k} f(n)$ muss monoton wachsend sein, da der Wertebereich von f die nichtnegativen reellen Zahlen sind.
- ...

Beweis von Satz 9.16 (Forts.)

- Die Folge $b_k := \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x$ ist auch monoton wachsend (da f keine negativen Werte annimmt)
- Wir haben $\int_1^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x + \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ und der zweite Summand muss ≥ 0 sein, da f keine negativen Werte animmt
- Damit gilt $a_k = \sum_{n=2}^{k} f(n) \leq \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ für alle k.
- Nach Annahme existiert der Grenzwert $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$
- Daher ist $(a_k)_{k\geq 2}$ monoton wachsend und beschränkt. D.h. sie konvergiert.
- Damit folgt auch die Konvergenz von $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ und von $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ $\square$

Beweis von Satz 9.16 (Forts.)

- Die Folge $b_k := \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x$ ist auch monoton wachsend (da f keine negativen Werte annimmt)
- Wir haben $\int_1^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x + \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ und der zweite Summand muss ≥ 0 sein, da f keine negativen Werte animmt
- Damit gilt $a_k = \sum_{n=2}^{k} f(n) \leq \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ für alle k.
- Nach Annahme existiert der Grenzwert $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$
- Daher ist $(a_k)_{k\geq 2}$ monoton wachsend und beschränkt. D.h. sie konvergiert.
- Damit folgt auch die Konvergenz von $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ und von $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ □

Beweis von Satz 9.16 (Forts.)

- Die Folge $b_k := \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x$ ist auch monoton wachsend (da f keine negativen Werte annimmt)
- Wir haben $\int_1^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x + \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ und der zweite Summand muss ≥ 0 sein, da f keine negativen Werte animmt
- Damit gilt $a_k = \sum_{n=2}^{k} f(n) \leq \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ für alle k.
- Nach Annahme existiert der Grenzwert $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$
- Daher ist $(a_k)_{k\geq 2}$ monoton wachsend und beschränkt. D.h. sie konvergiert.
- Damit folgt auch die Konvergenz von $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ und von $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ $\square$

Beweis von Satz 9.16 (Forts.)

- Die Folge $b_k := \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x$ ist auch monoton wachsend (da f keine negativen Werte annimmt)
- Wir haben $\int_1^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x + \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ und der zweite Summand muss ≥ 0 sein, da f keine negativen Werte animmt
- Damit gilt $a_k = \sum_{n=2}^{k} f(n) \leq \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ für alle k.
- Nach Annahme existiert der Grenzwert $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$
- Daher ist $(a_k)_{k\geq 2}$ monoton wachsend und beschränkt. D.h. sie konvergiert.
- Damit folgt auch die Konvergenz von $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ und von $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ $\square$

Beweis von Satz 9.16 (Forts.)

- Die Folge $b_k := \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x$ ist auch monoton wachsend (da f keine negativen Werte annimmt)
- Wir haben $\int_1^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x + \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ und der zweite Summand muss ≥ 0 sein, da f keine negativen Werte animmt
- Damit gilt $a_k = \sum_{n=2}^{k} f(n) \leq \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ für alle k.
- Nach Annahme existiert der Grenzwert $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$
- Daher ist $(a_k)_{k\geq 2}$ monoton wachsend und beschränkt. D.h. sie konvergiert.
- Damit folgt auch die Konvergenz von $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ und von $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ $\square$

Beweis von Satz 9.16 (Forts.)

- Die Folge $b_k := \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x$ ist auch monoton wachsend (da f keine negativen Werte annimmt)
- Wir haben $\int_1^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x + \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ und der zweite Summand muss ≥ 0 sein, da f keine negativen Werte animmt
- Damit gilt $a_k = \sum_{n=2}^{k} f(n) \leq \int_1^k f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ für alle k.
- Nach Annahme existiert der Grenzwert $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$
- Daher ist $(a_k)_{k\geq 2}$ monoton wachsend und beschränkt. D.h. sie konvergiert.
- Damit folgt auch die Konvergenz von $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ und von $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ $\square$

Beispiel

Behauptung: Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert.

- Beachte: $-2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ ist eine Stammfunktion von $x^{-\frac{3}{2}}$
- Es gilt $\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int_1^b x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = -2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^b$
$$= -2 \cdot b^{-\frac{1}{2}} - (-2 \cdot 1^{-\frac{1}{2}}) = 2 - \frac{2}{\sqrt{b}}$$
- Da $\displaystyle\lim_{b\to\infty} 2 - \frac{2}{\sqrt{b}} = 2$ folgt $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = 2$
- Damit ist gezeigt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert.
- Aus dem Beweis des Satzes kann man auch $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \leq 2$

  ablesen, also erhält man $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \leq 3.$

Beispiel

Behauptung: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert.

- Beachte: $-2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ ist eine Stammfunktion von $x^{-\frac{3}{2}}$
- Es gilt $\int_1^b \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}x = \int_1^b x^{-\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x = -2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \Big|_1^b$
$$= -2 \cdot b^{-\frac{1}{2}} - (-2 \cdot 1^{-\frac{1}{2}}) = 2 - \frac{2}{\sqrt{b}}$$
- Da $\lim_{b \to \infty} 2 - \frac{2}{\sqrt{b}} = 2$ folgt $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}x = 2$
- Damit ist gezeigt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert.
- Aus dem Beweis des Satzes kann man auch $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \leq 2$

  ablesen, also erhält man $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \leq 3$.

Beispiel

Behauptung: Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert.

- Beachte: $-2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ ist eine Stammfunktion von $x^{-\frac{3}{2}}$
- Es gilt $\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int_1^b x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = -2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^b$

$$= -2 \cdot b^{-\frac{1}{2}} - (-2 \cdot 1^{-\frac{1}{2}}) = 2 - \frac{2}{\sqrt{b}}$$

- Da $\displaystyle\lim_{b\to\infty} 2 - \frac{2}{\sqrt{b}} = 2$ folgt $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = 2$
- Damit ist gezeigt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert.
- Aus dem Beweis des Satzes kann man auch $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \leq 2$

  ablesen, also erhält man $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \leq 3.$

Beispiel

Behauptung: Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert.

- Beachte: $-2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ ist eine Stammfunktion von $x^{-\frac{3}{2}}$
- Es gilt $$\int_1^b \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int_1^b x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = -2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^b$$ $$= -2 \cdot b^{-\frac{1}{2}} - (-2 \cdot 1^{-\frac{1}{2}}) = 2 - \frac{2}{\sqrt{b}}$$
- Da $\displaystyle\lim_{b\to\infty} 2 - \frac{2}{\sqrt{b}} = 2$ folgt $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = 2$
- Damit ist gezeigt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert.
- Aus dem Beweis des Satzes kann man auch $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \leq 2$ ablesen, also erhält man $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \leq 3.$

Beispiel

Behauptung: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert.

- Beachte: $-2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ ist eine Stammfunktion von $x^{-\frac{3}{2}}$
- Es gilt $\int_1^b \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}x = \int_1^b x^{-\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}x = -2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \Big|_1^b$

$$= -2 \cdot b^{-\frac{1}{2}} - (-2 \cdot 1^{-\frac{1}{2}}) = 2 - \frac{2}{\sqrt{b}}$$

- Da $\lim_{b\to\infty} 2 - \frac{2}{\sqrt{b}} = 2$ folgt $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}x = 2$
- Damit ist gezeigt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert.
- Aus dem Beweis des Satzes kann man auch $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \leq 2$

  ablesen, also erhält man $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \leq 3$.

Beispiel

Behauptung: Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert.

- Beachte: $-2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ ist eine Stammfunktion von $x^{-\frac{3}{2}}$
- Es gilt $\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int_1^b x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = -2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^b$

$$= -2 \cdot b^{-\frac{1}{2}} - (-2 \cdot 1^{-\frac{1}{2}}) = 2 - \frac{2}{\sqrt{b}}$$

- Da $\displaystyle\lim_{b\to\infty} 2 - \frac{2}{\sqrt{b}} = 2$ folgt $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = 2$
- Damit ist gezeigt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert.
- Aus dem Beweis des Satzes kann man auch $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \leq 2$

  ablesen, also erhält man $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \leq 3$.