LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Grundlagen der Analysis
Wintersemester 2019/20

Differentiation

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 15. Januar 2020

Differenzierbarkeit

Wir betrachten nun wieder reelle Funktionen.

Definition (Differenzierbarkeit)

Sei $f\colon D \to W$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $W \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt an der Stelle $x \in D$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Man schreibt dann $f'(x)$ für diesen Grenzwert.

Bemerkungen

- Man findet auch die Notation $\frac{df(x)}{dx}$ („$df(x)$ nach dx“).
- Das ist jedoch nicht der Quotient zweier reeller Zahlen $df(x)$ und dx! (sondern entspricht $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$)

Differenzierbarkeit: Bemerkungen

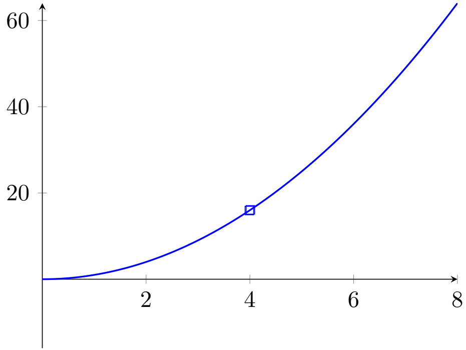
- Der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ muss nicht immer existieren.
- Daher sind nicht alle Funktionen überall differenzierbar.
- Z.B. ist $f(x) = |x|$ an der Stelle 0 nicht differenzierbar, da
$$\frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1, & \text{wenn } h < 0 \\ 1, & \text{wenn } h > 0 \end{cases}$$
- Nicht differenzierbar aber stetig an x entspricht in etwa: Funktionsgraph hat einen Knick

$f'(a)$ ist Steigung der Tangenten

- Die Zahl $f'(a)$ ist die Steigung der Tangente am Graphen von f an der Stelle a, also die Steigung des Graphen im Punkt a.
- Die Tangente im Punkt a ist die lineare Funktion $t(x) = (x - a)f'(a) + f(a)$.

Beispiel: Tangente

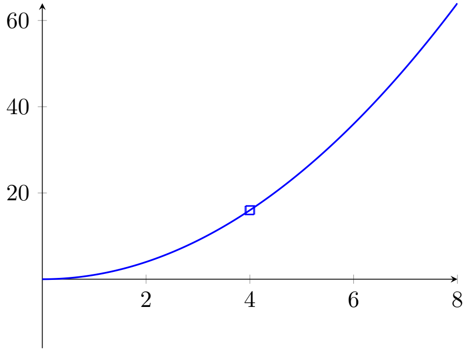
$f(x) \;=\; x^2$



Beispiel: Tangente

$f(x) = x^2$

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{(4+h)^2 - 4^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4^2+8h+h^2-4^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(8+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 8 + h = 8$$



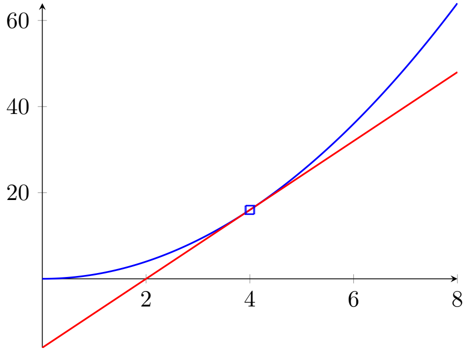
Beispiel: Tangente

$f(x) \;=\; x^2$

$$f'(4) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{(4+h)^2-4^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4^2+8h+h^2-4^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(8+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 8+h = 8$$

Tangente im Punkt 4:

$t(x) \;=\; (x-4)f'(4)+f(4) = (x-4)*8+16 = 8*x-16$



Ableitung

Die durch

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

definierte Funktion f' heißt die Ableitung von f.

Beispiele

- Für $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = 0$:

  Es gilt $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c - c}{h} = 0$,

  also $f'(x) = 0$ und der Grenzwert existiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiele

- Für $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = 0$:

  Es gilt $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{c-c}{h} = 0$,

  also $f'(x) = 0$ und der Grenzwert existiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

- Für $f(x) = x$ gilt $f'(x) = 1$, denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1 \quad .$$

Beispiele (2)

- Für $f(x) = x^2$ gilt $f'(x) = 2x$, denn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x \quad .$$

Beispiele (2)

- Für $f(x) = x^2$ gilt $f'(x) = 2x$, denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x \ .$$

- Für $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x - (x+h)}{x(x+h)h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{x(x+h)h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^2 + x \cdot h} = \frac{-1}{x^2 + x \lim\limits_{h\to 0} h} = \frac{-1}{x^2 + x \cdot 0} = -\frac{1}{x^2} \ .$$

Beispiele (3)

Für $f(x) = \exp(x)$ gilt $f'(x) = \exp(x)$, denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)}{h}$$
$$= \exp(x) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x) \quad .$$

Wobei $\lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1$, denn

- Verwende die Reihendarstellung $\exp(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}$.
- Da $\frac{(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!})-1}{h} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}}{h} - \frac{1}{h} = \frac{\frac{h^0}{0!}}{h} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!}}{h} - \frac{1}{h} = \frac{1}{h} + \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!}}{h} - \frac{1}{h} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{h^k}{h \cdot k!} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{h^{k-1}}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{(k+1)!}$ gilt $\frac{\exp(h)-1}{1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{(k+1)!}$.
- Beachte, dass diese Reihe für $h = 0$ den Wert 1 hat. Die Reihe definiert eine stetige Funktion (das kann man wie in Satz 6.11 zeigen), d.h. $\lim\limits_{h\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{(k+1)!} = 1$.

Beispiele (4)

- Für $f(x) = \sin(x)$ gilt $f'(x) = \cos(x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} + \sin(x) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} \\ &= \cos(x)\end{aligned}$$

- Für $f(x) = \cos(x)$ gilt analog $f'(x) = -\sin(x)$.

Zur Erinnerung: Additionstheoreme:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Satz 8.3

Satz 8.3

Sei f eine im Punkt $a \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion. Definiere die Funktion r durch

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + r(x) \ .$$

Dann gilt $\lim_{h \to 0} \frac{r(a+h)}{h} = 0$.

Erläuterungen:

- Die Funktion f wird zerlegt in die Summe einer linearen Funktion $f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ (die Tangente von f im Punkt a) plus einen Rest $r(x)$.
- Der Satz sagt, dass der Rest um den Punkt a einen geringeren als linearen Beitrag leistet.
- Es geht $r(a + h)$ für $h \to 0$ schneller gegen 0 als die lineare Funktion h.

Beweis von Satz 8.3

Durch Umstellen von $f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + r(x)$ erhalten wir

$$\frac{r(x)}{(x-a)} = \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} - f'(a) \ .$$

Einsetzen von $a + h$ für x ergibt

$$\frac{r(a+h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a).$$

Daraus folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(a+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \ .$$

Nach Definition der Ableitung ist die rechte Seite gleich $f'(a) - f'(a) = 0$. □

Satz 8.4

Satz 8.4

Sei f eine Funktion und seien $a, b \in \mathbb{R}$. Definiere r durch

$$f(x) = f(a) + b \cdot (x - a) + r(x) \quad .$$

Wenn $\lim_{h\to 0} \frac{r(a+h)}{h} = 0$, dann gilt $f'(a) = b$.

Erläuterung:

- Das ist Umkehrung des vorherigen Satzes!
- Wenn man eine Funktion f so in eine lineare Funktion plus Rest zerlegen kann, sodass der Rest im Punkt a geringer als linear ist, dann muss die lineare Funktion die Tangente sein.

Beweis von Satz 8.4

Durch Umstellen und Einsetzen wie im vorangegangenen Beweis erhalten wir

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(a+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - b = f'(a) - b \ .$$

Wenn der Grenzwert auf der linken Seite also 0 ist, dann muss auch $f'(a) - b = 0$ gelten, also $f'(a) = b$. □

Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Satz 8.5

Ist eine Funktion f in einem Punkt a differenzierbar, so ist sie in a auch stetig.

Beweis.

- Wir müssen $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ zeigen.
- Nach Satz 8.3 können wir $f(x)$ als $f(a) + f'(a)(x - a) + r(x)$ mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(a+h)}{h} = 0$ schreiben.
- Aus $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(a+h)}{h} = 0$ folgt $\lim_{h \to 0} r(a + h) = 0$.
- Somit haben wir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} f(a)+f'(a) \cdot h+r(a+h) = f(a),$$

was zu zeigen war. □

Umkehrung...

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht immer,
d.h. aus der Stetigkeit darf man nicht die Differenzierbarkeit folgern
Beispiel:

- $f(x) = |x|$ im Punkt $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar.
- Anschaulich: f hat einen Knick im Punkt 0.

Differentiationsregeln: Linearität

Satz (Linearität)

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt x differenzierbare Funktionen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.
- $(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$.

Beweis: Das folgt aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen.

Beispiel: Für $f(x) = 5x^2 + 3x$ gilt $f'(x) = 10x + 3$, da

- $f(x) = \lambda \cdot g(x) + h(x)$ mit $g(x) = x^2$, $h(x) = 3x$, $\lambda = 5$
- und $g'(x) = 2x$ und $h'(x) = 3$

Differentiationsregeln: Produktregel

Satz (Produktregel)

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt x differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \ .$$

Beweis.

$(fg)'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

Differentiationsregeln: Produktregel

Satz (Produktregel)

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt x differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \ .$$

Beweis.

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)}{h}\end{aligned}$$

Differentiationsregeln: Produktregel

Satz (Produktregel)

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt x differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \ .$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)(g(x+h)-g(x))}{h}
\end{aligned}$$

Differentiationsregeln: Produktregel

Satz (Produktregel)

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt x differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \ .$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)(g(x+h)-g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))}{h} g(x+h) + f(x)\frac{(g(x+h)-g(x))}{h}
\end{aligned}$$

Differentiationsregeln: Produktregel

Satz (Produktregel)

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt x differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \enspace .$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)(g(x+h)-g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{(f(x+h)-f(x))}{h} g(x+h) + f(x) \tfrac{(g(x+h)-g(x))}{h} \\
&= \underbrace{\Big(\lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\Big)}_{=f'(x)} \underbrace{\Big(\lim_{h\to 0} g(x+h)\Big)}_{=g(x)} + f(x) \underbrace{\lim_{h\to 0} \tfrac{(g(x+h)-g(x))}{h}}_{=g'(x)}
\end{aligned}$$

dabei folgt $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ aus der Stetigkeit von g im Punkt x.

Differentiationsregeln: Produktregel

Satz (Produktregel)

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt x differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \ .$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)(g(x+h)-g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))}{h} g(x+h) + f(x)\frac{(g(x+h)-g(x))}{h} \\
&= \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)}_{=f'(x)} \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} g(x+h)\right)}_{=g(x)} + f(x) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{(g(x+h)-g(x))}{h}}_{=g'(x)}
\end{aligned}$$

dabei folgt $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ aus der Stetigkeit von g im Punkt x. □

Beispiele

- Für $f(x) = (x^2 \cdot x) = x^3$: liefert die Produktregel:

  $f'(x) = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$

Beispiele

- Für $f(x) = (x^2 \cdot x) = x^3$: liefert die Produktregel:

  $f'(x) = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$

- Für $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ gilt:

  $f'(x) = \cos(x)\cos(x) + \sin(x)(-\sin(x)) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$

Beispiele

- Für $f(x) = (x^2 \cdot x) = x^3$: liefert die Produktregel:

  $f'(x) = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$

- Für $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ gilt:

  $f'(x) = \cos(x)\cos(x) + \sin(x)(-\sin(x)) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$

- Für $f(x) = x^{n+1}$ gilt $f'(x) = (n+1) \cdot x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

  Beweis durch Induktion über n:

  - $n = 0$: $f(x) = x^1$, $f'(x) = 1 = 1 \cdot x^0$
  - $n \to n+1$: Für $f(x) = x^{n+1} = x \cdot x^n$ gilt mit der Produktregel und der Induktionsannahme:
    $f'(x) = 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + n \cdot x^n = (n+1) \cdot x_n$

Differentiationsregeln: Quotientenregel

Satz (Quotientenregel)

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt x differenzierbare Funktionen und sei g im ganzen Definitionsbereich nichtnull. Dann gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad .$$

Beweis. Wir zeigen $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$. Der allgemeine Fall folgt daraus mit der Produktregel, indem man $\left(\frac{f}{g}\right) = f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)$ verwendet.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x)g(x+h)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \cdot \frac{g(x)-g(x+h)}{h} \\ &= \frac{1}{g(x)\cdot \lim_{h\to 0} g(x+h)} \cdot - \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{g(x)^2} \cdot (-g'(x))\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wird wieder die Stetigkeit von g benutzt. $\square$

Beispiele

- Für $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ gilt

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

Beispiele

- Für $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ gilt
  $$f'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$
- Für $f(x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ gilt
  $$f'(x) = \frac{0 \cdot \exp(x) - \exp(x)}{\exp(x)^2} = -\frac{1}{\exp(x)}$$

Beispiele

- Für $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ gilt

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

- Für $f(x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ gilt

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \exp(x) - \exp(x)}{\exp(x)^2} = -\frac{1}{\exp(x)}$$

- Für $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+4}$ folgt mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{(2x \cdot (2x+4)) - (x^2 \cdot 2)}{(2x+4)^2} = \frac{4x^2 + 8x - 2x^2}{(2x+4)^2} = \frac{2x^2 + 8x}{(2x+4)^2}$$

Differentiationsregeln: Kettenregel

Satz (Kettenregel)

Seien $g\colon D \to W$ und $h\colon W \to \mathbb{R}$ und sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = h(g(x))$ definiert. Ist g im Punkt x differenzierbar und h im Punkt $g(x)$, dann gilt

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) \ .$$

Beweis: siehe z.B. Buch von Forster.

Informell: Ableitung von $h(g(x))$ ist äußere mal innere Ableitung

Differentiationsregeln: Kettenregel

Satz (Kettenregel)

Seien $g\colon D \to W$ und $h\colon W \to \mathbb{R}$ und sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = h(g(x))$ definiert. Ist g im Punkt x differenzierbar und h im Punkt $g(x)$, dann gilt

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) \ .$$

Beweis: siehe z.B. Buch von Forster.

Informell: Ableitung von $h(g(x))$ ist äußere mal innere Ableitung

Beispiele:

- Für $f(x) = \exp(-x^2)$ gilt $f'(x) = \exp(-x^2) \cdot (-2x)$.
  - Äußere Ableitung $h'(z) = \exp(z)$ für $h(z) = \exp(z)$
  - Innere Ableitung $g'(w) = -2w$ für $g(w) = -w^2$

Differentiationsregeln: Kettenregel

Satz (Kettenregel)

Seien $g\colon D \to W$ und $h\colon W \to \mathbb{R}$ und sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = h(g(x))$ definiert. Ist g im Punkt x differenzierbar und h im Punkt $g(x)$, dann gilt

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) \ .$$

Beweis: siehe z.B. Buch von Forster.

Informell: Ableitung von $h(g(x))$ ist äußere mal innere Ableitung

Beispiele:

- Für $f(x) = \exp(-x^2)$ gilt $f'(x) = \exp(-x^2) \cdot (-2x)$.
    - Äußere Ableitung $h'(z) = \exp(z)$ für $h(z) = \exp(z)$
    - Innere Ableitung $g'(w) = -2w$ für $g(w) = -w^2$
- Für $f(x) = (\sin(x))^2$ gilt $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
    - Äußere Ableitung $h'(z) = 2z$ für $h(z) = z^2$
    - Innere Ableitung $g'(w) = \cos(w)$ für $g(w) = \sin(w)$

Differentiation der Umkehrfunktion

Satz (Differentiation der Umkehrfunktion)

Sei $f\colon D \to W$ und sei $g\colon W \to D$ die Umkehrfunktion von f (angenommen, dass diese existiert). Dann gilt

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Beweis.

- Sei h durch $h(x) = g(f(x))$.
- Mit der Kettenregel: $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.
- Da f die Umkehrfunktion von g ist, gilt $h(x) = x$ und daher $h'(x) = 1$.
- Daher $1 = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
- Division durch $f'(x)$ liefert die Behauptung. □

Beispiele

- Für $f(x) = \exp(x)$ und $g(x) = \ln(x)$ gilt $g'(\exp(x)) = \frac{1}{\exp(x)}$, also $g'(z) = \frac{1}{z}$.
- Mit $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ können wir auch die Ableitung allgemeiner Potenzen bestimmen.

  Betrachte x^x. Nach Definition der allgemeinen Potenz gilt $x^x = \exp(x \ln(x))$.

  Die Ableitung $(x^x)'$ kann nun mit Kettenregel und Produktregel bestimmt werden.

$$\begin{aligned}(x^x)' &= (\exp(x \cdot \ln(x)))' = \exp(x \cdot \ln(x)) \cdot (x \ln(x))' \\ &= \exp(x \cdot \ln(x)) \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \tfrac{1}{x}\right) = x^x(\ln(x) + 1)\end{aligned}$$

Beispiele (2)

- Für $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \arcsin(x)$ haben wir $g'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)^2}}$, also $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Für $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = \arccos(x)$ haben wir $g'(\cos(x)) = \frac{-1}{\sin(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos(x)^2}}$, also $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Für $f(x) = \tan(x)$ und $g(x) = \arctan(x)$ haben wir $g'(\tan(x)) = \cos(x)^2 = \frac{1}{1+\tan(x)^2}$, also $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. NR: $\tan(x)^2 = \frac{1-\cos(x)^2}{\cos(x)^2}$, also $\cos(x)^2 = \frac{1}{1+\tan(x)^2}$.

Anwendungsbeispiel

Satz

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Beweis: $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) &= \lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} x\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\\ &= \lim_{h\to 0} x\cdot\frac{\ln(1+h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} x\cdot\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} x\cdot\ln'(1)\\ &= x\end{aligned}$$

Die Formel folgt daraus und aus der Stetigkeit von $\exp$

Anwendungsbeispiel (2)

- Die Formel $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ drückt „stetige Verzinsung“ aus.
- Die jährlichen Zinsen seien x, z.B. $x = 0.03$ (drei Prozent). Das Jahr wird in n Teile zerlegt, z.B. $n = 360$, nach jedem Teil werden die Zinsen berechnet und zum Kapital addiert.
- Es multipliziert sich also mit $1+\frac{x}{n}$, bzw. nach einem Jahr um $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.
- Lässt man die Teile immer kleiner werden, so wird im Grenzwert das Kapital mit e^x multipliziert.

Komplexe Funktionen

Die Definition der Ableitung kann man auch auf Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ übertragen:

$$f'(z) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Dabei ist h eine komplexe Zahl, die betragsmäßig gegen 0 geht.

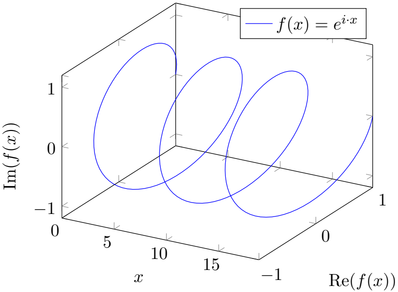
Komplexe Funktionen

Die Definition der Ableitung kann man auch auf Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ übertragen:

$$f'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Dabei ist h eine komplexe Zahl, die betragsmäßig gegen 0 geht.

- Spezialfall $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$: Dann definiert f eine Kurve in der Ebene.
- Zum Beispiel definiert $f(x) = e^{ix}$ den Einheitskreis.
- Die Ableitung $f'(z)$ ist eine komplexe Zahl, die man als Tangentialvektor der Kurve verstehen kann.



Komplexe Funktionen (2)

- Die bisherigen Beispiele zur Differentiation von Funktionen (c, x, x^2, $\exp(x)$, $\ldots$) sind auch im Komplexen korrekt.
- Insbesondere gilt $\exp'(z) = \exp(z)$ auch im Komplexen.
- Für eine komplexe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ schreiben wir $\mathrm{Re} f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im} f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ für die Funktionen, die den Real- bzw. Imaginärteil von f angeben:
  $\mathrm{Re} f(z) := \mathrm{Re}(f(z))$ und $\mathrm{Im} f(z) := \mathrm{Im}(f(z))$
- Es gilt $f(z) = \mathrm{Re} f(z) + i \cdot \mathrm{Im} f(z)$.

Ableitung von Real- und Imaginärteil

Satz

Für $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt $(\mathrm{Re} f)'(z) = \mathrm{Re}(f'(z))$ und $(\mathrm{Im} f)'(z) = \mathrm{Im}(f'(z))$.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{Re}(f(z+h)) + i\cdot \mathrm{Im}(f(z+h)) - (\mathrm{Re}(f(z)) + i\cdot \mathrm{Im}(f(z)))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{Re}(f(z+h)) - \mathrm{Re}(f(z))}{h} + i\cdot \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{Im}(f(z+h)) - \mathrm{Im}(f(z))}{h}\\
&= (\mathrm{Re} f)'(z) + i\cdot (\mathrm{Im} f)'(z)
\end{aligned}
$$

□

Ableitung der trigonometrischen Funktionen

Aus dem Satz ergeben sich alternative Beweise für die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen.

- Setze $f(x) := \exp(ix)$.
- Es gilt $\sin = \mathrm{Im} f$ und $\cos = \mathrm{Re} f$
- Mit der Kettenregel: $f'(x) = i\exp(ix)$
- Damit haben wir:

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= (\mathrm{Im} f)'(x) = \mathrm{Im}(f'(x)) \\ &= \mathrm{Im}(i\exp(ix)) = \mathrm{Re}\exp(ix) = \cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= (\mathrm{Re} f)'(ix) = \mathrm{Re}(f'(ix)) \\ &= \mathrm{Re}(i\exp(ix)) = -\mathrm{Im}\exp(ix) = -\sin(x) \end{aligned}$$

Lokale Extrema

Definition (Lokale Extrema)

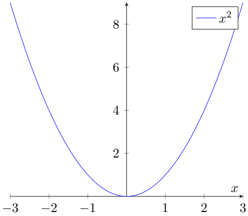
Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Die Funktion f hat in $x \in (a,b)$ ein lokales Maximum (bzw. lokales Minimum), wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass für alle y mit $|x-y| < \varepsilon$ gilt $f(y) \leq f(x)$ (bzw. $f(y) \geq f(x)$).

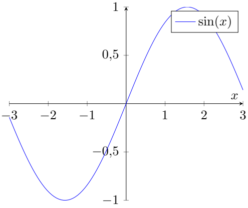
Ist die Ungleichung echt, so spricht man von einem strengen Maximum (bzw. Minimum).

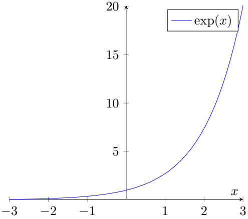
Der Oberbegriff für Maxima und Minima lautet Extremum.

Beispiele

- $f(x) = x^2$ hat bei $x = 0$ ein lokales Minimum.
- $f(x) = \sin(x)$ hat lokale Maxima bei $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ und lokale Minima bei $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
- $f(x) = \exp(x)$ hat keine lokalen Extrema.







Extrema berechnen

Satz 8.18

Hat f ein lokales Extremum in x und ist f differenzierbar in x, dann gilt $f'(x) = 0$.

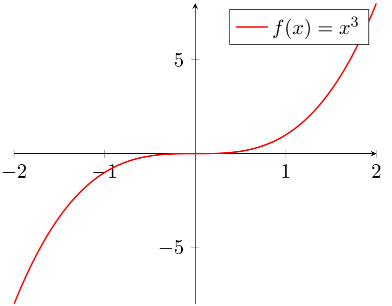
Beweis.

- Wir betrachten den Fall, dass f in x ein lokales Minimum hat.
- Sei ε wie in der Definition des lokalen Minimums.
- Dann gilt $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ für alle $h \in (0, \varepsilon)$ und daraus folgt
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(h)}{h} \geq 0 \ .$$
- Analog gilt $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$ für alle $h \in (-\varepsilon, 0)$. Daraus folgt
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(h)}{h} \leq 0 \ .$$
- Die beiden Grenzwerte müssen aber mit der Ableitung $f'(x)$ übereinstimmen, also muss $f'(x) = 0$ gelten. □

Extrema berechnen (2)

Bemerkungen:

- $f'(x) = 0$ ist eine notwendige Bedingung für ein Extremum, aber keine hinreichende Bedingung, d.h.:
- Die Umkehrung des Satzes gilt nicht, z.B. ist $f'(0) = 0$ für $f(x) = x^3$, aber f hat kein Extremum an der Stelle 0.



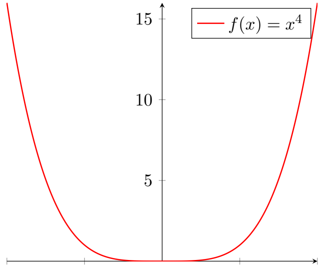
Extrema berechnen (3)

Satz 8.19

Gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, so hat f bei x ein strenges lokales Minimum. Ist $f''(x) < 0$, so hat f bei x ein strenges lokales Maximum.

Der Beweis folgt später.

Bemerkung: Der Satz liefert ein hinreichendes (aber nicht notwendiges!) Kriterium für ein Extremum, z.B. hat $f(x) = x^4$ an Stelle 0 ein Minimum, aber $f''(x) = 12x^2$ und daher $f(0) = 0$.



Ein Hilfssatz

Satz 8.20

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es $c \in [a, b]$ sodass $f(c) \geq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

„Eine stetige Funktion ist auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ *stets nach oben beschränkt und nimmt ihr Maximum an"*

Bemerkung: Für das Minimum gilt ein analoger Satz.

Ein Hilfssatz (2)

Satz 8.20

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es $c \in [a,b]$ sodass $f(c) \geq f(x)$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

Beweisskizze

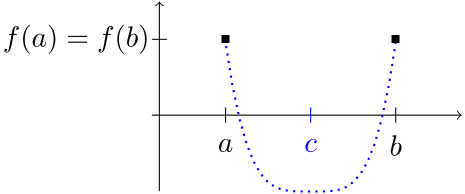
- f ist im Intervall $[a,b]$ nach oben beschränkt, denn sonst:
  - Es gibt Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_i \in [a,b]$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$
  - Die Folge (x_n) ist beschränkt (da $a \leq x_i \leq b$). Satz von Bolzano-Weierstrasss: Durch Weglassen von Elementen kann man $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu einer konvergenten Teilfolge $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ machen
  - Mit $x := \lim_{n\to\infty} x_{k_n}$ folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x)$, da f stetig.
  - Dann kann aber nicht $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ gelten.
  - Also muss f im Intervall $[a,b]$ nach oben beschränkt sein.
- Mit ähnlichem Argument: Das Supremum der Funktionswerte von f im Intervall $[a,b]$ wird in einem Punkt c angenommen. $\square$

Satz von Michel Rolle

Satz von Rolle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Sei f im Intervall (a,b) differenzierbar. Dann gibt es $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = 0$.

Veranschaulichung:



Satz von Michel Rolle (2)

Satz von Rolle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Sei f im Intervall (a,b) differenzierbar. Dann gibt es $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = 0$.

Beweis.

- Wenn f konstant ist, dann ist die Aussage klar.
- Sonst hat f nach Satz 8.20 (und dem analogen Satz für Minima) ein lokales Maximum oder Minimum (oder beides).
- Ein solches Extremum wird in (mindestens) einem Punkt c auch angenommen.
- Mit Satz 8.18 folgt $f'(c) = 0$. $\square$

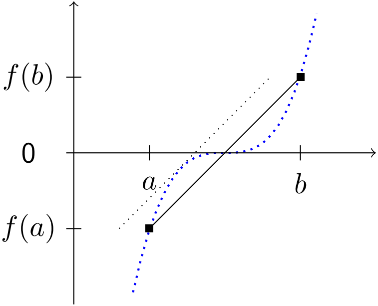
Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Intervall (a,b) differenzierbar. Dann gibt es $c \in (a,b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad .$$

Veranschaulichung



An einem Punkt in (a,b) entspricht die Steigung gerade der Steigung der Sekanten durch a und b.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung (2)

Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Intervall (a,b) differenzierbar. Dann gibt es $c \in (a,b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad .$$

Beweis. Definiere $g(x) := f(x) - f(a) - (x - a) \cdot \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Es gilt $g(a) = g(b) = 0$. Nach dem Satz von Rolle gibt es $c \in (a,b)$ mit $g'(c) = 0$. Nach den Rechenregeln für Ableitungen folgt aber

$g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, woraus mit $g'(c) = 0$ die Aussage folgt.

Konsequenzen des Mittelwertsatzes

Satz 8.23

Ist I ein Intervall und $f\colon I \to W$ differenzierbar und gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist f konstant, d.h. es gilt $f(x) = c$ für ein $c \in W$ und alle $x \in I$.

Beweis.

- Seien $a, b \in I$ mit $a \neq b$.
- Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es $x \in I$ mit $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) = 0$, also $f(a) = f(b)$.
- Es gilt daher, $f(x) = c$ für $c := f(a)$ für beliebig gewähltes $a \in I$. □

Konsequenzen des Mittelwertsatzes (2)

Satz

Ist I ein Intervall und $f\colon I \to W$ differenzierbar und gilt $f'(x) = af(x)$ für alle $x \in I$, so existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = c \cdot \exp(ax)$.

Beweis.

- Betrachte $g(x) := f(x)\exp(-ax)$.
- Es gilt $g'(x) = f'(x)\exp(-ax) - af(x)\exp(-ax) = 0$ nach Annahme an f.
- Also ist $g(x)$ konstant und die Behauptung folgt. □

Monotonie

Satz 8.25

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Intervall (a,b) differenzierbar. Dann gilt:

- f ist in $[a,b]$ monoton wachsend wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$.
- f ist in $[a,b]$ streng monoton steigend wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$.
- f ist in $[a,b]$ monoton fallend wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$.
- f ist in $[a,b]$ streng monoton fallend wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$.

Beweis. Wir betrachten den ersten Punkt. Sei $a \leq x < y \leq b$. Wir müssen $f(x) \leq f(y)$ zeigen. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es c mit $x < c < y$ sodass $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Daraus folgt $f(y) = f(x) + f'(c) \cdot (y-x)$. Nach Annahme gilt $f'(c) \geq 0$ sowie $y > x$, also ist $f'(c) \cdot (y-x) \geq 0$. Es folgt $f(y) \geq f(x)$, wie gewünscht. □

Beweis von Satz 8.19

Satz 8.19

Gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, so hat f bei x ein strenges lokales Minimum. Ist $f''(x) < 0$, so hat f bei x ein strenges lokales Maximum.

Beweis.

- Wir betrachten den Fall für ein lokales Minimum.
- Da $f''(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$ folgt aus $f''(x) > 0$: Es gibt $\varepsilon > 0$ sodass $\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} > 0$ für alle h mit $|h| < \varepsilon$.
- Da $f'(x) = 0$, folgt daraus $\frac{f'(x+h)}{h} > 0$ für alle h mit $|h| < \varepsilon$.
- Für $h \in (0, \varepsilon)$ folgt daher $f'(x+h) > 0$
- Für $h \in (-\varepsilon, 0)$ folgt daher $f'(x+h) < 0$
- Mit Satz 8.25 folgt, dass f „links von x“ streng monoton fallend ist und „rechts von x“ streng monoton steigend. Dann liegt aber ein strenges lokales Minimum vor. □

Regeln von l'Hospital

Satz (Regeln von l'Hospital)

Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$, seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und sei entweder $x_0 = a$ oder $x_0 = b$. Es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.

Unter diesen Annahmen gilt:

Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \in \{0, \infty\}$, dann $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweisskizze.

- Wir skizzieren nur den Fall mit $x_0 = b \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, in dem f' und g' auch noch stetig sind.
- Da $f(x_0) := 0$ und $g(x_0) := 0$ können wir f und g als stetige Funktionen mit Definitionbereich $(a,b]$ auffassen.
- ...

Regeln von l'Hospital: Beweis Forts.

- Für alle $x \in (a, x_0)$ gibt es dann nach dem Mittelwertsatz jeweils $u \in (x, x_0)$ und $v \in (x, x_0)$ mit

$$f'(u) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \quad \text{und} \quad g'(v) = \frac{g(x_0) - g(x)}{x_0 - x} \ .$$

- Nach Annahme ist g' im ganzen Intervall (x, x_0) ungleich 0. Also können wir $f'(u)$ durch $g'(v)$ teilen und erhalten

$$\frac{f'(u)}{g'(v)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \ ,$$

- Wenn wir jetzt x gegen x_0 gehen lassen, dann gehen auch die entsprechenden u und v gegen x_0, da diese im Intervall (x, x_0) liegen. Damit erhält man dann

$$\frac{\lim_{u \to x_0} f'(u)}{\lim_{v \to x_0} g'(v)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x_0) - f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x_0) - g(x)} \ .$$

Regeln von l'Hospital: Beweis Forts. (2)

- Wir haben oben $f(x_0) = g(x_0) = 0$ gesetzt, also folgt mit den Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$\square$

Beispiele

- Grenzwert vom Typ $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} =?$$

Beispiele

- Grenzwert vom Typ $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)}{1} = 1$$

Beispiele

- Grenzwert vom Typ $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)}{1} = 1$$

- Grenzwerte vom Typ $0 \cdot \infty$ können auf den Typ $\frac{\infty}{\infty}$ reduziert werden:

$$\lim_{x\to 0} x \ln(x) = -\lim_{x\to 0} \frac{-\ln(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = -\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{-1}{x}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = -\lim_{x\to 0} x = 0$$

Beispiele

- Grenzwert vom Typ $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)}{1} = 1$$

- Grenzwerte vom Typ $0 \cdot \infty$ können auf den Typ $\frac{\infty}{\infty}$ reduziert werden:

$$\lim_{x\to 0} x \ln(x) = -\lim_{x\to 0} \frac{-\ln(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = -\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{-1}{x}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = -\lim_{x\to 0} x = 0$$

- Grenzwerte vom Typ 0^0 können auf den Typ $\frac{\infty}{\infty}$ reduziert werden:

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} \exp(x \cdot \ln(x)) = \exp\left(-\lim_{x\to 0} \frac{-\ln(x)}{\frac{1}{x}}\right) = \exp(0) = 1$$

Beispiele (2)

Manchmal ist es hilfreich, die l'Hospitalschen Regeln mehrfach nacheinander anzuwenden.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{2} = \infty$$

Umformungen: Übersicht

- Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) =$ “$0 \cdot \infty$” dann verwende:
  $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}$ oder $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} \cdot g(x)$

- Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - g(x) =$ “$\infty - \infty$”, dann verwende:
  $$\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

- Wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} =$ “0^0” oder “∞^0” oder “1^∞”, dann verwende:
  $$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \exp(g(x) \cdot \ln(f(x)))$$

Bemerkung

Achtung: Damit die Regel von L'Hospital anwendbar ist, **muss** eine der sogenannten unbestimmten Formen, also $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{-\infty}{-\infty}$ vorliegen.

Zum Beispiel gilt

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1+x} \neq \lim_{x \to 0} \frac{1}{1} = 1 \ .$$