LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Grundlagen der Analysis
Wintersemester 2019/20

Komplexe Zahlen

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 11. Dezember 2019

Motivation zur Betrachtung der Komplexen Zahlen

Wesentliche Motivation ist:

Definition und Verständnis der trigonometrischen
Funktionen ($\sin$, $\cos$)
und ihrer Beziehung zur Exponentialfunktion $\exp$.

Definition durch Hinzunahme der Wurzel aus -1

Man erhält die komplexen Zahlen, indem man zu den reellen Zahlen die **imaginäre Einheit** i hinzunimmt, die dem Gesetz $i^2 = -1$ genügt.
Danach rechnet man „ganz normal“ mit den Rechenregeln und dem Gesetz $i^2 = -1$ weiter.

Bemerkungen

- Man kann nicht „einfach so“ Zahlen dazu nehmen. Käme z.B. jemand auf die Idee, eine Zahl j einzuführen, sodass $j = \frac{1}{0}$, so hätte man $0 \cdot j = 1$, also $0 = 1 \cdot j - 1 \cdot j = (1-1) \cdot j = 0 \cdot j = 1$, ein Widerspruch.
- Im Falle der Wurzel aus -1 ist diese Hinzunahme von i aber widerspruchsfrei möglich.
- $\mathbb{C}$ ist die einzige endliche Erweiterung von $\mathbb{R}$, sodass die Körperaxiome weiter gelten
- Beachte: Die Anordnungsaxiome gelten nicht mehr. Z.B. $x^2 > 0$ gilt nicht mehr, da $i^2 = -1 < 0$.

Komplexe Zahlen

Jede komplexe Zahl hat die Form

$$a + i \cdot b \text{ für } a, b \in \mathbb{R}$$

denn jeder Rechenausdruck mit komplexen Zahlen lässt sich mithilfe der folgenden Rechenregeln auf dieses Format bringen.

- Ist $z = a + i \cdot b$, so heisst
  - a Realteil von z und
  - b Imaginärteil von z.
- Man schreibt $a = \mathrm{Re}(z)$ und $b = \mathrm{Im}(z)$.
- Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Rechenregeln

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot (c + di) &= ac + (ad + bc) \cdot i + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \text{ wegen } i^2 = -1 \end{aligned}$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$\begin{aligned} \frac{(a + bi)}{(c + di)} &= \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} \\ &= \frac{1}{(c^2 + d^2)} \cdot (ac + bd + (bc - ad)i) \end{aligned}$$

Konjugation

Definition

Die **Konjugierte** von $z \in \mathbb{C}$ ist die komplexe Zahl
$\overline{z} := \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) \cdot i$.

Es ist $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.

Der Division komplexer Zahlen liegt also das Erweitern mit der Konjugierten des Nenners zugrunde:

$$\frac{w}{z} = \frac{w\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{|z|^2} \cdot w \cdot \overline{z}.$$

Durch Erweitern mit der Konjugierten des Nenners wird der Nenner reell.

Beispiele: Division komplexer Zahlen

- $$\frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)\cdot(1+2i)}{(1-2i)\cdot(1+2i)} = \frac{(2+4i+i+2i^2}{(1^2-(2i)^2)} = \frac{5i}{5} = i$$

- $$\frac{3+2i}{6+3i} = \frac{(3+2i)(6-3i)}{(6+3i)(6-3i)} = \frac{18-9i+12i-6i^2}{36+9} = \frac{18+3i+6}{45}$$
$$= \frac{24+3i}{45} = \frac{24}{45} + \frac{3}{45}i = \frac{8}{15} + \frac{1}{15}i$$

Betrag

Definition

Man definiert den **Betrag** $|z| \in \mathbb{R}^+$ einer komplexen Zahl z durch

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Für $z = a + bi$:

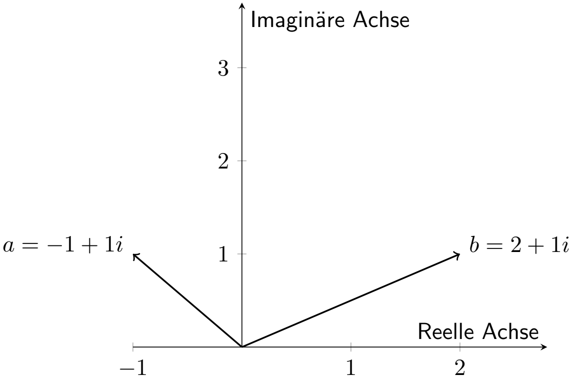
$$\begin{aligned} \sqrt{z\overline{z}} &= \sqrt{(a+bi)\cdot(a-bi)} = \sqrt{a^2 - b^2 i^2} = \sqrt{a^2 - b^2(-1)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$|w + z| \leq |w| + |z| \quad \text{(Dreiecksungleichung)}$$
$$|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$$

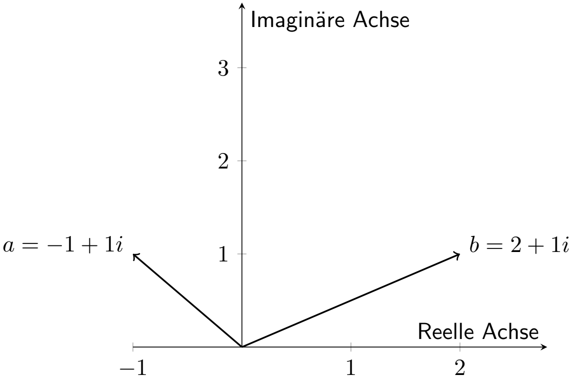
Komplexe Zahlenebene: Geometrische Veranschaulichung

Ortsvektoren in der Ebene
(Realteil $=$ x-Koordinate, Imaginärteil $=$ y-Koordinate).



Komplexe Zahlenebene: Geometrische Veranschaulichung

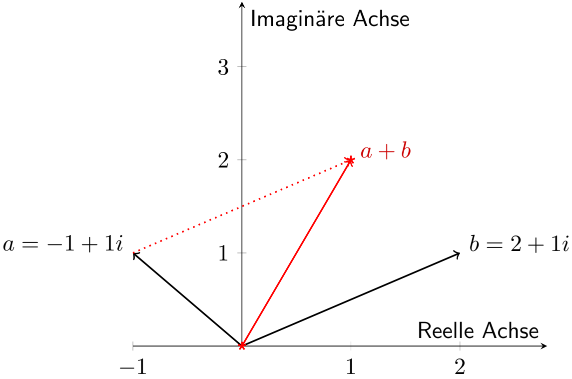
Ortsvektoren in der Ebene
(Realteil $=$ x-Koordinate, Imaginärteil $=$ y-Koordinate).



- Länge der Vektoren entspricht dem Betrag.

Komplexe Zahlenebene: Geometrische Veranschaulichung

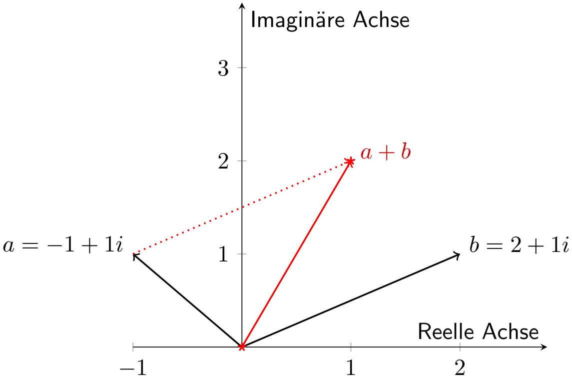
Ortsvektoren in der Ebene
(Realteil $=$ x-Koordinate, Imaginärteil $=$ y-Koordinate).



- Länge der Vektoren entspricht dem Betrag.
- Addition entspricht Vektoraddition

Komplexe Zahlenebene: Geometrische Veranschaulichung

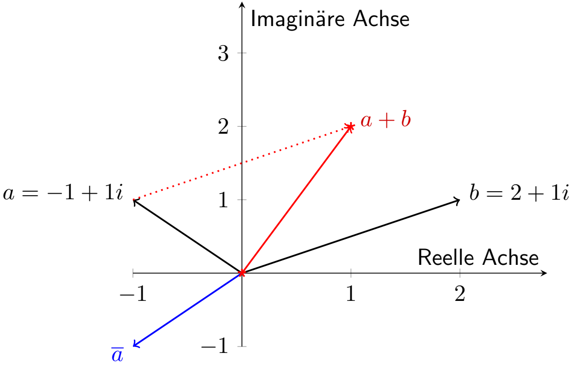
Ortsvektoren in der Ebene
(Realteil $=$ x-Koordinate, Imaginärteil $=$ y-Koordinate).



- Länge der Vektoren entspricht dem Betrag.
- Addition entspricht Vektoraddition
- Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$ Dreiecke vorhanden

Komplexe Zahlenebene: Geometrische Veranschaulichung

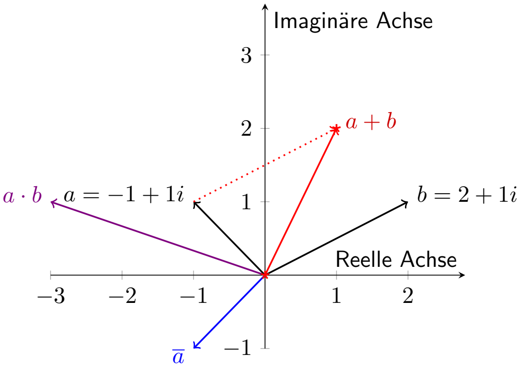
Ortsvektoren in der Ebene
(Realteil $=$ x-Koordinate, Imaginärteil $=$ y-Koordinate).



- Länge der Vektoren entspricht dem Betrag.
- Addition entspricht Vektoraddition
- Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$ Dreiecke vorhanden
- Konjugierte: Spiegelung an der reellen Achse

Komplexe Zahlenebene: Geometrische Veranschaulichung

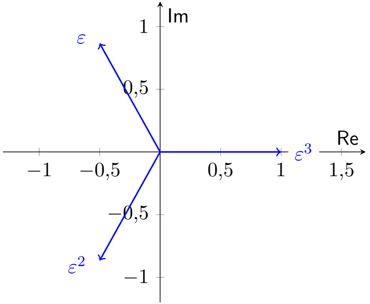
Ortsvektoren in der Ebene
(Realteil $= x$-Koordinate, Imaginärteil $= y$-Koordinate).



- Länge der Vektoren entspricht dem Betrag.
- Addition entspricht Vektoraddition
- Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$ Dreiecke vorhanden
- Konjugierte: Spiegelung an der reellen Achse

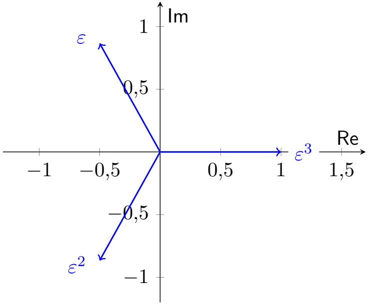
- Multiplikation entspricht „stretch and turn“: die Längen (Beträge) der zu multiplizierenden Vektoren werden multipliziert, die Winkel der Vektoren, gemessen von der x-Achse entgegen dem Uhrzeigersinn, werden *addiert*.

Einheitswurzeln



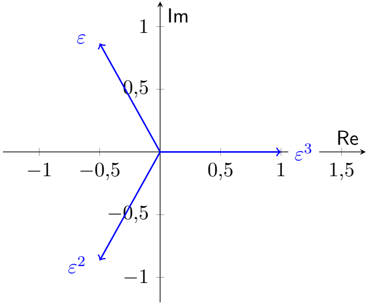
- Sei ε die komplexe Zahl mit Betrag 1 und Winkel 120 Grad, d.h. $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$, so ist $\varepsilon^2 = \overline{\varepsilon}$ und $\varepsilon^3 = 1$.

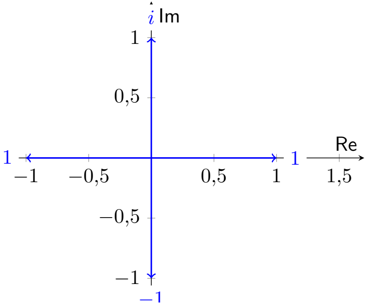
Einheitswurzeln



- Sei ε die komplexe Zahl mit Betrag 1 und Winkel 120 Grad, d.h. $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$, so ist $\varepsilon^2 = \overline{\varepsilon}$ und $\varepsilon^3 = 1$.
- ε ist eine primitive dritte Einheitswurzel („Wurzel aus Eins“).
- Primitiv: alle drei dritten Einheitswurzeln, 1, ε und $\overline{\varepsilon}$ sind Potenzen von ε. Auch $\overline{\varepsilon}$ ist primitiv, denn $\overline{\varepsilon}^2 = \varepsilon$ und $\overline{\varepsilon}^3 = 1$.

Einheitswurzeln





- Sei ε die komplexe Zahl mit Betrag 1 und Winkel 120 Grad, d.h. $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$, so ist $\varepsilon^2 = \overline{\varepsilon}$ und $\varepsilon^3 = 1$.
- ε ist eine primitive dritte Einheitswurzel („Wurzel aus Eins“).
- Primitiv: alle drei dritten Einheitswurzeln, 1, ε und $\overline{\varepsilon}$ sind Potenzen von ε. Auch $\overline{\varepsilon}$ ist primitiv, denn $\overline{\varepsilon}^2 = \varepsilon$ und $\overline{\varepsilon}^3 = 1$.
- $1, i, -1, -i$ sind vierte Einheitswurzeln, i und $-i$ sind sogar primitiv.
- Einheitswurzeln spielen bedeutende Rolle bei der sog. diskreten Fouriertransformation (Hilfsmittel der Signalverarbeitung)

Komplexe Nullstellen von Polynomen (1)

- In $\mathbb{C}$ hat jede nichttriviale quadratische Gleichung eine Lösung, z.B. $x^2 - 2x + 5 = 0$ hat die Lösungen $x_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{(\frac{-2}{2})^2 - 5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$.
- Es gilt sogar, dass jedes nichtkonstante Polynom eine Nullstelle in den komplexen Zahlen hat („**Fundamentalsatz der Algebra**“).

Komplexe Nullstellen von Polynomen (2)

- Wenn man eine Nullstelle gefunden hat, kann man durch rausdividieren, die nächste bestimmen usw.
- Ein Polynom hat so viele Nullstellen wie der Grad des Polynoms.
- Z.B. hat $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = (x^2 - 2x + 5) \cdot (x - 1)$ die reelle Nullstelle 1 und zwei komplexe Nullstellen, nämlich $1 + 2i$ und $1 - 2i$.
- Da $(\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w})$ gilt, folgt: wenn z Nullstelle eines Polynoms $P(x)$ ist, dann ist auch die Konjugierte $\overline{z}$ eine Nullstelle von $P(x)$.

Konvergenz im Komplexen

- Konvergenz von Folgen und Grenzwerte von Funktionen werden im Komplexen genauso wie im Reellen definiert.
- An die Stelle des Absolutbetrages tritt hier der Betrag der komplexen Zahlen.
- Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen konvergiert gegen $b \in \mathbb{C}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n > N$ gilt $|a_n - b| < \varepsilon$.
- Die Konvergenzkriterien für Reihen und bereits hergeleitete Summenformeln gelten sinngemäß fort.

Beispiel: Geometrische Reihe im Komplexen

Sei $z := \frac{1}{(1+i)} = \frac{1}{2} \cdot (1-i)$. Es gilt $|z| = \frac{1}{2} < 1$, also ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(1+i)} \right)^k = \frac{1}{1-z} = \frac{2}{(1+i)} = 1 - i \quad .$$

Komplexe Exponentialfunktion

Man erweitert die Exponentialfunktion $\exp(x)$ auf die komplexen Zahlen, indem man die Reihe auf komplexen Zahlen auffasst.

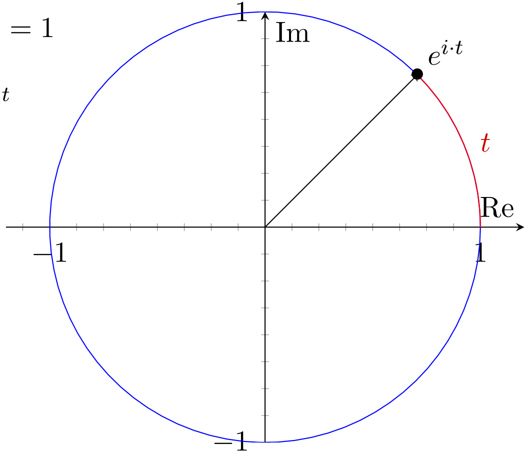
$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Es gilt dann weiterhin $\exp(w + z) = \exp(w) \cdot \exp(z)$, selbst wenn w und z komplex sind.

Komplexe Exponentialfunktion (2)

Es gilt

- $e^{\overline{z}} = \overline{e^{z}}$ (s. Forster)
- $$\begin{aligned} |e^{i\cdot t}|^2 &= e^{i\cdot t}\cdot \overline{e^{i\cdot t}} \\ &= e^{i\cdot t}\cdot e^{\overline{i\cdot t}} \\ &= e^{i\cdot t - i\cdot t} = e^0 = 1 \end{aligned}$$ (da $|z| = \sqrt{z\cdot\overline{z}}$)
- Daraus folgt $|e^{i\cdot t}| = 1$, d.h. für jedes t liegt $e^{i\cdot t}$ auf dem Einheitskreis



Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen $\sin$ und $\cos$ werden für $t \in \mathbb{R}$ definiert als:

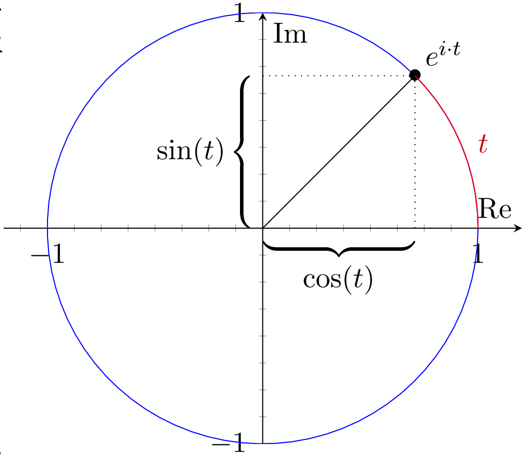
$$\begin{aligned}\sin(t) &= \mathrm{Im}(\exp(i \cdot t))\\ \cos(t) &= \mathrm{Re}(\exp(i \cdot t))\end{aligned}$$

Es gilt die **Eulersche Formel**

$\exp(i \cdot t) = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$

Weiterhin folgt

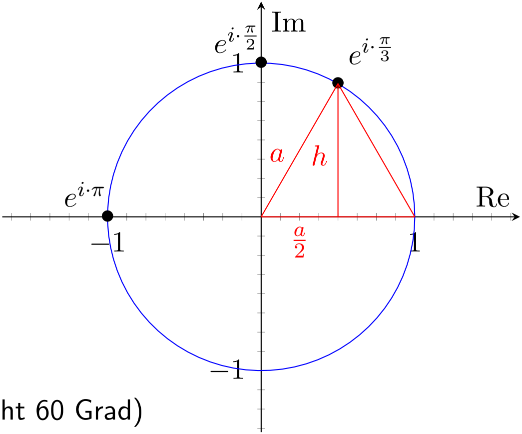
$$e^{(a+bi)} = e^a \cdot (\cos(b) + i \cdot \sin(b)).$$



Trigonometrische Funktionen (2)

Spezielle Werte: (mit π = Umfang / Durchmesser eines Kreises)

$$\sin(0) = 0$$
$$\cos(0) = 1$$
$$\sin(\pi) = 0$$
$$\cos(\pi) = -1$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1/2 \cdot \sqrt{3}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1/2 \qquad \text{(}\frac{\pi}{3}\text{ entspricht 60 Grad)}$$



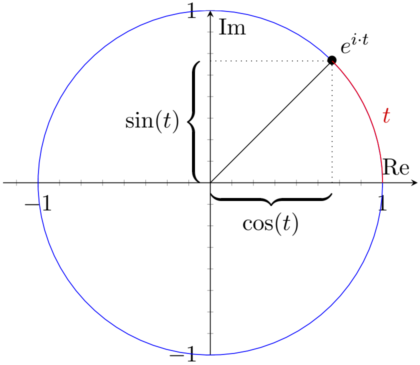
Für $\frac{\pi}{3}$ betrachte das halbe gleichseitige Dreieck:

Es gilt $a^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2$ mit $a = 1$

Eulersche Formel

Für den speziellen Wert $x = \pi$ ergibt sich aus der Eulerschen Formel $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$ die berühmte Formel

$$e^{i\pi} = -1 \text{und ebenso } e^{2\pi i} = 1.$$

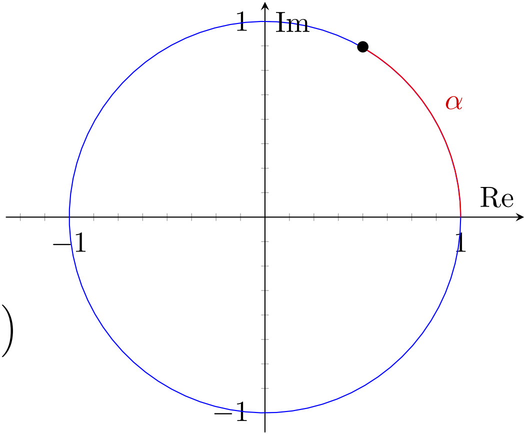


Trigonometrische Funktionen (3)

Gleichungen
(gelten für alle $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$$
$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$$



Trigonometrische Funktionen (4)

Satz (Additionstheoreme)

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Trigonometrische Funktionen (4)

Satz (Additionstheoreme)

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Beweis. Die Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion zeigt

$$e^{i(x+y)} = e^{ix+iy} = e^{ix} \cdot e^{iy} \qquad (\dagger)$$

Trigonometrische Funktionen (4)

Satz (Additionstheoreme)

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

Beweis. Die Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion zeigt

$$e^{i(x+y)} = e^{ix+iy} = e^{ix} \cdot e^{iy} \tag{†}$$

Mit der Eulerschen Formel (E.F.)

$$\begin{aligned}&\cos(x+y)+i\sin(x+y)\\ \overset{E.F.}{=}\ &\exp(i(x+y)) \overset{(\dagger)}{=} \exp(ix)\cdot\exp(iy)\\ \overset{E.F.}{=}\ &(\cos(x)+i\sin(x))\cdot(\cos(y)+i\sin(y))\\ =\ &(\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y))+i(\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)).\end{aligned}$$

Der Satz folgt durch Vergleich von Real- und Imaginärteil. □

Reihenentwicklungen für $\sin$ und $\cos$

Satz 7.4

Es gelten folgende Reihenentwicklungen (für $x \in \mathbb{R}$):

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Reihenentwicklungen für $\sin$ und $\cos$

Satz 7.4

Es gelten folgende Reihenentwicklungen (für $x \in \mathbb{R}$):

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Beweis.

- Nach Definition $\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!}$.
- Es gilt $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ usw.
- Glieder mit geradem (ungeradem) Index sind alle reell (imaginär)
- Der Realteil von $\exp(ix)$ lässt sich dann schreiben als:
  $$\frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$
- Der Imaginärteil von $\exp(ix)$ lässt sich schreiben als:
  $$\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

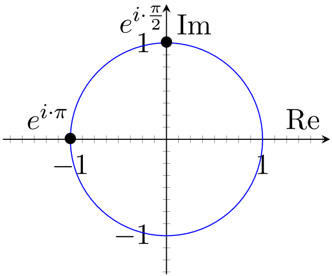
$\square$

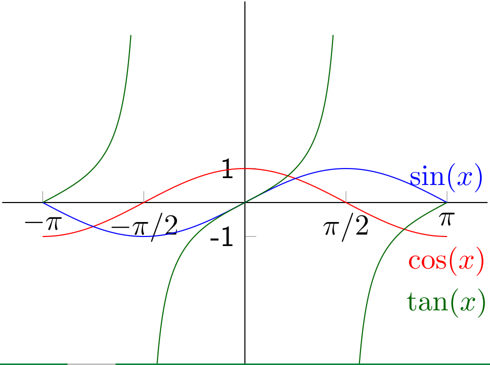
Tangens

Tangens-Funktion

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

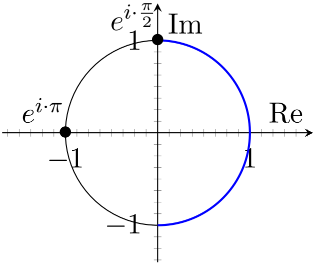
- ist an den Nullstellen von $\cos(x)$ undefiniert, d.h. an den Punkten $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{N}$.

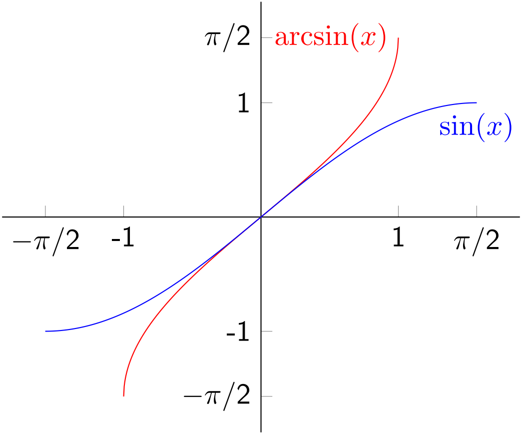




Trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen

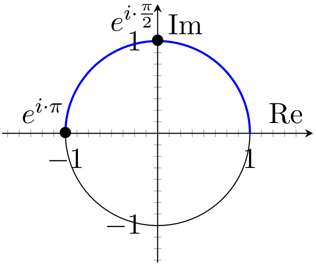
Die Funktion $\sin$ ist im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton steigend und nimmt alle Werte aus $[-1, 1]$ an.
Eingeschränkt auf dieses Intervall hat $\sin$ also eine Umkehrfunktion, die Arcussinus genannt wird $\arcsin\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

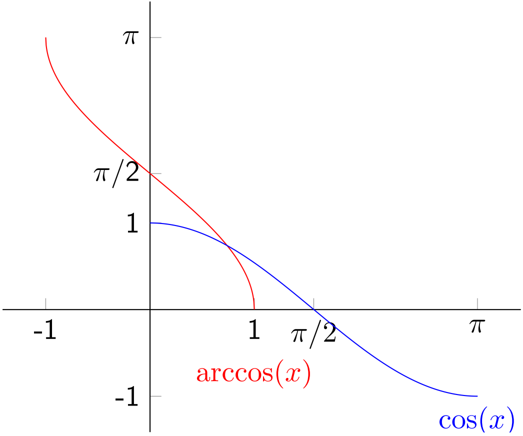




Trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen (2)

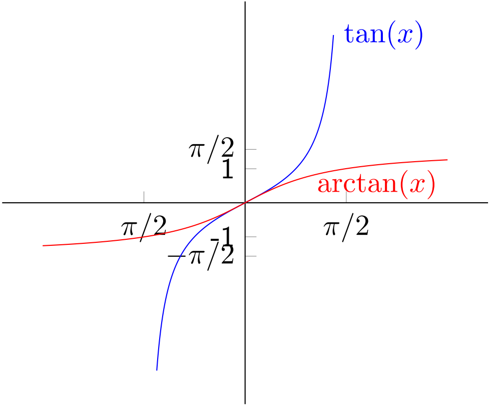
Analog ist $\cos$ im Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend und nimmt alle Werte aus $[-1, 1]$ an.
Eingeschränkt auf dieses Intervall hat $\cos$ eine Umkehrfunktion, die Arcuscosinus genannt wird $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$.





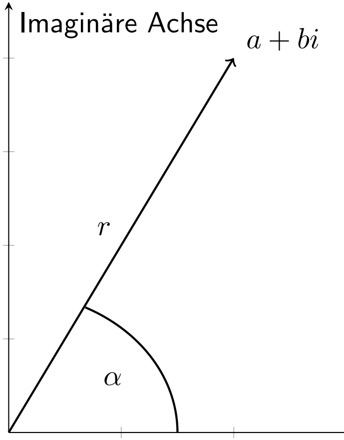
Trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen (3)

Die Tangensfunktion ist im offenen Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton wachsend und nimmt alle Werte aus $\mathbb{R}$ an.
Ihre Umkehrfunktion wird $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ genannt.



Polarkoordinaten

Jede komplexe Zahl $z = a + bi$ kann in der Form $r \cdot e^{i \cdot \alpha}$ geschrieben werden, wobei $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und α der Winkel des Ortsvektors (a, b) ist.



$a = \cos(\alpha) \quad b = \sin(\alpha) \quad \frac{b}{a} = \tan(\alpha)$

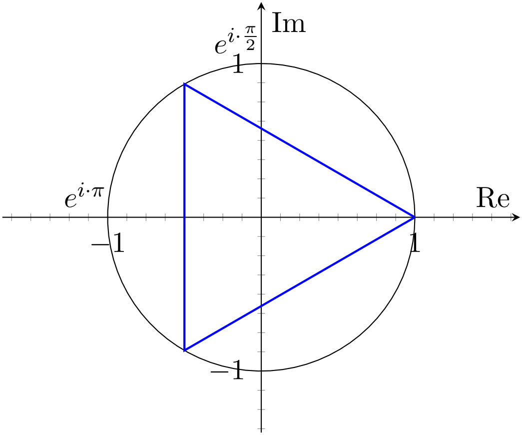
Für $(a, b) \neq (0, 0)$ gilt:

$$\alpha = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}) & \text{falls } a > 0, b \geq 0 \\ \pi - \arctan(\frac{b}{a}) & \text{falls } a < 0 \\ 2\pi + \arctan(\frac{b}{a}) & \text{falls } a > 0, b < 0 \\ \pi/2 & \text{falls } a = 0, b > 0 \\ 3\pi/2 & \text{falls } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

In vielen Programmiersprachen gibt es die Funktion `atan2`, die direkt α aus b und a berechnet.

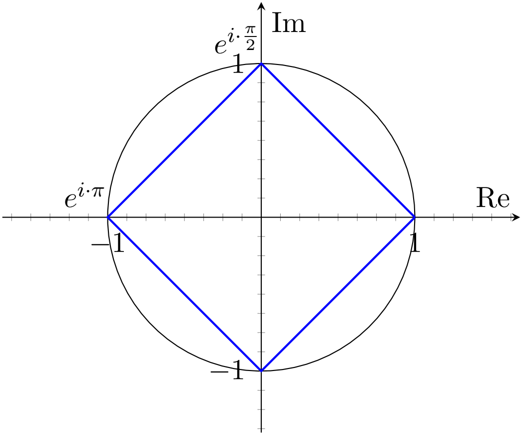
Anwendung: Darstellung der n-ten Einheitswurzel

- Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Die Gleichung $z^n = 1$ hat genau n komplexe Lösungen. nämlich $z = w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
- Die Vektoren $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ beschreiben die Punkte eines regelmäßigen n-Ecks im Einheitskreis.



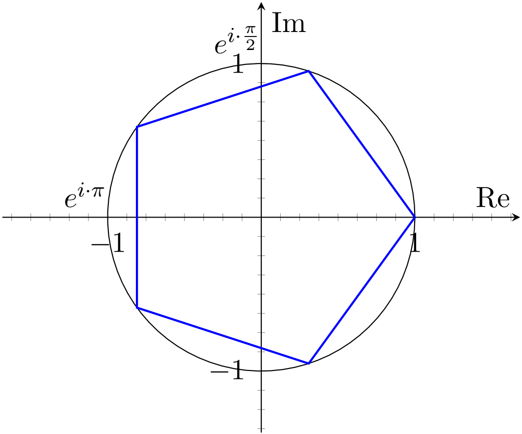
Anwendung: Darstellung der n-ten Einheitswurzel

- Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Die Gleichung $z^n = 1$ hat genau n komplexe Lösungen. nämlich $z = w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
- Die Vektoren $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ beschreiben die Punkte eines regelmäßigen n-Ecks im Einheitskreis.



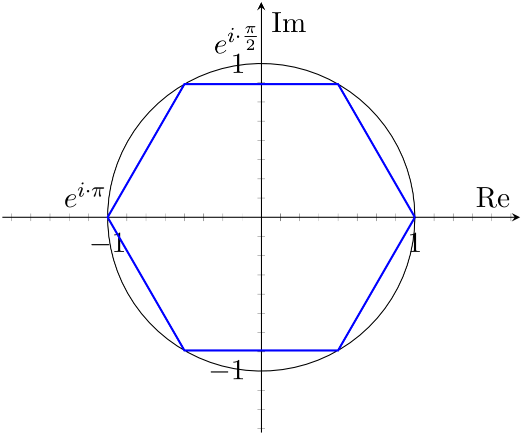
Anwendung: Darstellung der n-ten Einheitswurzel

- Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Die Gleichung $z^n = 1$ hat genau n komplexe Lösungen. nämlich $z = w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
- Die Vektoren $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ beschreiben die Punkte eines regelmäßigen n-Ecks im Einheitskreis.



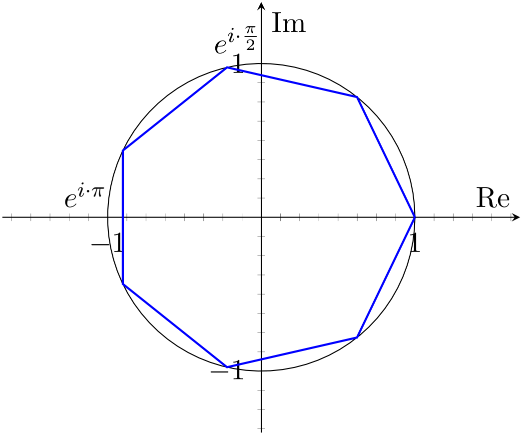
Anwendung: Darstellung der n-ten Einheitswurzel

- Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Die Gleichung $z^n = 1$ hat genau n komplexe Lösungen. nämlich $z = w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
- Die Vektoren $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ beschreiben die Punkte eines regelmäßigen n-Ecks im Einheitskreis.



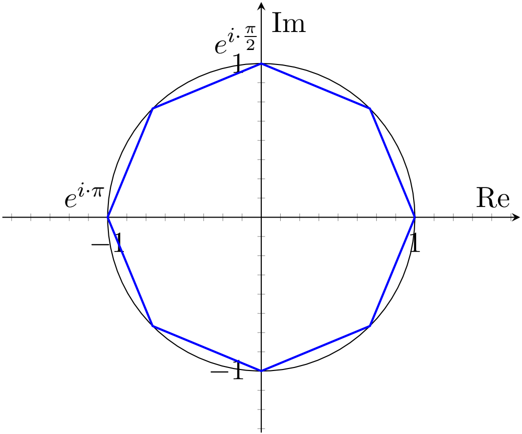
Anwendung: Darstellung der n-ten Einheitswurzel

- Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Die Gleichung $z^n = 1$ hat genau n komplexe Lösungen. nämlich $z = w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
- Die Vektoren $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ beschreiben die Punkte eines regelmäßigen n-Ecks im Einheitskreis.



Anwendung: Darstellung der n-ten Einheitswurzel

- Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Die Gleichung $z^n = 1$ hat genau n komplexe Lösungen. nämlich $z = w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
- Die Vektoren $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ beschreiben die Punkte eines regelmäßigen n-Ecks im Einheitskreis.



Komplexe Potenzen

Für reelles $a > 0$ und komplexes z definiert man

$$a^z := \exp(z \cdot \ln(a))$$

- Es gilt dann $a^{w+z} = a^w \cdot a^z$.
- Potenzen mit komplexen Basen sind ebenso wie solche mit negativen Basen nach wie vor nur für ganzzahlige Exponenten erklärt.
- Z.B. gäbe es für die Definition von $(-1)^{0.5}$ zwei verschiedene Möglichkeiten, nämlich i und $-i$.