

Komplexe Zahlen

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik



Letzte Änderung der Folien: 11. Dezember 2019

Definition durch Hinzunahme der Wurzel aus -1

Man erhält die komplexen Zahlen, indem man zu den reellen Zahlen die **imaginäre Einheit** i hinzunimmt, die dem Gesetz $i^2 = -1$ genügt.

Danach rechnet man „ganz normal“ mit den Rechenregeln und dem Gesetz $i^2 = -1$ weiter.

Motivation zur Betrachtung der Komplexen Zahlen

Wesentliche Motivation ist:

Definition und Verständnis der trigonometrischen Funktionen (\sin , \cos)
und ihrer Beziehung zur Exponentialfunktion \exp .

Bemerkungen

- Man kann nicht „einfach so“ Zahlen dazu nehmen. Käme z.B. jemand auf die Idee, eine Zahl j einzuführen, sodass $j = \frac{1}{0}$, so hätte man $0 \cdot j = 1$, also $0 = 1 \cdot j - 1 \cdot j = (1 - 1) \cdot j = 0 \cdot j = 1$, ein Widerspruch.
- Im Falle der Wurzel aus -1 ist diese Hinzunahme von i aber widerspruchsfrei möglich.
- \mathbb{C} ist die einzige endliche Erweiterung von \mathbb{R} , sodass die Körperaxiome weiter gelten
- Beachte: Die Anordnungsaxiome gelten nicht mehr. Z.B. $x^2 > 0$ gilt nicht mehr, da $i^2 = -1 < 0$.

Jede komplexe Zahl hat die Form

$$a + i \cdot b \text{ für } a, b \in \mathbb{R}$$

denn jeder Rechenausdruck mit komplexen Zahlen lässt sich mithilfe der folgenden Rechenregeln auf dieses Format bringen.

- Ist $z = a + i \cdot b$, so heisst
 - a Realteil von z und
 - b Imaginärteil von z .
- Man schreibt $a = \operatorname{Re}(z)$ und $b = \operatorname{Im}(z)$.
- Die Menge der komplexen Zahlen wird mit \mathbb{C} bezeichnet.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= ac + (ad + bc) \cdot i + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \text{ wegen } i^2 = -1\end{aligned}$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$\begin{aligned}\frac{(a + bi)}{(c + di)} &= \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} \\ &= \frac{1}{(c^2 + d^2)} \cdot (ac + bd + (bc - ad)i)\end{aligned}$$

Definition

Die **Konjugierte** von $z \in \mathbb{C}$ ist die komplexe Zahl

$$\bar{z} := \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) \cdot i.$$

Es ist $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$.

Der Division komplexer Zahlen liegt also das Erweitern mit der Konjugierten des Nenners zugrunde:

$$\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2} \cdot w \cdot \bar{z}.$$

Durch Erweitern mit der Konjugierten des Nenners wird der Nenner reell.

$$\bullet \frac{2 + i}{1 - 2i} = \frac{(2 + i) \cdot (1 + 2i)}{(1 - 2i) \cdot (1 + 2i)} = \frac{(2 + 4i + i + 2i^2)}{(1^2 - (2i)^2)} = \frac{5i}{5} = i$$

$$\begin{aligned}\bullet \frac{3 + 2i}{6 + 3i} &= \frac{(3 + 2i)(6 - 3i)}{(6 + 3i)(6 - 3i)} = \frac{18 - 9i + 12i - 6i^2}{36 + 9} = \frac{18 + 3i + 6}{45} \\ &= \frac{24 + 3i}{45} = \frac{24}{45} + \frac{3}{45}i = \frac{8}{15} + \frac{1}{15}i\end{aligned}$$

Betrag

Definition

Man definiert den **Betrag** $|z| \in \mathbb{R}^+$ einer komplexen Zahl z durch

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Für $z = a + bi$:

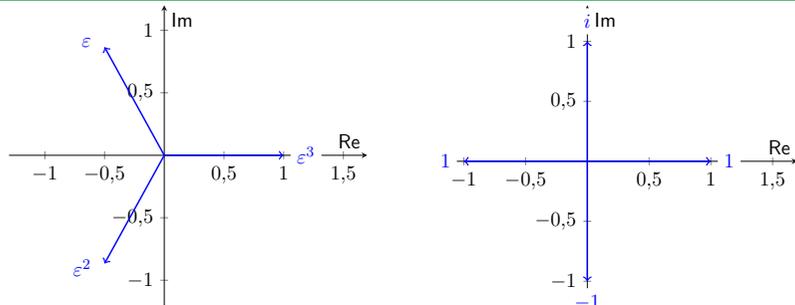
$$\begin{aligned} \sqrt{z\bar{z}} &= \sqrt{(a + bi) \cdot (a - bi)} = \sqrt{a^2 - b^2i^2} = \sqrt{a^2 - b^2(-1)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$|w + z| \leq |w| + |z| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

$$|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$$

Einheitswurzeln

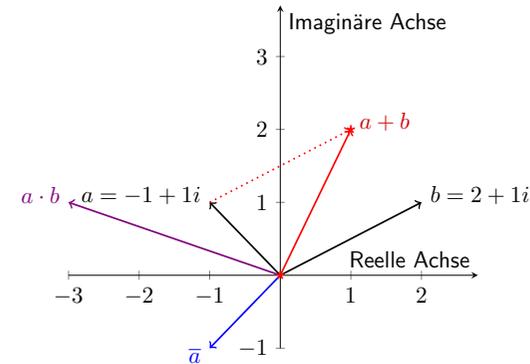


- Sei ε die komplexe Zahl mit Betrag 1 und Winkel 120 Grad, d.h. $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$, so ist $\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon}$ und $\varepsilon^3 = 1$.
- ε ist eine **primitive dritte Einheitswurzel** („Wurzel aus Eins“).
- **Primitiv**: alle drei dritten Einheitswurzeln, 1, ε und $\bar{\varepsilon}$ sind Potenzen von ε . Auch $\bar{\varepsilon}$ ist primitiv, denn $\bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon$ und $\bar{\varepsilon}^3 = 1$.
- 1, i , -1 , $-i$ sind vierte Einheitswurzeln, i und $-i$ sind sogar primitiv.
- Einheitswurzeln spielen bedeutende Rolle bei der sog. diskreten Fouriertransformation (Hilfsmittel der Signalverarbeitung)

Komplexe Zahlenebene: Geometrische Veranschaulichung

Ortsvektoren in der Ebene

(Realteil = x -Koordinate, Imaginärteil = y -Koordinate).



- Länge der Vektoren entspricht dem Betrag.
- **Addition** entspricht Vektoraddition
- **Dreiecksungleichung**: $|a + b| \leq |a| + |b|$
Dreiecke vorhanden
- **Konjugierte**: Spiegelung an der reellen Achse
- **Multiplikation** entspricht „stretch and turn“: die Längen (Beträge) der zu multiplizierenden Vektoren werden multipliziert, die Winkel der Vektoren, gemessen von der x -Achse entgegen dem Uhrzeigersinn, werden *addiert*.

Komplexe Nullstellen von Polynomen (1)

- In \mathbb{C} hat jede nichttriviale quadratische Gleichung eine Lösung, z.B. $x^2 - 2x + 5 = 0$ hat die Lösungen $x_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$.
- Es gilt sogar, dass jedes nichtkonstante Polynom eine Nullstelle in den komplexen Zahlen hat („**Fundamentalsatz der Algebra**“).

Komplexe Nullstellen von Polynomen (2)

- Wenn man eine Nullstelle gefunden hat, kann man durch rausdividieren, die nächste bestimmen usw.
- Ein Polynom hat so viele Nullstellen wie der Grad des Polynoms.
- Z.B. hat $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = (x^2 - 2x + 5) \cdot (x - 1)$ die reelle Nullstelle 1 und zwei komplexe Nullstellen, nämlich $1 + 2i$ und $1 - 2i$.
- Da $(\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$) gilt, folgt: wenn z Nullstelle eines Polynoms $P(x)$ ist, dann ist auch die Konjugierte \overline{z} eine Nullstelle von $P(x)$.

Beispiel: Geometrische Reihe im Komplexen

Sei $z := \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} \cdot (1-i)$. Es gilt $|z| = \frac{1}{2} < 1$, also ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i} \right)^k = \frac{1}{1-z} = \frac{2}{1+i} = 1-i .$$

Konvergenz im Komplexen

- Konvergenz von Folgen und Grenzwerte von Funktionen werden im Komplexen genauso wie im Reellen definiert.
- An die Stelle des Absolutbetrages tritt hier der Betrag der komplexen Zahlen.
- Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen **konvergiert gegen** $b \in \mathbb{C}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n > N$ gilt $|a_n - b| < \varepsilon$.
- Die Konvergenzkriterien für Reihen und bereits hergeleitete Summenformeln gelten sinngemäß fort.

Komplexe Exponentialfunktion

Man erweitert die Exponentialfunktion $\exp(x)$ auf die komplexen Zahlen, indem man die Reihe auf komplexen Zahlen auffasst.

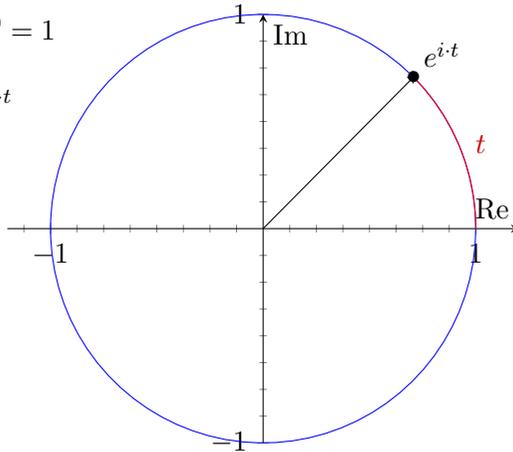
$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Es gilt dann weiterhin $\exp(w+z) = \exp(w) \cdot \exp(z)$, selbst wenn w und z komplex sind.

Komplexe Exponentialfunktion (2)

Es gilt

- $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ (s. Forster)
- $|e^{i \cdot t}|^2 = e^{i \cdot t} \cdot \overline{e^{i \cdot t}} = e^{i \cdot t} \cdot e^{-i \cdot t} = e^{i \cdot t - i \cdot t} = e^0 = 1$ (da $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$)
- Daraus folgt $|e^{i \cdot t}| = 1$, d.h. für jedes t liegt $e^{i \cdot t}$ auf dem Einheitskreis



Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen \sin und \cos werden für $t \in \mathbb{R}$ definiert als:

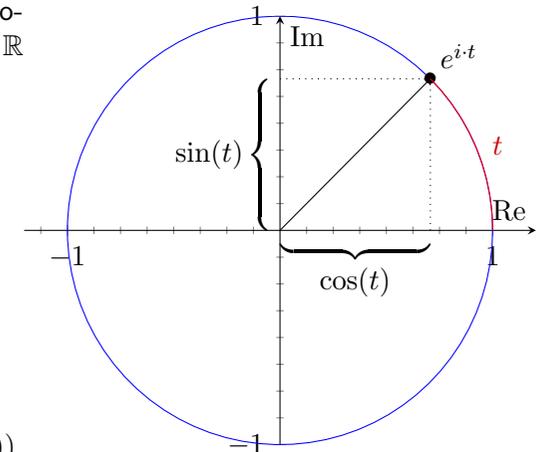
$$\begin{aligned} \sin(t) &= \text{Im}(\exp(i \cdot t)) \\ \cos(t) &= \text{Re}(\exp(i \cdot t)) \end{aligned}$$

Es gilt die **Eulersche Formel**

$$\exp(i \cdot t) = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$$

Weiterhin folgt

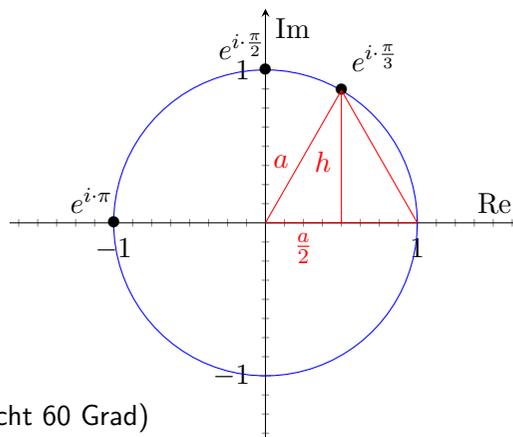
$$e^{(a+bi)} = e^a \cdot (\cos(b) + i \cdot \sin(b)).$$



Trigonometrische Funktionen (2)

Spezielle Werte: (mit $\pi = \text{Umfang} / \text{Durchmesser}$ eines Kreises)

- $\sin(0) = 0$
- $\cos(0) = 1$
- $\sin(\pi) = 0$
- $\cos(\pi) = -1$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1/2 \cdot \sqrt{3}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1/2$ ($\frac{\pi}{3}$ entspricht 60 Grad)

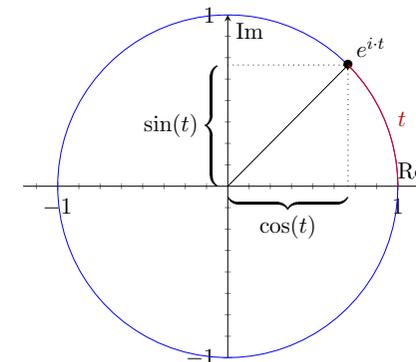


Für $\frac{\pi}{3}$ betrachte das halbe gleichseitige Dreieck:
Es gilt $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ mit $a = 1$

Eulersche Formel

Für den speziellen Wert $x = \pi$ ergibt sich aus der Eulerschen Formel $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$ die berühmte Formel

$$e^{i\pi} = -1 \text{ und ebenso } e^{2\pi i} = 1.$$



Trigonometrische Funktionen (3)

Gleichungen
(gelten für alle $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$$

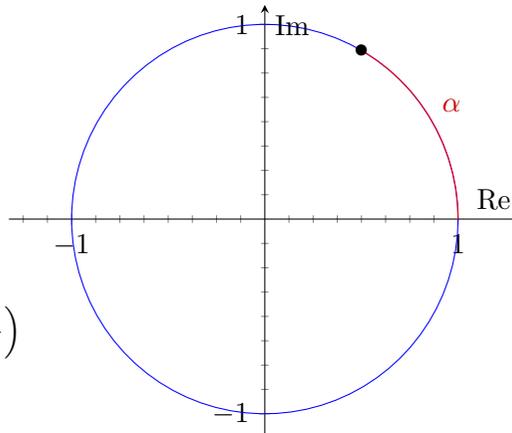
$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$$



Trigonometrische Funktionen (4)

Satz (Additionstheoreme)

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

Beweis. Die Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion zeigt

$$e^{i(x+y)} = e^{ix+iy} = e^{ix} \cdot e^{iy} \quad (\dagger)$$

Mit der Eulerschen Formel (E.F.)

$$\begin{aligned} & \cos(x+y) + i \sin(x+y) \\ \stackrel{E.F.}{=} & \exp(i(x+y)) \stackrel{(\dagger)}{=} \exp(ix) \cdot \exp(iy) \\ \stackrel{E.F.}{=} & (\cos(x) + i \sin(x)) \cdot (\cos(y) + i \sin(y)) \\ = & (\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)) + i(\sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)). \end{aligned}$$

Der Satz folgt durch Vergleich von Real- und Imaginärteil. \square

Reihenentwicklungen für sin und cos

Satz 7.4

Es gelten folgende Reihenentwicklungen (für $x \in \mathbb{R}$):

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Beweis.

- Nach Definition $\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!}$.
- Es gilt $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i$ usw.
- Glieder mit geradem (ungeradem) Index sind alle reell (imaginär)

- Der Realteil von $\exp(ix)$ lässt sich dann schreiben als:

$$\frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

- Der Imaginärteil von $\exp(ix)$ lässt sich schreiben als:

$$\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

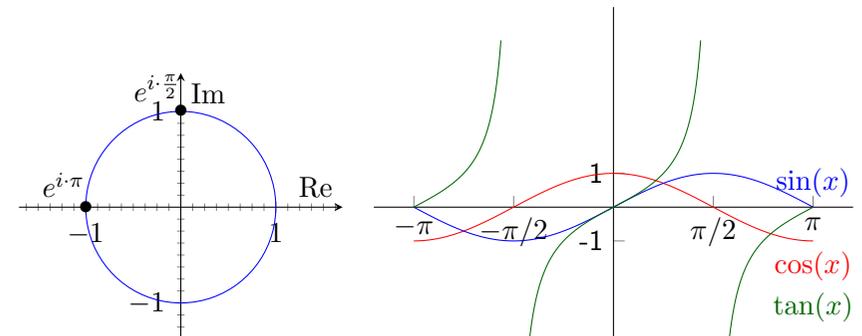
\square

Tangens

Tangens-Funktion

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

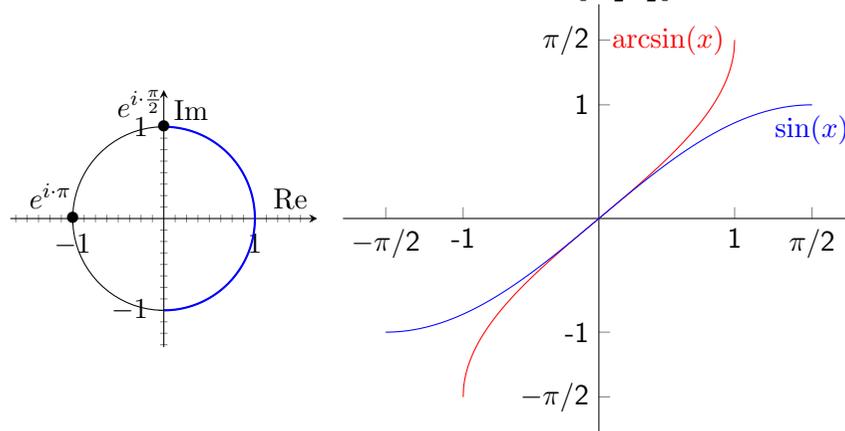
- ist an den Nullstellen von $\cos(x)$ undefiniert, d.h. an den Punkten $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{N}$.



Trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen

Die Funktion \sin ist im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton steigend und nimmt alle Werte aus $[-1, 1]$ an.

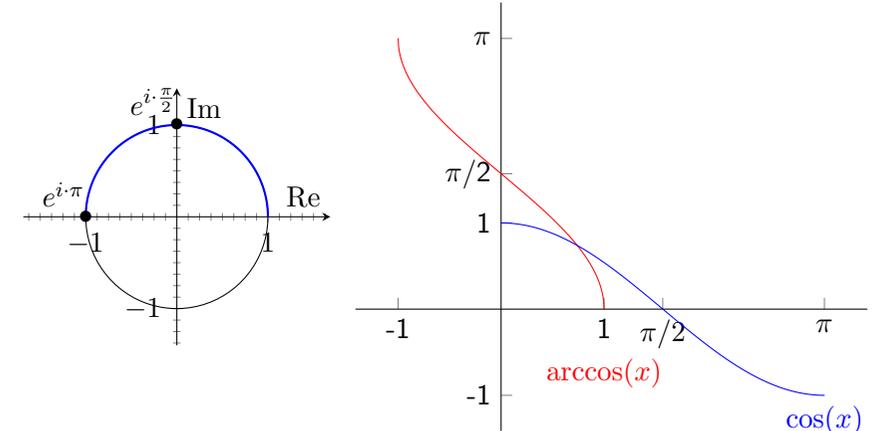
Eingeschränkt auf dieses Intervall hat \sin also eine Umkehrfunktion, die Arcussinus genannt wird $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen (2)

Analog ist \cos im Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend und nimmt alle Werte aus $[-1, 1]$ an.

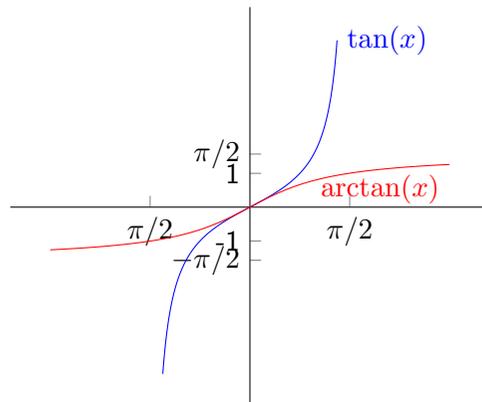
Eingeschränkt auf dieses Intervall hat \cos eine Umkehrfunktion, die Arcuscosinus genannt wird $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.



Trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen (3)

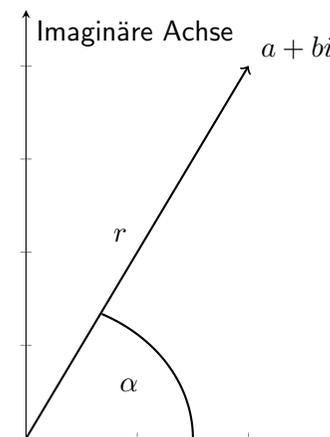
Die Tangensfunktion ist im offenen Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend und nimmt alle Werte aus \mathbb{R} an.

Ihre Umkehrfunktion wird $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ genannt.



Polarkoordinaten

Jede komplexe Zahl $z = a + bi$ kann in der Form $r \cdot e^{i\alpha}$ geschrieben werden, wobei $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und α der Winkel des Ortsvektors (a, b) ist.



$$a = \cos(\alpha) \quad b = \sin(\alpha) \quad \frac{b}{a} = \tan(\alpha)$$

Für $(a, b) \neq (0, 0)$ gilt:

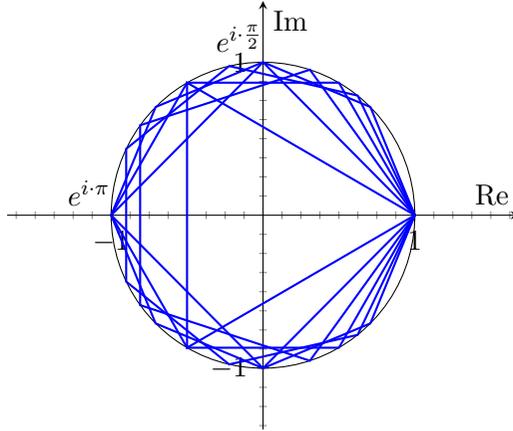
$$\alpha = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}) & \text{falls } a > 0, b \geq 0 \\ \pi - \arctan(\frac{b}{a}) & \text{falls } a < 0 \\ 2\pi + \arctan(\frac{b}{a}) & \text{falls } a > 0, b < 0 \\ \pi/2 & \text{falls } a = 0, b > 0 \\ 3\pi/2 & \text{falls } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

In vielen Programmiersprachen gibt es die Funktion atan2 , die direkt α aus b und a berechnet.

Reelle Achse

Anwendung: Darstellung der n -ten Einheitswurzel

- Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Die Gleichung $z^n = 1$ hat genau n komplexe Lösungen, nämlich $z = w_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$.
- Die Vektoren $e^{i \frac{2k\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$ beschreiben die Punkte eines regelmäßigen n -Ecks im Einheitskreis.



Komplexe Potenzen

Für reelles $a > 0$ und komplexes z definiert man

$$a^z := \exp(z \cdot \ln(a))$$

- Es gilt dann $a^{w+z} = a^w \cdot a^z$.
- Potenzen mit komplexen Basen sind ebenso wie solche mit negativen Basen nach wie vor nur für ganzzahlige Exponenten erklärt.
- Z.B. gäbe es für die Definition von $(-1)^{0.5}$ zwei verschiedene Möglichkeiten, nämlich i und $-i$.