Funktionen und Stetigkeit

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

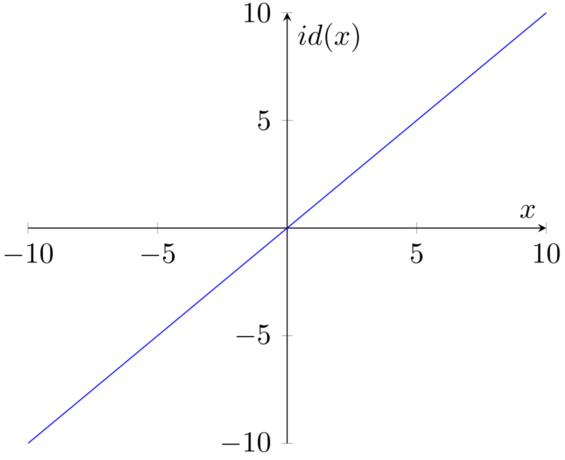
Letzte Änderung der Folien: 4. Dezember 2019

Funktionen

- Eine **Funktion** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ordnet jeder Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$ zu.
- Der Graph der Funktion ist die Menge der Paare $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
- Zeichnet man den Graphen in ein x-y-Koordinatensystem, so befindet sich über jedem x-Wert genau ein y-Wert (nämlich $y = f(x)$).

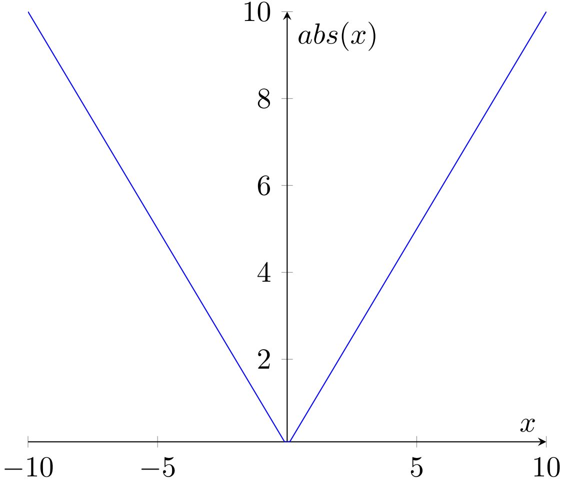
Beispiele

Identitätsfunktion $id(x) = x$.



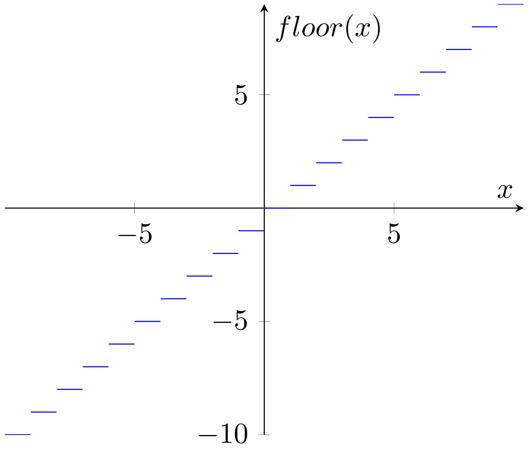
Beispiele

Betragsfunktion $abs(x) = |x|$.



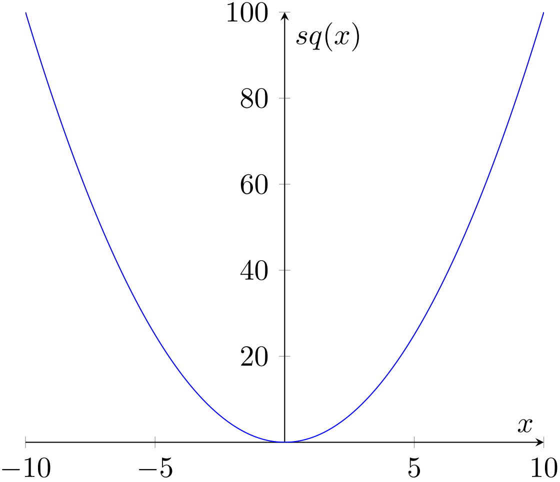
Beispiele

Abrundenfunktion: $floor(x) = \lfloor x \rfloor$.



Beispiele

Quadrat-Funktion: $sq(x) = x^2$.



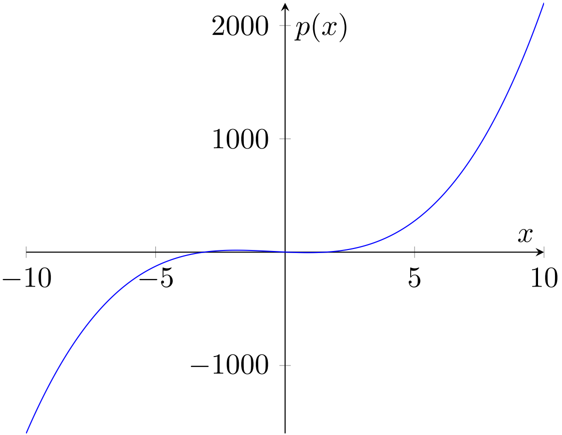
Beispiele

Polynome $p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Beispiele

Polynome $p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

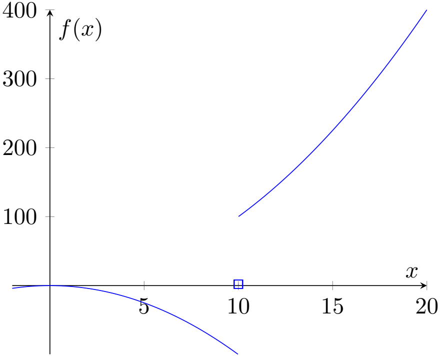
Z.B. $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x + 1$



Beispiele

Stückweise definierte Funktionen:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x > 10, \\ 2 & \text{falls } x = 10, \\ -x^2 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Beispiele

Funktionen müssen nicht „glatt“ sein, z.B. die Dirichlet-Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational (d.h. } x = \frac{m}{n} \text{ für geeignete } m, n \in \mathbb{N}) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Partielle Funktionen

Funktionen müssen nicht überall definiert sein.

Sind D und W Teilmengen von $\mathbb{R}$, so schreibt man

$$f\colon D \to W$$

wenn f jedem $x \in D$ einen Wert $y = f(x)$ in W zuordnet.

- D heißt Definitionsbereich von f
- W heißt Wertebereich von f

Beispiele

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Hier z.B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $f(x) = \sqrt{x}$. Hier z.B. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
- Jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann als Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$ angesehen werden, mittels $f(n) = a_n$.

Eingeschränkte Definitionsbereiche

Eingeschränkter Definitionsbereich, Gründe:

- Keine sinnvolle Definition möglich, z.B. $\sqrt{-a}$
- Willkürliche Einschränkung, z.B. $id\colon \{42\} \to \mathbb{R}$

Exponentialfunktion

Definition (Exponentialfunktion)

Die **Exponentialfunktion** $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad .$$

Bemerkung: Wir haben bereits gesehen, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ absolut konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Eigenschaften der Exponentialfunktion (1)

Satz 6.3

Die folgenden Aussagen sind wahr:

- $\exp(0) = 1$.
- $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
  (Additionstheorem der Exponentialfunktion)

Bemerkungen:

- Teil 1 kann direkt durch ausrechnen bewiesen werden.
- Wir beweisen Teil 2 nicht (ein Beweis ist im Buch von Forster).
- Aus dem Satz folgt insbesondere $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$, denn

$$\exp(-x) = \frac{\exp(x)\exp(-x)}{\exp(x)} = \frac{\exp(x + (-x))}{\exp(x)} = \frac{\exp(0)}{\exp(x)} = \frac{1}{\exp(x)} \quad .$$

Eigenschaften der Exponentialfunktion (2)

Satz 6.4

Es gilt:

- $\exp(x) > 1$ für alle $x > 0$.
- $0 < \exp(x) < 1$ für alle $x < 0$.

Beweis.

- Für $x > 0$ ist die Aussage klar, da die Summe $\exp(x) = 1 + x + \frac{x}{2} + \ldots$ nur echt positive Glieder enthält.
- Für $x < 0$ verwenden wir $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$ und den ersten Punkt.

Berührpunkte

Definition

Sei D eine Menge von reellen Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Berührpunkt von D falls es eine Folge (a_n) von Zahlen $a_n \in D$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Beispiele:

- Jede Zahl $a \in D$ ist ein Berührpunkt von D, da man einfach die konstante Folge $a_n := a$ wählen kann.
- Für $a < b$ sind die Zahlen a und b Berührpunkte des offenen Intervalls (a, b).
  Denn z.B. $\lim_{n\to\infty} a + \frac{b-a}{n+2} = a$ und $a + \frac{b-a}{n+2} \in (a, b)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Für kein $\varepsilon > 0$ ist $b + \varepsilon$ ein Berührpunkt des offenen Intervalls (a, b).

Berührpunkte

Definition

Sei D eine Menge von reellen Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Berührpunkt von D falls es eine Folge (a_n) von Zahlen $a_n \in D$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Beispiele:

- Jede Zahl $a \in D$ ist ein Berührpunkt von D, da man einfach die konstante Folge $a_n := a$ wählen kann.
- Für $a < b$ sind die Zahlen a und b Berührpunkte des offenen Intervalls (a, b).
  Denn z.B. $\lim_{n\to\infty} a + \frac{b-a}{n+2} = a$ und $a + \frac{b-a}{n+2} \in (a, b)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Für kein $\varepsilon > 0$ ist $b + \varepsilon$ ein Berührpunkt des offenen Intervalls (a, b).

Berührpunkte

Definition

Sei D eine Menge von reellen Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Berührpunkt von D falls es eine Folge (a_n) von Zahlen $a_n \in D$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Beispiele:

- Jede Zahl $a \in D$ ist ein Berührpunkt von D, da man einfach die konstante Folge $a_n := a$ wählen kann.
- Für $a < b$ sind die Zahlen a und b Berührpunkte des offenen Intervalls (a, b).
  Denn z.B. $\lim_{n\to\infty} a + \frac{b-a}{n+2} = a$ und $a + \frac{b-a}{n+2} \in (a, b)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Für kein $\varepsilon > 0$ ist $b + \varepsilon$ ein Berührpunkt des offenen Intervalls (a, b).

Berührpunkte

Definition

Sei D eine Menge von reellen Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Berührpunkt von D falls es eine Folge (a_n) von Zahlen $a_n \in D$ gibt mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

Beispiele:

- Jede Zahl $a \in D$ ist ein Berührpunkt von D, da man einfach die konstante Folge $a_n := a$ wählen kann.
- Für $a < b$ sind die Zahlen a und b Berührpunkte des offenen Intervalls (a, b).
  Denn z.B. $\lim\limits_{n \to \infty} a + \frac{b-a}{n+2} = a$ und $a + \frac{b-a}{n+2} \in (a, b)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Für kein $\varepsilon > 0$ ist $b + \varepsilon$ ein Berührpunkt des offenen Intervalls (a, b).

Grenzwerte bei Funktionen

Definition (Grenzwert einer Funktion an einer bestimmten Stelle)

Ist $f\colon D \to W$ eine Funktion und a ein Berührpunkt von D, dann schreibt man

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

- Funktionswerte $f(x_n)$ streben gegen b, wenn Argumentfolge (x_n) gegen a strebt.
- Annahme a ein Berührpunkt von D sichert zu, dass es eine Argumentfolge überhaupt gibt.

Grenzwerte bei Funktionen (2)

Man kann die Definitionen auch für ∞ und $-\infty$ statt von $a \in \mathbb{R}$ machen und schreibt:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = c \ .$$

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ bedeutet, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$ im Definitionsbereich auch $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$ gilt (und dass der Definitionsbereich mindestens eine solche Folge enthält).
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ bedeutet, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$ im Definitionsbereich auch $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$ gilt (und dass der Definitionsbereich mindestens eine solche Folge enthält).

Beispiele

$\lim_{x \to a} x^2 + 7 = a^2 + 7$ und analoges gilt für beliebige Polynome:

- Sei $\lim_{n \to \infty} x_n = a$
- Mit den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen kann man umformen:
  $\lim_{n \to \infty} ((x_n)^2 + 7) = (\lim_{n \to \infty} x_n) \cdot (\lim_{n \to \infty} x_n) + (\lim_{n \to \infty} 7) =$
  $a \cdot a + 7 = a^2 + 7$

Beispiele (2)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$
- Dann gilt: Für alle $K \in \mathbb{R}$ gibt es N, sodass $x_n > K$ für alle $n > N$.
- Behauptung: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.
- Sei $\varepsilon > 0$.
- Dann gibt es nach dem Satz über kleine Brüche (Satz 3.13) ein M mit $\frac{1}{M} < \varepsilon$.
- Dann gilt auch $\frac{1}{m} < \varepsilon$ für alle $m \geq M$.
- Setze nun $K = M$. Dann gibt es ein N sodass $x_n > K = M$ für alle $n > N$.
- Damit folgt $\frac{1}{x_n} < \frac{1}{M} < \varepsilon$ für alle $n > N$.

Beispiele (3)

- $\lim_{x \to 2} \frac{(x-1)}{(x^2-1)} =$

Beispiele (3)

- $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-1)}{(x^2-1)} = \frac{1}{3}$

Beispiele (3)

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-1)}{(x^2-1)} = \dfrac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)}{(x^2-1)}$

Beispiele (3)

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-1)}{(x^2-1)} = \dfrac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)}{(x^2-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

Beispiele (3)

- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-1)}{(x^2-1)} = \dfrac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)}{(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$
- Grenzwerte müssen nicht existieren, z.B. existieren
    - $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 + 7$
    - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$

  nicht.

Exponentialfunktion: Ein Hilfsatz

Lemma 6.10

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt $|\exp(x) - 1| \leq 2|x|$

$|\exp(x) - 1|$

Exponentialfunktion: Ein Hilfsatz

Lemma 6.10

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt $|\exp(x) - 1| \leq 2|x|$

$$|\exp(x) - 1| = \left| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) - 1 \right|$$ nach Definition

Exponentialfunktion: Ein Hilfsatz

Lemma 6.10

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt $|\exp(x) - 1| \leq 2|x|$

$$|\exp(x) - 1| = \left| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) - 1 \right| \qquad \text{nach Definition}$$

$$= \left| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) + \frac{x^0}{0!} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \qquad \text{Vereinfachung}$$

Exponentialfunktion: Ein Hilfsatz

Lemma 6.10

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt $|\exp(x) - 1| \leq 2|x|$

$$|\exp(x) - 1| = \left| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) - 1 \right| \qquad \text{nach Definition}$$

$$= \left| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) + \frac{x^0}{0!} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \qquad \text{Vereinfachung}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \qquad \text{Dreiecksungleichung}$$

Exponentialfunktion: Ein Hilfsatz

Lemma 6.10

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt $|\exp(x) - 1| \leq 2|x|$

$$
\begin{aligned}
|\exp(x) - 1| &= \left| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) - 1 \right| && \text{nach Definition} \\
&= \left| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) + \frac{x^0}{0!} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| && \text{Vereinfachung} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} && \text{Dreiecksungleichung} \\
&= |x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{k!} && |x| \text{ ausklammern}
\end{aligned}
$$

Exponentialfunktion: Ein Hilfsatz

Lemma 6.10

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt $|\exp(x) - 1| \leq 2|x|$

$$
\begin{aligned}
|\exp(x) - 1| &= \left| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) - 1 \right| && \text{nach Definition} \\
&= \left| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) + \frac{x^0}{0!} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| && \text{Vereinfachung} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} && \text{Dreiecksungleichung} \\
&= |x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{k!} && |x| \text{ ausklammern} \\
&\leq |x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{2^{k-1}} && \text{denn es gilt } 2^{k-1} \leq k! \text{ für alle } k \geq 1 \text{ und damit } \frac{1}{2^{k-1}} \geq \frac{1}{k!}
\end{aligned}
$$

Exponentialfunktion: Ein Hilfsatz

Lemma 6.10

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt $|\exp(x) - 1| \leq 2|x|$

$$
\begin{aligned}
|\exp(x) - 1| &= \left|\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) - 1\right| && \text{nach Definition} \\
&= \left|\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) + \frac{x^0}{0!} - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right| && \text{Vereinfachung} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{x^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} && \text{Dreiecksungleichung} \\
&= |x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{k!} && |x| \text{ ausklammern} \\
&\leq |x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{2^{k-1}} && \text{denn es gilt } 2^{k-1} \leq k! \text{ für alle } k \geq 1 \text{ und damit } \frac{1}{2^{k-1}} \geq \frac{1}{k!} \\
&< |x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} && \text{wegen } |x| < 1
\end{aligned}
$$

Exponentialfunktion: Ein Hilfsatz

Lemma 6.10

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt $|\exp(x) - 1| \leq 2|x|$

$$
\begin{aligned}
|\exp(x) - 1| &= \left| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) - 1 \right| && \text{nach Definition} \\
&= \left| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) + \frac{x^0}{0!} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| && \text{Vereinfachung} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} && \text{Dreiecksungleichung} \\
&= |x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{k!} && |x| \text{ ausklammern} \\
&\leq |x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{2^{k-1}} && \text{denn es gilt } 2^{k-1} \leq k! \text{ für alle } k \geq 1 \\
& && \text{und damit } \frac{1}{2^{k-1}} \geq \frac{1}{k!} \\
&< |x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} && \text{wegen } |x| < 1 \\
&= |x| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = |x| \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = |x| \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = |x| 2 && \text{geometrische Reihe}
\end{aligned}
$$

Exponentialfunktion an der Stelle 0

Satz 6.11

Es gilt $\lim_{x \to 0} \exp(x) = 1$.

Exponentialfunktion an der Stelle 0

Satz 6.11

Es gilt $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1$.

Beweis.

- Zu zeigen: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ dann $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = 1$.
- Sei $\varepsilon > 0$.
- Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ gibt es für $\varepsilon' = \min(1, \varepsilon/2)$ einen Index N, sodass $|x_n| < \varepsilon' \leq 1$ für alle $n > N$ gilt.
- Mit Lemma 6.10 folgt daraus $|\exp(x_n) - 1| \leq |2x_n| < 2\varepsilon' \leq \varepsilon$ für alle $n > N$.
- Das zeigt $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = 1$. □

Exponentialfunktion an der Stelle 0

Satz 6.11

Es gilt $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1$.

Beweis.

- Zu zeigen: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ dann $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = 1$.
- Sei $\varepsilon > 0$.
- Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ gibt es für $\varepsilon' = \min(1, \varepsilon/2)$ einen Index N, sodass $|x_n| < \varepsilon' \leq 1$ für alle $n > N$ gilt.
- Mit Lemma 6.10 folgt daraus $|\exp(x_n) - 1| \leq |2x_n| < 2\varepsilon' \leq \varepsilon$ für alle $n > N$.
- Das zeigt $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = 1$. $\square$

Exponentialfunktion an der Stelle 0

Satz 6.11

Es gilt $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1$.

Beweis.

- Zu zeigen: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ dann $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = 1$.
- Sei $\varepsilon > 0$.
- Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ gibt es für $\varepsilon' = \min(1, \varepsilon/2)$ einen Index N, sodass $|x_n| < \varepsilon' \leq 1$ für alle $n > N$ gilt.
- Mit Lemma 6.10 folgt daraus $|\exp(x_n) - 1| \leq |2x_n| < 2\varepsilon' \leq \varepsilon$ für alle $n > N$.
- Das zeigt $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = 1$. □

Exponentialfunktion an der Stelle 0

Satz 6.11

Es gilt $\lim_{x\to 0}\exp(x) = 1$.

Beweis.

- Zu zeigen: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ dann $\lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n) = 1$.
- Sei $\varepsilon > 0$.
- Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ gibt es für $\varepsilon' = \min(1, \varepsilon/2)$ einen Index N, sodass $|x_n| < \varepsilon' \leq 1$ für alle $n > N$ gilt.
- Mit Lemma 6.10 folgt daraus $|\exp(x_n) - 1| \leq |2x_n| < 2\varepsilon' \leq \varepsilon$ für alle $n > N$.
- Das zeigt $\lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n) = 1$. □

Exponentialfunktion an der Stelle 0

Satz 6.11

Es gilt $\lim_{x \to 0} \exp(x) = 1$.

Beweis.

- Zu zeigen: Wenn $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ dann $\lim\limits_{n \to \infty} \exp(x_n) = 1$.
- Sei $\varepsilon > 0$.
- Wegen $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ gibt es für $\varepsilon' = \min(1, \varepsilon/2)$ einen Index N, sodass $|x_n| < \varepsilon' \leq 1$ für alle $n > N$ gilt.
- Mit Lemma 6.10 folgt daraus $|\exp(x_n) - 1| \leq |2x_n| < 2\varepsilon' \leq \varepsilon$ für alle $n > N$.
- Das zeigt $\lim\limits_{n \to \infty} \exp(x_n) = 1$. □

Grenzwertbildung von links und von rechts

- Technisch: Man schränkt den Definitionsbereich D der Funktion bei der Grenzwertbildung ein: auf $\{x \in D \mid x > a\}$ oder auf $\{x \in D \mid x < a\}$

Schreibweise:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) \ .$$

Grenzwertbildung von links und von rechts

- Technisch: Man schränkt den Definitionsbereich D der Funktion bei der Grenzwertbildung ein:
  auf $\{x \in D \mid x > a\}$ oder auf $\{x \in D \mid x < a\}$

Schreibweise:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x)\ .$$

Beispiele:

- $\lim_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$
- $\lim_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$
- $\lim_{x \to 1} \lfloor x \rfloor$ existiert nicht:

  Z.B. gilt $\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1$ aber
  $(\lfloor 1 + \frac{(-1)^n}{n} \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$

Grenzwertbildung von links und von rechts

- Technisch: Man schränkt den Definitionsbereich D der Funktion bei der Grenzwertbildung ein:
  auf $\{x \in D \mid x > a\}$ oder auf $\{x \in D \mid x < a\}$

Schreibweise:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x)\ .$$

Beispiele:

- $\lim_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$
- $\lim_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$
- $\lim_{x \to 1} \lfloor x \rfloor$ existiert nicht:

  Z.B. gilt $\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1$ aber
  $(\lfloor 1 + \frac{(-1)^n}{n} \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$

Grenzwertbildung von links und von rechts

- Technisch: Man schränkt den Definitionsbereich D der Funktion bei der Grenzwertbildung ein: auf $\{x \in D \mid x > a\}$ oder auf $\{x \in D \mid x < a\}$

Schreibweise:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) \ .$$

Beispiele:

- $\lim_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$
- $\lim_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$
- $\lim_{x \to 1} \lfloor x \rfloor$ existiert nicht:

  Z.B. gilt $\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1$ aber $(\lfloor 1 + \frac{(-1)^n}{n} \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$

Grenzwertbildung von links und von rechts

- Technisch: Man schränkt den Definitionsbereich D der Funktion bei der Grenzwertbildung ein:
  auf $\{x \in D \mid x > a\}$ oder auf $\{x \in D \mid x < a\}$

Schreibweise:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) \ .$$

Beispiele:

- $\lim_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$
- $\lim_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$
- $\lim_{x \to 1} \lfloor x \rfloor$ existiert nicht:
  Z.B. gilt $\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1$ aber
  $(\lfloor 1 + \frac{(-1)^n}{n} \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$

Grenzwertbildung von links und von rechts

- Technisch: Man schränkt den Definitionsbereich D der Funktion bei der Grenzwertbildung ein: auf $\{x \in D \mid x > a\}$ oder auf $\{x \in D \mid x < a\}$

Schreibweise:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) \ .$$

Beispiele:

- $\lim\limits_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1} \lfloor x \rfloor$ existiert nicht:

  Z.B. gilt $\lim\limits_{n \to \infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1$ aber $(\lfloor 1 + \frac{(-1)^n}{n} \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$

Grenzwertbildung von links und von rechts

- Technisch: Man schränkt den Definitionsbereich D der Funktion bei der Grenzwertbildung ein: auf $\{x \in D \mid x > a\}$ oder auf $\{x \in D \mid x < a\}$

Schreibweise:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) \ .$$

Beispiele:

- $\lim_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$
- $\lim_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$
- $\lim_{x \to 1} \lfloor x \rfloor$ existiert nicht:

  Z.B. gilt $\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1$ aber $(\lfloor 1 + \frac{(-1)^n}{n} \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$

Satz 6.9

Satz 6.9

Sei $f(a) = b$ oder $f(a)$ undefiniert. Dann gilt $\lim_{x \to a} f(x) = b$ genau dann, wenn

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = b.$$

Der Satz wird später bewiesen.

Epsilon-Delta-Charakterisierung des Grenzwerts

Satz 6.12 (Epsilon-Delta-Charakterisierung des Grenzwerts)

Es gilt $\lim_{x\to a} f(x) = b$ genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $|f(x) - b| < \varepsilon$ für alle x im Definitionsbereich von f mit $|x - a| < \delta$ gilt.

In Worten:

Für jede geforderte Genauigkeit ε gibt es eine δ-Umgebung von a, innerhalb derer alle Funktionswerte höchstens ε von $f(a)$ abweichen.

Der Beweis ist nicht schwer und wird hier weggelassen.

Beweis von Satz 6.9

Satz 6.9

Sei $f(a) = b$ oder $f(a)$ undefiniert.
Dann gilt $\lim_{x \to a} f(x) = b$ genau dann, wenn $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = b$.

Beweis. Sei $f : D \to W$.

"$\Rightarrow$" Aus $\lim_{x \to a} f(x) = b$ folgt $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ und $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$ direkt.

Beweis von Satz 6.9

Satz 6.9

Sei $f(a) = b$ oder $f(a)$ undefiniert.
Dann gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ genau dann, wenn $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$.

Beweis. Sei $f : D \to W$.

"$\Rightarrow$" Aus $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ folgt $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$ und $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$ direkt.

"$\Leftarrow$": • Sei $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ und $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$.

Beweis von Satz 6.9

Satz 6.9

Sei $f(a) = b$ oder $f(a)$ undefiniert.
Dann gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ genau dann, wenn $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$.

Beweis. Sei $f : D \to W$.

"$\Rightarrow$" Aus $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ folgt $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$ und $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$ direkt.

"$\Leftarrow$": • Sei $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ und $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$.

Beweis von Satz 6.9

Satz 6.9

Sei $f(a) = b$ oder $f(a)$ undefiniert.
Dann gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ genau dann, wenn $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$.

Beweis. Sei $f : D \to W$.

"$\Rightarrow$" Aus $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ folgt $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$ und $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$ direkt.

"$\Leftarrow$":
- Sei $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ und $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$.
- Mit Satz 6.12 folgt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$ mit
  - für alle $x_1 \in D$, $x_1 > a$: $|x_1 - a| < \delta_1 \implies |f(x_1) - b| < \varepsilon$
  - für alle $x_2 \in D$, $x_2 < a$: $|x_2 - a| < \delta_2 \implies |f(x_2) - b| < \varepsilon$

Beweis von Satz 6.9

Satz 6.9

Sei $f(a) = b$ oder $f(a)$ undefiniert.
Dann gilt $\lim_{x \to a} f(x) = b$ genau dann, wenn $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = b$.

Beweis. Sei $f : D \to W$.

"$\Rightarrow$" Aus $\lim_{x \to a} f(x) = b$ folgt $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ und $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$ direkt.

"$\Leftarrow$":
- Sei $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ und $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$.
- Mit Satz 6.12 folgt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$ mit
  - für alle $x_1 \in D$, $x_1 > a$: $|x_1 - a| < \delta_1 \implies |f(x_1) - b| < \varepsilon$
  - für alle $x_2 \in D$, $x_2 < a$: $|x_2 - a| < \delta_2 \implies |f(x_2) - b| < \varepsilon$
  - D.h.: für alle $x \in D : |x - a| < \min(\delta_1, \delta_2) \implies |f(x) - b| < \varepsilon$

Beweis von Satz 6.9

Satz 6.9

Sei $f(a) = b$ oder $f(a)$ undefiniert.
Dann gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ genau dann, wenn $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$.

Beweis. Sei $f : D \to W$.

"$\Rightarrow$" Aus $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ folgt $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$ und $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$ direkt.

"$\Leftarrow$":
- Sei $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ und $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$.
- Mit Satz 6.12 folgt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$ mit
  - für alle $x_1 \in D$, $x_1 > a$: $|x_1 - a| < \delta_1 \implies |f(x_1) - b| < \varepsilon$
  - für alle $x_2 \in D$, $x_2 < a$: $|x_2 - a| < \delta_2 \implies |f(x_2) - b| < \varepsilon$
  - D.h.: für alle $x \in D : |x - a| < \min(\delta_1, \delta_2) \implies |f(x) - b| < \varepsilon$
- D.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ (nämlich $\min(\delta_1, \delta_2)$), sodass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ gilt $|f(x) - b| < \varepsilon$
  (wenn $a \notin D$ gilt das, und wenn $a \in D$ gilt es, da $f(a) = b$)

Stetigkeit

Definition (Stetigkeit)

Eine Funktion $f\colon D \to W$ ist im Punkt $a \in D$ **stetig**,
falls $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ gilt.

Stetigkeit in allen Punkten entspricht in etwa:

Funktionsgraph kann ohne Absetzen des Stiftes gezeichnet werden.

Beispiele

- $f(x) = x^2$ ist überall stetig, denn $\lim_{x \to a} f(x) = a^2 = f(a)$

  Analog sind Polynome überall stetig.
- $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ist an allen nicht-ganzzahligen Punkten stetig.
- $f(x) = |x|$ ist überall stetig.

Beispiele

- $f(x) = x^2$ ist überall stetig, denn $\lim_{x \to a} f(x) = a^2 = f(a)$

  Analog sind Polynome überall stetig.
- $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ist an allen nicht-ganzzahligen Punkten stetig.
- $f(x) = |x|$ ist überall stetig.

Beispiele

- $f(x) = x^2$ ist überall stetig, denn $\lim_{x\to a} f(x) = a^2 = f(a)$

  Analog sind Polynome überall stetig.
- $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ist an allen nicht-ganzzahligen Punkten stetig.
- $f(x) = |x|$ ist überall stetig.

Stetigkeit der Exponentialfunktion

Satz

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist überall stetig.

Beweis. Wir wissen bereits $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1$ und $\exp(0) = 1$, d.h. Stetigkeit im Punkt 0. Für die Stetigkeit im bel. Punkt $a \in \mathbb{R}$:

- Sei (x_n) Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)$.
- $$\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a + a) = \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a)\exp(a) = \exp(a) \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a)$$
- Aus $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ folgt $\lim_{n\to\infty} (x_n - a) = 0$.
- Also ist (x'_n) mit $x'_n := x_n - a$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x'_n = 0$.
- Aus der Stetigkeit im Punkt 0 folgt $\lim_{n\to\infty} \exp(x'_n) = 1$, also $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = 1$.
- Durch Einsetzen in die obige Gleichung erhalten wir $\lim_{x\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)$, was zu zeigen war. □

Stetigkeit der Exponentialfunktion

Satz

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist überall stetig.

Beweis. Wir wissen bereits $\lim\limits_{x\to 0}\exp(x) = 1$ und $\exp(0) = 1$, d.h. Stetigkeit im Punkt 0. Für die Stetigkeit im bel. Punkt $a \in \mathbb{R}$:

- Sei (x_n) Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n) = \exp(a)$.
- $\lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n - a + a) = \lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n - a)\exp(a)$
  $= \exp(a)\lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n - a)$
- Aus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$.
- Also ist (x'_n) mit $x'_n := x_n - a$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x'_n = 0$.
- Aus der Stetigkeit im Punkt 0 folgt $\lim\limits_{n\to\infty}\exp(x'_n) = 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n - a) = 1$.
- Durch Einsetzen in die obige Gleichung erhalten wir $\lim_{x\to\infty}\exp(x_n) = \exp(a)$, was zu zeigen war. □

Stetigkeit der Exponentialfunktion

Satz

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist überall stetig.

Beweis. Wir wissen bereits $\lim\limits_{x\to 0} \exp(x) = 1$ und $\exp(0) = 1$, d.h. Stetigkeit im Punkt 0. Für die Stetigkeit im bel. Punkt $a \in \mathbb{R}$:

- Sei (x_n) Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n - a + a) = \lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n - a) \exp(a)$
  $= \exp(a) \lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n - a)$
- Aus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a) = 0$.
- Also ist (x'_n) mit $x'_n := x_n - a$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x'_n = 0$.
- Aus der Stetigkeit im Punkt 0 folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x'_n) = 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = 1$.
- Durch Einsetzen in die obige Gleichung erhalten wir $\lim_{x\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)$, was zu zeigen war. □

Stetigkeit der Exponentialfunktion

Satz

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist überall stetig.

Beweis. Wir wissen bereits $\lim\limits_{x\to 0} \exp(x) = 1$ und $\exp(0) = 1$, d.h. Stetigkeit im Punkt 0. Für die Stetigkeit im bel. Punkt $a \in \mathbb{R}$:

- Sei (x_n) Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)$.
- $$\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a + a) = \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a)\exp(a) = \exp(a) \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a)$$
- Aus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a) = 0$.
- Also ist (x'_n) mit $x'_n := x_n - a$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x'_n = 0$.
- Aus der Stetigkeit im Punkt 0 folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x'_n) = 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = 1$.
- Durch Einsetzen in die obige Gleichung erhalten wir $\lim_{x\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)$, was zu zeigen war. □

Stetigkeit der Exponentialfunktion

Satz

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist überall stetig.

Beweis. Wir wissen bereits $\lim\limits_{x\to 0} \exp(x) = 1$ und $\exp(0) = 1$, d.h. Stetigkeit im Punkt 0. Für die Stetigkeit im bel. Punkt $a \in \mathbb{R}$:

- Sei (x_n) Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)$.
- $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a + a) &= \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a)\exp(a) \\ &= \exp(a) \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a)\end{aligned}$$
- Aus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a) = 0$.
- Also ist (x'_n) mit $x'_n := x_n - a$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x'_n = 0$.
- Aus der Stetigkeit im Punkt 0 folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x'_n) = 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = 1$.
- Durch Einsetzen in die obige Gleichung erhalten wir $\lim_{x\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)$, was zu zeigen war. $\square$

Stetigkeit der Exponentialfunktion

Satz

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist überall stetig.

Beweis. Wir wissen bereits $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1$ und $\exp(0) = 1$, d.h. Stetigkeit im Punkt 0. Für die Stetigkeit im bel. Punkt $a \in \mathbb{R}$:

- Sei (x_n) Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)$.
- $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a + a) &= \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a)\exp(a) \\ &= \exp(a) \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a)\end{aligned}$$
- Aus $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ folgt $\lim_{n\to\infty} (x_n - a) = 0$.
- Also ist (x_n') mit $x_n' := x_n - a$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n' = 0$.
- Aus der Stetigkeit im Punkt 0 folgt $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n') = 1$, also $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = 1$.
- Durch Einsetzen in die obige Gleichung erhalten wir $\lim_{x\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)$, was zu zeigen war. □

Stetigkeit der Exponentialfunktion

Satz

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist überall stetig.

Beweis. Wir wissen bereits $\lim\limits_{x\to 0} \exp(x) = 1$ und $\exp(0) = 1$, d.h. Stetigkeit im Punkt 0. Für die Stetigkeit im bel. Punkt $a \in \mathbb{R}$:

- Sei (x_n) Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)$.
- $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a + a) &= \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a)\exp(a) \\ &= \exp(a) \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a)\end{aligned}$$
- Aus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a) = 0$.
- Also ist (x'_n) mit $x'_n := x_n - a$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x'_n = 0$.
- Aus der Stetigkeit im Punkt 0 folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x'_n) = 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = 1$.
- Durch Einsetzen in die obige Gleichung erhalten wir $\lim_{x\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)$, was zu zeigen war. $\square$

„Rechenregeln“

Satz 6.16

Wenn f und g im Punkt x_0 stetig sind, dann sind auch folgende Funktionen im Punkt x_0 stetig.

- $h_1(x) = f(x) + g(x)$.
- $h_2(x) = f(x)g(x)$.
- $h_3(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, falls $g(x_0) \neq 0$.

Wenn g im Punkt x_0 stetig ist und f im Punkt $y_0 = g(x_0)$ stetig ist, dann ist auch

- $h_4(x) = f(g(x))$.

im Punkt x_0 stetig.

Beispiele

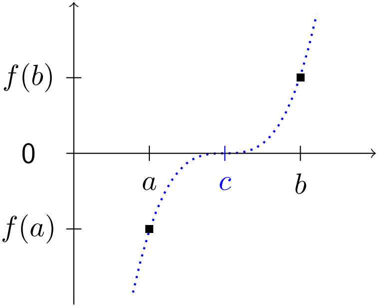
- $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{(x-2)(x+3)(x-5)}$ ist in allen Punkten außer 2, -3 und 5 stetig.
- $\exp\left(\dfrac{x^2}{3}\right)$ ist überall stetig.

Zwischenwertsatz

Satz 6.18 (Zwischenwertsatz)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und seien $a < b \in \mathbb{R}$ Zahlen mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es eine Zahl $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.

Skizze dazu:



Beweis des Zwischenwertsatzes

Satz 6.18 (Zwischenwertsatz)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und seien $a < b \in \mathbb{R}$ Zahlen mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es eine Zahl $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.

Beweis.

- Definiere Intervallschachtelung $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, $\ldots$
- $a_0 := a$ und $b_0 := b$.
- Für $[a_{n+1}, b_{n+1}]$: Sei $m := \frac{a_n + b_n}{2}$ der Mittelpunkt von $[a_n, b_n]$.
  Wenn $f(m) \geq 0$, dann $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := m$.
  Wenn $f(m) < 0$, dann $a_{n+1} := m$ und $b_{n+1} := b_n$.
- Nach dem Satz über Intervallschachtelungen gibt es genau ein $c \in \mathbb{R}$, das in allen Intervallen enthalten ist.
- Wir zeigen, dass $f(c) = 0$ gilt.
- ...

Beweis des Zwischenwertsatzes

Satz 6.18 (Zwischenwertsatz)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und seien $a < b \in \mathbb{R}$ Zahlen mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es eine Zahl $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.

Beweis.

- Definiere Intervallschachtelung $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ...
- $a_0 := a$ und $b_0 := b$.
- Für $[a_{n+1}, b_{n+1}]$: Sei $m := \frac{a_n + b_n}{2}$ der Mittelpunkt von $[a_n, b_n]$.
  Wenn $f(m) \geq 0$, dann $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := m$.
  Wenn $f(m) < 0$, dann $a_{n+1} := m$ und $b_{n+1} := b_n$.
- Nach dem Satz über Intervallschachtelungen gibt es genau ein $c \in \mathbb{R}$, das in allen Intervallen enthalten ist.
- Wir zeigen, dass $f(c) = 0$ gilt.
- ...

Beweis des Zwischenwertsatzes

Satz 6.18 (Zwischenwertsatz)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und seien $a < b \in \mathbb{R}$ Zahlen mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es eine Zahl $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.

Beweis.

- Definiere Intervallschachtelung $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ...
- $a_0 := a$ und $b_0 := b$.
- Für $[a_{n+1}, b_{n+1}]$: Sei $m := \frac{a_n + b_n}{2}$ der Mittelpunkt von $[a_n, b_n]$.
  Wenn $f(m) \geq 0$, dann $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := m$.
  Wenn $f(m) < 0$, dann $a_{n+1} := m$ und $b_{n+1} := b_n$.
- Nach dem Satz über Intervallschachtelungen gibt es genau ein $c \in \mathbb{R}$, das in allen Intervallen enthalten ist.
- Wir zeigen, dass $f(c) = 0$ gilt.
- ...

Beweis des Zwischenwertsatzes

Satz 6.18 (Zwischenwertsatz)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und seien $a < b \in \mathbb{R}$ Zahlen mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es eine Zahl $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.

Beweis.

- Definiere Intervallschachtelung $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ...
- $a_0 := a$ und $b_0 := b$.
- Für $[a_{n+1}, b_{n+1}]$: Sei $m := \frac{a_n + b_n}{2}$ der Mittelpunkt von $[a_n, b_n]$.
  Wenn $f(m) \geq 0$, dann $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := m$.
  Wenn $f(m) < 0$, dann $a_{n+1} := m$ und $b_{n+1} := b_n$.
- Nach dem Satz über Intervallschachtelungen gibt es genau ein $c \in \mathbb{R}$, das in allen Intervallen enthalten ist.
- Wir zeigen, dass $f(c) = 0$ gilt.
- ...

Beweis des Zwischenwertsatzes

Satz 6.18 (Zwischenwertsatz)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und seien $a < b \in \mathbb{R}$ Zahlen mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es eine Zahl $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.

Beweis.

- Definiere Intervallschachtelung $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ...
- $a_0 := a$ und $b_0 := b$.
- Für $[a_{n+1}, b_{n+1}]$: Sei $m := \frac{a_n + b_n}{2}$ der Mittelpunkt von $[a_n, b_n]$.
  Wenn $f(m) \geq 0$, dann $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := m$.
  Wenn $f(m) < 0$, dann $a_{n+1} := m$ und $b_{n+1} := b_n$.
- Nach dem Satz über Intervallschachtelungen gibt es genau ein $c \in \mathbb{R}$, das in allen Intervallen enthalten ist.
- Wir zeigen, dass $f(c) = 0$ gilt.
- ...

Beweis des Zwischenwertsatzes

Satz 6.18 (Zwischenwertsatz)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und seien $a < b \in \mathbb{R}$ Zahlen mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es eine Zahl $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.

Beweis.

- Definiere Intervallschachtelung $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ...
- $a_0 := a$ und $b_0 := b$.
- Für $[a_{n+1}, b_{n+1}]$: Sei $m := \frac{a_n + b_n}{2}$ der Mittelpunkt von $[a_n, b_n]$.
  Wenn $f(m) \geq 0$, dann $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := m$.
  Wenn $f(m) < 0$, dann $a_{n+1} := m$ und $b_{n+1} := b_n$.
- Nach dem Satz über Intervallschachtelungen gibt es genau ein $c \in \mathbb{R}$, das in allen Intervallen enthalten ist.
- Wir zeigen, dass $f(c) = 0$ gilt.
- ...

Beweis des Zwischenwertsatzes (2)

- ...
- Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$, denn c liegt in allen Intervallen und Intervalllänge wird in jedem Schritt halbiert.
- Wegen der Stetigkeit von f folgt weiterhin $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$.
- Nach Konstruktion gilt aber $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) \geq 0$ für alle n (Beweis durch Induktion).
- Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$ gelten
- Das heißt $f(c) \leq 0$ und $f(c) \geq 0$, somit $f(c) = 0$. □

Beweis des Zwischenwertsatzes (2)

- ...
- Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$, denn c liegt in allen Intervallen und Intervalllänge wird in jedem Schritt halbiert.
- Wegen der Stetigkeit von f folgt weiterhin $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$.
- Nach Konstruktion gilt aber $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) \geq 0$ für alle n (Beweis durch Induktion).
- Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$ gelten
- Das heißt $f(c) \leq 0$ und $f(c) \geq 0$, somit $f(c) = 0$. $\square$

Beweis des Zwischenwertsatzes (2)

- ...
- Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$, denn c liegt in allen Intervallen und Intervalllänge wird in jedem Schritt halbiert.
- Wegen der Stetigkeit von f folgt weiterhin $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$.
- Nach Konstruktion gilt aber $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) \geq 0$ für alle n (Beweis durch Induktion).
- Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$ gelten
- Das heißt $f(c) \leq 0$ und $f(c) \geq 0$, somit $f(c) = 0$. $\square$

Beweis des Zwischenwertsatzes (2)

- ...
- Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$, denn c liegt in allen Intervallen und Intervalllänge wird in jedem Schritt halbiert.
- Wegen der Stetigkeit von f folgt weiterhin $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$.
- Nach Konstruktion gilt aber $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) \geq 0$ für alle n (Beweis durch Induktion).
- Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$ gelten
- Das heißt $f(c) \leq 0$ und $f(c) \geq 0$, somit $f(c) = 0$. $\square$

Beweis des Zwischenwertsatzes (2)

- ...
- Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$, denn c liegt in allen Intervallen und Intervalllänge wird in jedem Schritt halbiert.
- Wegen der Stetigkeit von f folgt weiterhin $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$.
- Nach Konstruktion gilt aber $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) \geq 0$ für alle n (Beweis durch Induktion).
- Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$ gelten
- Das heißt $f(c) \leq 0$ und $f(c) \geq 0$, somit $f(c) = 0$. □

Beweis des Zwischenwertsatzes (2)

- ...
- Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$, denn c liegt in allen Intervallen und Intervalllänge wird in jedem Schritt halbiert.
- Wegen der Stetigkeit von f folgt weiterhin $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$.
- Nach Konstruktion gilt aber $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) \geq 0$ für alle n (Beweis durch Induktion).
- Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$ gelten
- Das heißt $f(c) \leq 0$ und $f(c) \geq 0$, somit $f(c) = 0$. $\square$

Bemerkung zum Beweis

Aus dem Beweis des Satzes kann man einen Algorithmus zur näherungsweise Berechnung von Nullstellen von Funktionen ablesen.

Zwischenwertsatz, verallgemeinert

Satz

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, seien $a < b$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ Zahlen mit $f(a) < y_0$ und $f(b) > y_0$. Dann gibt es eine Zahl $c \in [a, b]$ mit $f(c) = y_0$.

Beweis.

- Definiere $g(x) = f(x) - y_0$.
- Wende Zwischenwertsatz für g an: Es gibt $x \in [a, b]$ mit $g(c) = 0$.
- Nach Definition von g gilt dann $f(c) - y_0 = 0$, also $f(c) = y_0$, was zu zeigen war. □

Monotonie und Umkehrfunktion

Definition

Eine Funktion f ist ...

- **monoton steigend**, wenn aus $x < y$ folgt $f(x) \leq f(y)$.
- **monoton fallend**, wenn aus $x < y$ folgt $f(x) \geq f(y)$.
- **streng monoton steigend**, wenn aus $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$.
- **streng monoton fallend**, wenn aus $x < y$ folgt $f(x) > f(y)$.

Beispiele:

- x^3 und $\sqrt{x}$ sind streng monoton steigend (und monoton steigend)
- $\lfloor x \rfloor$ ist monoton steigend, nicht streng
- $\frac{1}{x}$ eingeschränkt auf positive reelle Zahlen ist streng monoton fallend.

Umkehrfunktion

Definition (Umkehrfunktion)

Sei $f\colon D \to W$ eine Funktion. Eine Funktion $g\colon W \to D$ heißt **Umkehrfunktion** von f falls $f(x) = y$ genau dann, wenn $g(y) = x$ (für alle $x \in D$ und $y \in W$).

Satz

Ist $g\colon W \to D$ Umkehrfunktion von $f\colon D \to W$, so gilt $g(f(x)) = x$ und $f(g(y)) = y$ für alle $x \in D$ und $y \in W$.

Beweis.

- Nach Definition gilt $g(f(x)) = x$ genau dann, wenn $f(x) = f(x)$, was aber offensichtlich wahr ist.
- Analog gilt $f(g(y)) = y$ genau dann, wenn $g(y) = g(y)$, was ebenfalls wahr ist. $\square$

Monotonie

Satz

Sei $f\colon D \to W$ streng monoton steigend und W so gewählt, dass jedes Element von W auch tatsächlich als Funktionswert auftritt. Dann hat f eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion $f^{-1}\colon W \to D$, die ebenfalls streng monoton steigend ist.

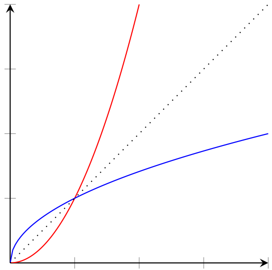
Beweis.

- Nach Annahme gibt es für jedes $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$. Da f streng monoton steigend, gibt es genau ein solches x. Definiere Umkehrfunktion $g(y) = x$ falls $f(x) = y$.
- Für Monotonie zeige: f. a. $y_1, y_2 \in W$ mit $y_1 < y_2$ gilt: $g(y_1) < g(y_2)$.
- Angenommen $y_1 < y_2$ und $g(y_1) \geq g(y_2)$. Mit Monotonie von f: $f(g(y_1)) \geq f(g(y_2))$. Da g Umkehrfunktion von f: $f(g(y_1)) = y_1$ und $f(g(y_2)) = y_2$, also auch $y_1 \geq y_2$. Widerspruch zu $y_1 < y_2$. $\square$

Beispiele

- Sei $f(x) = x^2$ mit $D = W = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- Dann gilt $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
- Für $f(x) = x^2$ mit $D = \mathbb{R}$, ist f nicht monoton und hat keine Umkehrfunktion.

Bemerkung: Man erhält den Graphen der Umkehrfunktion aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der 45 Grad steilen Ursprungsgeraden.



Achtung:

- Die Notation $f^{-1}(x)$ nicht mit $f(x)^{-1}$ verwechseln.
- Die Notation $f(x)^{-1}$ steht für $\frac{1}{f(x)}$,
- Die Notation $f^{-1}(x)$ bezeichnet den Wert der Umkehrfunktion von f im Punkt x.

Monotonie der Exponentialfunktion

Satz 6.25

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist streng monoton steigend.

Beweis.

- Sei $x < y$.
- Dann ist $y - x > 0$ und es gilt $\exp(y - x) > 1$ nach Satz 6.4.
- Damit haben wir
  $\exp(y) = \exp(x + (y - x)) = \exp(x) \exp(y - x) > \exp(x)$,
  wie behauptet. $\square$

Folgerung: Wenn $\exp(x) = \exp(y)$ dann $x = y$.

Surjektivität der Exponentialfunktion

Satz 6.26

Die Exponentialfunktion nimmt jeden Wert in $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ an.

Beweis.

- Da $\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = \frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1}{2} + \ldots$ wissen wir $\exp(1) > 2$.
- Mit $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ folgt daraus $\exp(k) > 2^k$.
- Mit $\exp(-k) = \frac{1}{\exp(k)}$ folgt $\exp(-k) < \frac{1}{2^k}$.
- Sätze 3.14 und 3.15: Für jedes $y > 0$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^k} < y < 2^k$. Für dieses k gilt also $\exp(-k) < y < \exp(k)$.
- Da $\exp$ stetig ist, können wir den Zwischenwertsatz anwenden und erhalten, dass es ein x mit $-k < x < k$ und $y = \exp(x)$ gibt.
- Also haben wir gezeigt, dass $\exp$ jedes $y > 0$ als Wert annimmt. □

Surjektivität der Exponentialfunktion

Satz 6.26

Die Exponentialfunktion nimmt jeden Wert in $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ an.

Beweis.

- Da $\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = \frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1}{2} + \dots$ wissen wir $\exp(1) > 2$.
- Mit $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ folgt daraus $\exp(k) > 2^k$.
- Mit $\exp(-k) = \frac{1}{\exp(k)}$ folgt $\exp(-k) < \frac{1}{2^k}$.
- Sätze 3.14 und 3.15: Für jedes $y > 0$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^k} < y < 2^k$. Für dieses k gilt also $\exp(-k) < y < \exp(k)$.
- Da $\exp$ stetig ist, können wir den Zwischenwertsatz anwenden und erhalten, dass es ein x mit $-k < x < k$ und $y = \exp(x)$ gibt.
- Also haben wir gezeigt, dass $\exp$ jedes $y > 0$ als Wert annimmt. $\square$

Surjektivität der Exponentialfunktion

Satz 6.26

Die Exponentialfunktion nimmt jeden Wert in $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ an.

Beweis.

- Da $\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = \frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1}{2} + \ldots$ wissen wir $\exp(1) > 2$.
- Mit $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ folgt daraus $\exp(k) > 2^k$.
- Mit $\exp(-k) = \frac{1}{\exp(k)}$ folgt $\exp(-k) < \frac{1}{2^k}$.
- Sätze 3.14 und 3.15: Für jedes $y > 0$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^k} < y < 2^k$. Für dieses k gilt also $\exp(-k) < y < \exp(k)$.
- Da $\exp$ stetig ist, können wir den Zwischenwertsatz anwenden und erhalten, dass es ein x mit $-k < x < k$ und $y = \exp(x)$ gibt.
- Also haben wir gezeigt, dass $\exp$ jedes $y > 0$ als Wert annimmt. □

Surjektivität der Exponentialfunktion

Satz 6.26

Die Exponentialfunktion nimmt jeden Wert in $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ an.

Beweis.

- Da $\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = \frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1}{2} + \ldots$ wissen wir $\exp(1) > 2$.
- Mit $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ folgt daraus $\exp(k) > 2^k$.
- Mit $\exp(-k) = \frac{1}{\exp(k)}$ folgt $\exp(-k) < \frac{1}{2^k}$.
- Sätze 3.14 und 3.15: Für jedes $y > 0$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^k} < y < 2^k$. Für dieses k gilt also $\exp(-k) < y < \exp(k)$.
- Da $\exp$ stetig ist, können wir den Zwischenwertsatz anwenden und erhalten, dass es ein x mit $-k < x < k$ und $y = \exp(x)$ gibt.
- Also haben wir gezeigt, dass $\exp$ jedes $y > 0$ als Wert annimmt. □

Surjektivität der Exponentialfunktion

Satz 6.26

Die Exponentialfunktion nimmt jeden Wert in $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ an.

Beweis.

- Da $\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = \frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1}{2} + \ldots$ wissen wir $\exp(1) > 2$.
- Mit $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ folgt daraus $\exp(k) > 2^k$.
- Mit $\exp(-k) = \frac{1}{\exp(k)}$ folgt $\exp(-k) < \frac{1}{2^k}$.
- Sätze 3.14 und 3.15: Für jedes $y > 0$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^k} < y < 2^k$. Für dieses k gilt also $\exp(-k) < y < \exp(k)$.
- Da $\exp$ stetig ist, können wir den Zwischenwertsatz anwenden und erhalten, dass es ein x mit $-k < x < k$ und $y = \exp(x)$ gibt.
- Also haben wir gezeigt, dass $\exp$ jedes $y > 0$ als Wert annimmt. □

Surjektivität der Exponentialfunktion

Satz 6.26

Die Exponentialfunktion nimmt jeden Wert in $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ an.

Beweis.

- Da $\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = \frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1}{2} + \ldots$ wissen wir $\exp(1) > 2$.
- Mit $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ folgt daraus $\exp(k) > 2^k$.
- Mit $\exp(-k) = \frac{1}{\exp(k)}$ folgt $\exp(-k) < \frac{1}{2^k}$.
- Sätze 3.14 und 3.15: Für jedes $y > 0$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^k} < y < 2^k$. Für dieses k gilt also $\exp(-k) < y < \exp(k)$.
- Da $\exp$ stetig ist, können wir den Zwischenwertsatz anwenden und erhalten, dass es ein x mit $-k < x < k$ und $y = \exp(x)$ gibt.
- Also haben wir gezeigt, dass $\exp$ jedes $y > 0$ als Wert annimmt. □

Surjektivität der Exponentialfunktion

Satz 6.26

Die Exponentialfunktion nimmt jeden Wert in $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ an.

Beweis.

- Da $\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = \frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1}{2} + \ldots$ wissen wir $\exp(1) > 2$.
- Mit $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ folgt daraus $\exp(k) > 2^k$.
- Mit $\exp(-k) = \frac{1}{\exp(k)}$ folgt $\exp(-k) < \frac{1}{2^k}$.
- Sätze 3.14 und 3.15: Für jedes $y > 0$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^k} < y < 2^k$. Für dieses k gilt also $\exp(-k) < y < \exp(k)$.
- Da $\exp$ stetig ist, können wir den Zwischenwertsatz anwenden und erhalten, dass es ein x mit $-k < x < k$ und $y = \exp(x)$ gibt.
- Also haben wir gezeigt, dass $\exp$ jedes $y > 0$ als Wert annimmt. $\square$

Definition des Logarithmus

Definition (Logarithmus)

Die **Logarithmusfunktion**

$$\ln\colon \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \to \mathbb{R}$$

ist definiert als die Umkehrfunktion von $\exp$.

Wir haben also

- $\ln(\exp(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und
- $\exp(\ln(y)) = y$ für alle $y > 0$.

Definiere $e := \exp(1)$.

Rechenregeln

Satz

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \ln(1) &= 0 \\ \ln(e) &= 1 \\ \ln(xy) &= \ln(x) + \ln(y) \text{ für alle } x, y > 0 \end{aligned}$$

Beweis.

- Die ersten beiden Gleichungen folgen aus $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$ und der Definition der Umkehrfunktion:

$$\ln(1) = \ln(\exp(0)) = 0 \text{ und } \ln(e) = \ln(\exp(1)) = 1.$$

- $$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln(\exp(\ln(x))\exp(\ln(y))) \\ &= \ln(\exp(\ln(x) + \ln(y))) \\ &= \ln(x) + \ln(y) \end{aligned}$$

□

Rechenregeln

Satz

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \ln(1) &= 0 \\ \ln(e) &= 1 \\ \ln(xy) &= \ln(x) + \ln(y) \text{ für alle } x, y > 0 \end{aligned}$$

Beweis.

- Die ersten beiden Gleichungen folgen aus $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$ und der Definition der Umkehrfunktion:

  $$\ln(1) = \ln(\exp(0)) = 0 \text{ und } \ln(e) = \ln(\exp(1)) = 1.$$

- $$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln(\exp(\ln(x)) \exp(\ln(y))) \\ &= \ln(\exp(\ln(x) + \ln(y))) \\ &= \ln(x) + \ln(y) \end{aligned}$$

□

Rechenregeln

Satz

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \ln(1) &= 0 \\ \ln(e) &= 1 \\ \ln(xy) &= \ln(x) + \ln(y) \text{ für alle } x, y > 0 \end{aligned}$$

Beweis.

- Die ersten beiden Gleichungen folgen aus $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$ und der Definition der Umkehrfunktion:

  $$\ln(1) = \ln(\exp(0)) = 0 \text{ und } \ln(e) = \ln(\exp(1)) = 1.$$

- $$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln(\exp(\ln(x)) \exp(\ln(y))) \\ &= \ln(\exp(\ln(x) + \ln(y))) \\ &= \ln(x) + \ln(y) \end{aligned}$$

$\square$

Allgemeine Potenzen

Definition

Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ ist die **allgemeine Potenz** definiert durch:

$$x^y := \exp(y \ln(x))$$

- Für ganzzahlige y stimmt das mit der bisherigen Definition überein:

  Für $y \in \mathbb{N}$: $\exp(y \ln(x)) = \exp(\underbrace{\ln(x) + \ldots \ln(x)}_{y-mal})$
  $= \underbrace{\exp(\ln(x)) \cdot \ldots \cdot \exp(\ln(x))}_{y-mal}$
  $= \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{y-mal} = x^y$

  Für $y \in \mathbb{Z}, y < 0$: $\exp(y \ln(x)) = \frac{1}{\exp(-y \ln(x))} = \frac{1}{x^{-y}} = x^y$
- Es gilt $e^x = \exp(x)$ nach Definition und da $\ln(e) = 1$.

Potenzgesetze

Es gelten folgende Potenzgesetze:

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad a^{u+v} = a^u a^v$$
$$a^{u-v} = \frac{a^u}{a^v} \qquad a^{uv} = (a^u)^v \qquad a^{\frac{u}{v}} = (a^u)^{\frac{1}{v}}$$

Diese beweist man direkt mit der Definition und den Rechenregeln für $\exp$ und $\ln$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} a^{u+v} = \exp((u+v)\ln(a)) \quad &= \exp(u\ln(a) + v\ln(a)) \\ &= \exp(u\ln(a))\exp(v\ln(a)) = a^u a^v \end{aligned}$$