LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Grundlagen der Analysis

Wintersemester 2019/20

Reihen

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 20. November 2019

Partialsumme

Definition (Partialsummen)

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die n-te Partialsumme s_n definiert als

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

D.h.

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Partialsumme

Definition (Partialsummen)

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die n-te Partialsumme s_n definiert als

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

D.h.

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Beispiel: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wobei $a_n := \dfrac{1}{n+1}$

Partialsumme

Definition (Partialsummen)

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die n-te Partialsumme s_n definiert als

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

D.h.

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Beispiel: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wobei $a_n := \dfrac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 = \tfrac{1}{1} \\ s_1 &= a_0 + a_1 = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{11}{6} \\ &\dots \end{aligned}$$

Unendliche Reihen

Definition (Unendliche Reihe)

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Summen heißt **unendliche Reihe** (kurz einfach nur **Reihe**).

Unendliche Reihen

Definition (Unendliche Reihe)

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Summen heißt **unendliche Reihe** (kurz einfach nur **Reihe**).

- Wenn diese Folge konvergiert, so schreiben wir $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ für ihren Grenzwert, d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Unendliche Reihen

Definition (Unendliche Reihe)

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Summen heißt **unendliche Reihe** (kurz einfach nur **Reihe**).

- Wenn diese Folge konvergiert, so schreiben wir $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ für ihren Grenzwert, d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

- Wenn der Grenzwert nicht existiert, dann sagen wir:
  Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert nicht.
- Die Definition der bestimmten Divergenz überträgt sich vom Grenzwert der Partialsummen auf die Reihe.

Bemerkungen

Die Notation $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ wird doppelt verwendet:

- Für die Folge $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_n$ der Partialsummen (d.h. für die Reihe selbst)
- Für den Grenzwert dieser Folge, wenn er existiert.

Bemerkungen

Die Notation $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ wird doppelt verwendet:

- Für die Folge $(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k)_n$ der Partialsummen (d.h. für die Reihe selbst)
- Für den Grenzwert dieser Folge, wenn er existiert.

Entsprechende Definitionen gelten, wenn die Summation nicht mit 0, sondern mit $m \in \mathbb{N}$ beginnt:

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Bemerkungen (2)

Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können auch durch unendliche Reihen beschrieben werden, denn

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})$$

D.h. falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (bzw. die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k-1})$ konvergiert), dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k-1})$$

Beispiele: Geometrische Reihe

Satz 5.1 (Unendliche geometrische Reihe)

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Beweis.

- Es gilt $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$ (Satz 2.4)
- Außerdem gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1-x^{k+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}, \text{ da } \lim_{k\to\infty} x^{k+1} = 0 \text{ (mit Satz 3.15)} \qquad \square$$

Beispiele (2)

Der vorherige Satz erfasst alle Möglichkeiten für die Konvergenz der unendlichen geometrischen Reihe:

- Für $|x| < 1$ gilt $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
- Für $x \geq 1$ gilt $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \infty$.

Beispiele: Geometrische Reihe (2)

Satz 5.2

Es gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$

Beispiele: Geometrische Reihe (2)

Satz 5.2

Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$

Beweis.

1. Zeige mit Induktion $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (nächste Folie)
2. Anschließend verwende $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$ □

Beispiele: Geometrische Reihe (2)

Satz 5.2

Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$

Beweis.

1. Zeige mit Induktion $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (nächste Folie)
2. Anschließend verwende $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$ $\square$

Beispiele: Geometrische Reihe (3)

Induktionsbeweis, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ (für $n \in \mathbb{N}_{>0}$) gilt.

Induktionsbasis: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

Induktionsschritt: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$$\overset{I.V.}{=} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1+n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1+n^2+2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

Beispiele: Geometrische Reihe (3)

Induktionsbeweis, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ (für $n \in \mathbb{N}_{>0}$) gilt.

Induktionsbasis: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

Induktionsschritt: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$$\overset{I.V.}{=} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1+n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1+n^2+2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

Beispiele: Geometrische Reihe (3)

Induktionsbeweis, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ (für $n \in \mathbb{N}_{>0}$) gilt.

Induktionsbasis: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

Induktionsschritt: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$$\overset{I.V.}{=} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1+n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1+n^2+2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

Beispiele: Geometrische Reihe (3)

Induktionsbeweis, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ (für $n \in \mathbb{N}_{>0}$) gilt.

Induktionsbasis: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

Induktionsschritt: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$$\overset{I.V.}{=} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1+n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1+n^2+2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

Beispiele: Geometrische Reihe (3)

Induktionsbeweis, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ (für $n \in \mathbb{N}_{>0}$) gilt.

Induktionsbasis: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

Induktionsschritt: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$$\stackrel{I.V.}{=} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1+n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1+n^2+2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

Beispiele: Geometrische Reihe (3)

Induktionsbeweis, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ (für $n \in \mathbb{N}_{>0}$) gilt.

Induktionsbasis: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

Induktionsschritt: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$$\overset{I.V.}{=} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1+n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1+n^2+2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

Beispiele: Geometrische Reihe (3)

Induktionsbeweis, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ (für $n \in \mathbb{N}_{>0}$) gilt.

Induktionsbasis: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

Induktionsschritt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$$\stackrel{I.V.}{=} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1+n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1+n^2+2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

Beispiele: Harmonische Reihe

Satz 5.3 (Unendliche harmonische Reihe)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergiert nicht.

Beweis:

- Zeige per Induktion über n: $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$
- (und schließe anschließend $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}$ divergiert).

Beispiele: Harmonische Reihe

Satz 5.3 (Unendliche harmonische Reihe)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergiert nicht.

Beweis:

- Zeige per Induktion über n: $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$
- (und schließe anschließend $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}$ divergiert).

Beispiele: Harmonische Reihe (2)

Induktionsbeweis für die Aussage $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

Induktionsanfang $n = 1$: $\frac{1}{1} \geq \frac{1}{2}$

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \overset{I.V.}{\geq} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + ((2^{n+1} - 1) - (2^n - 1)) \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + ((2^{n+1} - 2^n) \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + (2^n(2-1)) \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Beispiele: Harmonische Reihe (2)

Induktionsbeweis für die Aussage $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

Induktionsanfang $n = 1$: $\frac{1}{1} \geq \frac{1}{2}$

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \overset{I.V.}{\geq} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + ((2^{n+1} - 1) - (2^n - 1))\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + ((2^{n+1} - 2^n)\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + (2^n(2-1))\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Beispiele: Harmonische Reihe (2)

Induktionsbeweis für die Aussage $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

Induktionsanfang $n = 1$: $\displaystyle\frac{1}{1} \geq \frac{1}{2}$

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \overset{I.V.}{\geq} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + ((2^{n+1} - 1) - (2^n - 1))\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + ((2^{n+1} - 2^n)\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + (2^n(2-1))\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Beispiele: Harmonische Reihe (2)

Induktionsbeweis für die Aussage $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

Induktionsanfang $n = 1$: $\frac{1}{1} \geq \frac{1}{2}$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \overset{I.V.}{\geq} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{n}{2} + ((2^{n+1}-1) - (2^n-1))\frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{n}{2} + ((2^{n+1} - 2^n)\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + (2^n(2-1))\frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

Beispiele: Harmonische Reihe (2)

Induktionsbeweis für die Aussage $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

Induktionsanfang $n = 1$: $\displaystyle\frac{1}{1} \geq \frac{1}{2}$

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \overset{I.V.}{\geq} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + ((2^{n+1} - 1) - (2^n - 1))\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + ((2^{n+1} - 2^n)\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + (2^n(2-1))\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Beispiele: Harmonische Reihe (2)

Induktionsbeweis für die Aussage $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

Induktionsanfang $n = 1$: $\displaystyle\frac{1}{1} \geq \frac{1}{2}$

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \overset{I.V.}{\geq} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + \left(\left(2^{n+1} - 1\right) - \left(2^n - 1\right)\right) \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + \left(\left(2^{n+1} - 2^n\right)\right) \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \left(2^n (2 - 1)\right) \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Beispiele: Harmonische Reihe (2)

Induktionsbeweis für die Aussage $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

Induktionsanfang $n = 1$: $\displaystyle\frac{1}{1} \geq \frac{1}{2}$

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \overset{I.V.}{\geq} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + ((2^{n+1} - 1) - (2^n - 1))\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + ((2^{n+1} - 2^n)\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + (2^n(2-1))\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Beispiele: Harmonische Reihe (2)

Induktionsbeweis für die Aussage $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

Induktionsanfang $n = 1$: $\frac{1}{1} \geq \frac{1}{2}$

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \overset{I.V.}{\geq} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + ((2^{n+1} - 1) - (2^n - 1))\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + ((2^{n+1} - 2^n)\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + (2^n(2-1))\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Beispiele: Harmonische Reihe (2)

Induktionsbeweis für die Aussage $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

Induktionsanfang $n = 1$: $\dfrac{1}{1} \geq \dfrac{1}{2}$

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \overset{I.V.}{\geq} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + ((2^{n+1}-1)-(2^n-1))\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + ((2^{n+1}-2^n)\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + (2^n(2-1))\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Beispiele: Harmonische Reihe (2)

Induktionsbeweis für die Aussage $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

Induktionsanfang $n = 1$: $\displaystyle\frac{1}{1} \geq \frac{1}{2}$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \overset{I.V.}{\geq} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{n}{2} + ((2^{n+1} - 1) - (2^n - 1)) \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{n}{2} + ((2^{n+1} - 2^n) \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + (2^n(2-1)) \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

Beispiele

Satz 5.4

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert (gegen $\frac{\pi}{6}$).

Beweis: Techniken fehlen noch.

Rechenregeln

Satz 5.5

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und sei $u \in \mathbb{R}$.

Dann gelten die Gleichungen:

$$u \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} u a_k, \qquad \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k).$$

Insbesondere sind die Reihen auf den rechten Seiten der Gleichungen konvergent.

Beispiel: Unendliche Dezimalbrüche

Unendliche Dezimalbrüche lassen mithilfe von speziellen Reihen darstellen. Z.B. lässt sich $0,8\overline{12}$ darstellen als

$$\frac{8}{10} + \frac{12}{1000} + \frac{12}{100000} + \ldots = \frac{8}{10} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{10^{3+2k}}$$

Beispiel: Unendliche Dezimalbrüche

Unendliche Dezimalbrüche lassen mithilfe von speziellen Reihen darstellen. Z.B. lässt sich $0,8\overline{12}$ darstellen als

$$\frac{8}{10} + \frac{12}{1000} + \frac{12}{100000} + \ldots = \frac{8}{10} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{10^{3+2k}}$$

Mit den Rechenregeln und dem Grenzwert der unendlichen geometrischen Reihe kann man umformen:

$$\frac{8}{10} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{10^{3+2k}} = \frac{8}{10} + \frac{12}{10^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2k}} = \frac{8}{10} + \frac{12}{10^3} \sum_{k=0}^{\infty} (10^{-2})^k$$

$$= \frac{8}{10} + \frac{12}{10^3} \cdot \frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{8}{10} + \frac{12}{10^3} \cdot \frac{100}{99} = \frac{8}{10} + \frac{12}{990}$$

$$= \frac{8}{10} + \frac{2}{165} = \frac{4}{5} + \frac{2}{165} = \frac{4 \cdot 33}{165} + \frac{2}{165} = \frac{134}{165}$$

Beispiel: Unendliche Dezimalbrüche

Unendliche Dezimalbrüche lassen mithilfe von speziellen Reihen darstellen. Z.B. lässt sich $0,8\overline{12}$ darstellen als

$$\frac{8}{10} + \frac{12}{1000} + \frac{12}{100000} + \ldots = \frac{8}{10} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{10^{3+2k}}$$

Mit den Rechenregeln und dem Grenzwert der unendlichen geometrischen Reihe kann man umformen:

$$\frac{8}{10} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{10^{3+2k}} = \frac{8}{10} + \frac{12}{10^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2k}} = \frac{8}{10} + \frac{12}{10^3} \sum_{k=0}^{\infty} (10^{-2})^k$$

$$= \frac{8}{10} + \frac{12}{10^3} \cdot \frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{8}{10} + \frac{12}{10^3} \cdot \frac{100}{99} = \frac{8}{10} + \frac{12}{990}$$

$$= \frac{8}{10} + \frac{2}{165} = \frac{4}{5} + \frac{2}{165} = \frac{4 \cdot 33}{165} + \frac{2}{165} = \frac{134}{165}$$

Beispiel: Unendliche Dezimalbrüche

Unendliche Dezimalbrüche lassen mithilfe von speziellen Reihen darstellen. Z.B. lässt sich $0,8\overline{12}$ darstellen als

$$\frac{8}{10} + \frac{12}{1000} + \frac{12}{100000} + \ldots = \frac{8}{10} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{10^{3+2k}}$$

Mit den Rechenregeln und dem Grenzwert der unendlichen geometrischen Reihe kann man umformen:

$$\frac{8}{10} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{10^{3+2k}} = \frac{8}{10} + \frac{12}{10^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2k}} = \frac{8}{10} + \frac{12}{10^3} \sum_{k=0}^{\infty} (10^{-2})^k$$

$$= \frac{8}{10} + \frac{12}{10^3} \cdot \frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{8}{10} + \frac{12}{10^3} \cdot \frac{100}{99} = \frac{8}{10} + \frac{12}{990}$$

$$= \frac{8}{10} + \frac{2}{165} = \frac{4}{5} + \frac{2}{165} = \frac{4 \cdot 33}{165} + \frac{2}{165} = \frac{134}{165}$$

Beispiel: Unendliche Dezimalbrüche

Unendliche Dezimalbrüche lassen mithilfe von speziellen Reihen darstellen. Z.B. lässt sich $0,8\overline{12}$ darstellen als

$$\frac{8}{10}+\frac{12}{1000}+\frac{12}{100000}+\ldots=\frac{8}{10}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{12}{10^{3+2k}}$$

Mit den Rechenregeln und dem Grenzwert der unendlichen geometrischen Reihe kann man umformen:

$$\frac{8}{10}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{12}{10^{3+2k}}=\frac{8}{10}+\frac{12}{10^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^{2k}}=\frac{8}{10}+\frac{12}{10^3}\sum_{k=0}^{\infty}(10^{-2})^k$$

$$=\frac{8}{10}+\frac{12}{10^3}\cdot\frac{1}{1-10^{-2}}=\frac{8}{10}+\frac{12}{10^3}\cdot\frac{100}{99}=\frac{8}{10}+\frac{12}{990}$$

$$=\frac{8}{10}+\frac{2}{165}=\frac{4}{5}+\frac{2}{165}=\frac{4\cdot 33}{165}+\frac{2}{165}=\frac{134}{165}$$

Beispiel: Unendliche Dezimalbrüche

Unendliche Dezimalbrüche lassen mithilfe von speziellen Reihen darstellen. Z.B. lässt sich $0,8\overline{12}$ darstellen als

$$\frac{8}{10}+\frac{12}{1000}+\frac{12}{100000}+\ldots=\frac{8}{10}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{12}{10^{3+2k}}$$

Mit den Rechenregeln und dem Grenzwert der unendlichen geometrischen Reihe kann man umformen:

$$\frac{8}{10}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{12}{10^{3+2k}}=\frac{8}{10}+\frac{12}{10^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^{2k}}=\frac{8}{10}+\frac{12}{10^3}\sum_{k=0}^{\infty}(10^{-2})^k$$

$$=\frac{8}{10}+\frac{12}{10^3}\cdot\frac{1}{1-10^{-2}}=\frac{8}{10}+\frac{12}{10^3}\cdot\frac{100}{99}=\frac{8}{10}+\frac{12}{990}$$

$$=\frac{8}{10}+\frac{2}{165}=\frac{4}{5}+\frac{2}{165}=\frac{4\cdot 33}{165}+\frac{2}{165}=\frac{134}{165}$$

Beispiel: Unendliche Dezimalbrüche (2)

Zeige $0,\overline{9} = 1$:

$$
\begin{aligned}
0,\overline{9} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = -9 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{9}{10^k} \\
&= -9 + 9 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = -9 + 9 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \\
&= -9 + 9 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}}\right) = -9 + 9 \left(\frac{1}{\frac{9}{10}}\right) \\
&= -9 + 9 \left(\frac{10}{9}\right) = -9 + 10 = 1
\end{aligned}
$$

Konvergenzkriterien

- Wir benötigen weitere Mittel und Wege, um nachzuweisen, dass Reihen konvergieren
- Wir betrachten hierbei nur eine Auswahl der Methoden
- Beachte: Konvergenz nachweisen und den Grenzwert selbst berechnen sind zwei unterschiedliche Problemstellungen

Absolute Konvergenz

Definition

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergiert absolut**,

falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Absolute Konvergenz: Eigenschaften

Satz 5.8

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

Absolute Konvergenz: Eigenschaften

Satz 5.8

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

Beachte:

- Die Umkehrung gilt nicht: Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren
- Z.B. ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergent
- Aber $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

Satz 5.8, Vorarbeiten

Uns fehlen noch Techniken zum Beweis von Satz 5.8,
da er eine Aussage über die Existenz eines Grenzwerts ist,
ohne den Grenzwert konkret anzugeben.

Daher: Zunächst Satz von Cauchy.

Satz von Cauchy

Satz 5.9 (Cauchy)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|a_N - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

Satz von Cauchy

Satz 5.9 (Cauchy)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|a_N - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

Beweis (Skizze).

"$\Rightarrow$":

- Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
- Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und sei $\varepsilon > 0$.
- Wegen Konvergenz gibt es $N' \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N'$.
- Sei $N = N' + 1$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} |a_N - a_n| &= |a_N - a + a - a_n| \\ &\leq |a_N - a| + |a - a_n| \\ &= |a_N - a| + |a_n - a| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n > N$.

Satz von Cauchy

Satz 5.9 (Cauchy)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|a_N - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

Beweis (Skizze).

"$\Rightarrow$":

- Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
- Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und sei $\varepsilon > 0$.
- Wegen Konvergenz gibt es $N' \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N'$.
- Sei $N = N' + 1$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} |a_N - a_n| &= |a_N - a + a - a_n| \\ &\leq |a_N - a| + |a - a_n| \\ &= |a_N - a| + |a_n - a| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n > N$.

Satz von Cauchy

Satz 5.9 (Cauchy)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|a_N - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

Beweis (Skizze).

"$\Rightarrow$":

- Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
- Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und sei $\varepsilon > 0$.
- Wegen Konvergenz gibt es $N' \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N'$.
- Sei $N = N' + 1$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}|a_N - a_n| &= |a_N - a + a - a_n| \\ &\leq |a_N - a| + |a - a_n| \\ &= |a_N - a| + |a_n - a| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $n > N$.

Satz von Cauchy

Satz 5.9 (Cauchy)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|a_N - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

Beweis (Skizze).
"$\Rightarrow$":

- Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
- Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und sei $\varepsilon > 0$.
- Wegen Konvergenz gibt es $N' \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N'$.
- Sei $N = N' + 1$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} |a_N - a_n| &= |a_N - a + a - a_n| \\ &\le |a_N - a| + |a - a_n| \\ &= |a_N - a| + |a_n - a| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n > N$.

Satz von Cauchy

Satz 5.9 (Cauchy)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|a_N - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

Beweis (Skizze).

"$\Rightarrow$":

- Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
- Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und sei $\varepsilon > 0$.
- Wegen Konvergenz gibt es $N' \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N'$.
- Sei $N = N' + 1$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} |a_N - a_n| &= |a_N - a + a - a_n| \\ &\leq |a_N - a| + |a - a_n| \\ &= |a_N - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n > N$.

Satz von Cauchy (2)

"$\Leftarrow$" (Skizze):

Zeige: Wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass
$|a_N - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt, dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Satz von Cauchy (2)

"$\Leftarrow$" (Skizze):

Zeige: Wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$|a_N - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt, dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Mit der Annahme können wir natürliche Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ finden, sodass $|a_{n_k} - a_n| < \frac{1}{2^k}$ für alle $n > n_k$ gilt.
- D.h. Intervall $I_k = [a_{n_k} - \frac{1}{2^k}, a_{n_k} + \frac{1}{2^k}]$ enthält alle a_n mit Index $n > n_k$.
- Intervalle $I_1, I_2, I_3, \ldots$ bilden eine Intervallschachtelung, denn

  a) Sei $x \in I_{k+1}$. Dann gilt $|a_{n_{k+1}} - x| \leq \frac{1}{2^k}$ und $|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < \frac{1}{2^k}$ (da $n_{k+1} > n_k$).
  Mit der Dreiecksungleichung folgt dann

  $$\begin{aligned} |a_{n_k} - x| &= |(a_{n_{k+1}} - a_{n_k}) + a_{n_{k+1}} - x)| \\ &\leq |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| + |a_{n_{k+1}} - x| = |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| + |a_{n_{k+1}} - x| < \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

  Damit folgt $x \in I_k$. D.h. $I_{k+1} \subseteq I_k$.

  b) Es gilt $I_{k+1} \subset I_k$, da die Länge der Intervalle echt kleiner wird.
- Die eindeutige reelle Zahl, die in allen Intervallen enthalten ist, ist der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz von Cauchy (2)

"$\Leftarrow$" (Skizze):

Zeige: Wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$|a_N - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt, dann konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Mit der Annahme können wir natürliche Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ finden, sodass $|a_{n_k} - a_n| < \frac{1}{2^k}$ für alle $n > n_k$ gilt.
- D.h. Intervall $I_k = [a_{n_k} - \frac{1}{2^k}, a_{n_k} + \frac{1}{2^k}]$ enthält alle a_n mit Index $n > n_k$.
- Intervalle $I_1, I_2, I_3, \ldots$ bilden eine Intervallschachtelung, denn

  a) Sei $x \in I_{k+1}$. Dann gilt $|a_{n_{k+1}} - x| \leq \frac{1}{2^k}$ und $|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < \frac{1}{2^k}$ (da $n_{k+1} > n_k$).
  Mit der Dreiecksungleichung folgt dann

  $$\begin{aligned} |a_{n_k} - x| &= |(a_{n_{k+1}} - a_{n_k}) + a_{n_{k+1}} - x)| \\ &\leq |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| + |a_{n_{k+1}} - x| = |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| + |a_{n_{k+1}} - x| < \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

  Damit folgt $x \in I_k$. D.h. $I_{k+1} \subseteq I_k$.

  b) Es gilt $I_{k+1} \subset I_k$, da die Länge der Intervalle echt kleiner wird.
- Die eindeutige reelle Zahl, die in allen Intervallen enthalten ist, ist der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Satz von Cauchy (2)

"$\Leftarrow$" (Skizze):

Zeige: Wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$|a_N - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt, dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Mit der Annahme können wir natürliche Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ finden, sodass $|a_{n_k} - a_n| < \frac{1}{2^k}$ für alle $n > n_k$ gilt.
- D.h. Intervall $I_k = [a_{n_k} - \frac{1}{2^k}, a_{n_k} + \frac{1}{2^k}]$ enthält alle a_n mit Index $n > n_k$.
- Intervalle $I_1, I_2, I_3, \dots$ bilden eine Intervallschachtelung, denn

  a) Sei $x \in I_{k+1}$. Dann gilt $|a_{n_{k+1}} - x| \leq \frac{1}{2^k}$ und $|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < \frac{1}{2^k}$ (da $n_{k+1} > n_k$).
  Mit der Dreiecksungleichung folgt dann

$$\begin{aligned}|a_{n_k} - x| &= |(a_{n_{k+1}} - a_{n_k}) + a_{n_{k+1}} - x)| \\ &\leq |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| + |a_{n_{k+1}-x}| = |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| + |a_{n_{k+1}} - x| < \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}\end{aligned}$$

  Damit folgt $x \in I_k$. D.h. $I_{k+1} \subseteq I_k$.

  b) Es gilt $I_{k+1} \subset I_k$, da die Länge der Intervalle echt kleiner wird.
- Die eindeutige reelle Zahl, die in allen Intervallen enthalten ist, ist der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz von Cauchy (2)

"$\Leftarrow$" (Skizze):

Zeige: Wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$|a_N - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt, dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Mit der Annahme können wir natürliche Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ finden, sodass $|a_{n_k} - a_n| < \frac{1}{2^k}$ für alle $n > n_k$ gilt.
- D.h. Intervall $I_k = [a_{n_k} - \frac{1}{2^k}, a_{n_k} + \frac{1}{2^k}]$ enthält alle a_n mit Index $n > n_k$.
- Intervalle $I_1, I_2, I_3, \ldots$ bilden eine Intervallschachtelung, denn
  a) Sei $x \in I_{k+1}$. Dann gilt $|a_{n_{k+1}} - x| \leq \frac{1}{2^k}$ und $|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < \frac{1}{2^k}$ (da $n_{k+1} > n_k$).
  Mit der Dreiecksungleichung folgt dann

$$\begin{aligned} |a_{n_k} - x| &= |(a_{n_{k+1}} - a_{n_k}) + a_{n_{k+1}} - x)| \\ &\leq |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| + |a_{n_{k+1} - x}| = |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| + |a_{n_{k+1}} - x| < \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-}} \end{aligned}$$

  Damit folgt $x \in I_k$. D.h. $I_{k+1} \subseteq I_k$.

  b) Es gilt $I_{k+1} \subset I_k$, da die Länge der Intervalle echt kleiner wird.
- Die eindeutige reelle Zahl, die in allen Intervallen enthalten ist, ist der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz von Cauchy (2)

"$\Leftarrow$" (Skizze):

Zeige: Wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$|a_N - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt, dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Mit der Annahme können wir natürliche Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ finden, sodass $|a_{n_k} - a_n| < \frac{1}{2^k}$ für alle $n > n_k$ gilt.
- D.h. Intervall $I_k = [a_{n_k} - \frac{1}{2^k}, a_{n_k} + \frac{1}{2^k}]$ enthält alle a_n mit Index $n > n_k$.
- Intervalle $I_1, I_2, I_3, \ldots$ bilden eine Intervallschachtelung, denn

  a) Sei $x \in I_{k+1}$. Dann gilt $|a_{n_{k+1}} - x| \leq \frac{1}{2^k}$ und $|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < \frac{1}{2^k}$ (da $n_{k+1} > n_k$).
  Mit der Dreiecksungleichung folgt dann

$$\begin{aligned}|a_{n_k} - x| &= |(a_{n_{k+1}} - a_{n_k}) + a_{n_{k+1}} - x)| \\ &\leq |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| + |a_{n_{k+1}-x}| = |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| + |a_{n_{k+1}} - x| < \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-}}\end{aligned}$$

  Damit folgt $x \in I_k$. D.h. $I_{k+1} \subseteq I_k$.

  b) Es gilt $I_{k+1} \subset I_k$, da die Länge der Intervalle echt kleiner wird.
- Die eindeutige reelle Zahl, die in allen Intervallen enthalten ist, ist der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz von Cauchy (2)

"$\Leftarrow$" (Skizze):

Zeige: Wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$|a_N - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt, dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Mit der Annahme können wir natürliche Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ finden, sodass $|a_{n_k} - a_n| < \frac{1}{2^k}$ für alle $n > n_k$ gilt.
- D.h. Intervall $I_k = [a_{n_k} - \frac{1}{2^k}, a_{n_k} + \frac{1}{2^k}]$ enthält alle a_n mit Index $n > n_k$.
- Intervalle $I_1, I_2, I_3, \ldots$ bilden eine Intervallschachtelung, denn
  a) Sei $x \in I_{k+1}$. Dann gilt $|a_{n_{k+1}} - x| \leq \frac{1}{2^k}$ und $|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < \frac{1}{2^k}$ (da $n_{k+1} > n_k$).
  Mit der Dreiecksungleichung folgt dann

$$\begin{aligned} |a_{n_k} - x| &= |(a_{n_{k+1}} - a_{n_k}) + a_{n_{k+1}} - x)| \\ &\leq |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| + |a_{n_{k+1}-x}| = |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| + |a_{n_{k+1}} - x| < \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-}} \end{aligned}$$

  Damit folgt $x \in I_k$. D.h. $I_{k+1} \subseteq I_k$.

  b) Es gilt $I_{k+1} \subset I_k$, da die Länge der Intervalle echt kleiner wird.
- Die eindeutige reelle Zahl, die in allen Intervallen enthalten ist, ist der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis von Satz 5.8

Wir zeigen Satz 5.8 „Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.“

- Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.
- Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen $N \in \mathbb{N}$ finden, sodass $\left|\sum_{k=0}^{N} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ für alle $n > N$.
- Da $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, liefert Satz 5.9 ein N,

  sodass $\left|\sum_{k=0}^{N} |a_k| - \sum_{k=0}^{n} |a_k|\right| < \varepsilon$ für alle $n > N$.
- Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir die gewünschte Ungleichung:

$$\left|\sum_{k=0}^{N} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=N+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=N+1}^{n} |a_k| = \left|\sum_{k=0}^{N} |a_k| - \sum_{k=0}^{n} |a_k|\right| < \varepsilon$$

Majorantenkriterium

Satz 5.10 (Majorantenkriterium)

Sei $\sum_{k=n}^{\infty} c_k$ eine konvergente Reihe. Dann konvergiert $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ absolut, wenn $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \geq n$ gilt.

Man sagt dann: Die Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} c_k$ ist Majorante von $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$.

Beispiel

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert absolut, denn:

- Aus Satz 5.2 wissen wir $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$ konvergiert.
- Es gilt $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$ für alle $k > 0$:
  - Offensichtlich gilt $1 \leq k$ für alle $k > 0$.
  - Daraus folgt $k + 1 \leq k + k$ und damit auch $1 \leq \frac{k+k}{k+1} = \frac{2k}{k+1}$.
  - Division durch k^2 zeigt $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$
- Daher ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$ Majorante von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$
- Majorantenkriterium liefert: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert absolut.

Beispiel

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert absolut, denn:

- Aus Satz 5.2 wissen wir $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$ konvergiert.
- Es gilt $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$ für alle $k > 0$:
  - Offensichtlich gilt $1 \leq k$ für alle $k > 0$.
  - Daraus folgt $k + 1 \leq k + k$ und damit auch $1 \leq \frac{k+k}{k+1} = \frac{2k}{k+1}$.
  - Division durch k^2 zeigt $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$
- Daher ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$ Majorante von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$
- Majorantenkriterium liefert: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert absolut.

Den Wert der Reihe kann man so aber nicht bestimmen, man weiss nur, *dass* es ihn gibt. Zur Information: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Beweis: Korrektheit des Majorantenkriteriums

- Wir zeigen: Die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt ist. (mit Satz 4.11 folgt die Konvergenz der Folge der Partialsummen und damit auch der Reihe.)
- Die Folge der Partialsummen von $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|$ ist sicher monoton wachsend, da die Summenglieder $|a_k|$ alle nichtnegativ sind.
- Mit der Annahme $|a_k| \leq c_k$ haben wir

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} c_k$$

für alle m.
- Also ist $\sum_{k=n}^{\infty} c_k$ eine obere Schranke für die Partialsummen. $\square$

Beweis: Korrektheit des Majorantenkriteriums

- Wir zeigen: Die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt ist.
(mit Satz 4.11 folgt die Konvergenz der Folge der Partialsummen und damit auch der Reihe.)
- Die Folge der Partialsummen von $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|$ ist sicher monoton wachsend, da die Summenglieder $|a_k|$ alle nichtnegativ sind.
- Mit der Annahme $|a_k| \leq c_k$ haben wir

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} c_k$$

für alle m.
- Also ist $\sum_{k=n}^{\infty} c_k$ eine obere Schranke für die Partialsummen. □

Beweis: Korrektheit des Majorantenkriteriums

- Wir zeigen: Die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt ist.
  (mit Satz 4.11 folgt die Konvergenz der Folge der Partialsummen und damit auch der Reihe.)
- Die Folge der Partialsummen von $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|$ ist sicher monoton wachsend, da die Summenglieder $|a_k|$ alle nichtnegativ sind.
- Mit der Annahme $|a_k| \leq c_k$ haben wir

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} c_k$$

  für alle m.
- Also ist $\sum_{k=n}^{\infty} c_k$ eine obere Schranke für die Partialsummen. $\square$

Beweis: Korrektheit des Majorantenkriteriums

- Wir zeigen: Die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt ist.
  (mit Satz 4.11 folgt die Konvergenz der Folge der Partialsummen und damit auch der Reihe.)
- Die Folge der Partialsummen von $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|$ ist sicher monoton wachsend, da die Summenglieder $|a_k|$ alle nichtnegativ sind.
- Mit der Annahme $|a_k| \leq c_k$ haben wir

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} c_k$$

  für alle m.
- Also ist $\sum_{k=n}^{\infty} c_k$ eine obere Schranke für die Partialsummen. □

Quotientenkriterium

Satz 5.12(Quotientenkriterium)

Die Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, wenn es eine Zahl $0 \leq q < 1$ gibt, sodass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ für fast alle k gilt (d.h. für alle bis auf endlich viele k).

Quotientenkriterium

Satz 5.12(Quotientenkriterium)

Die Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, wenn es eine Zahl $0 \leq q < 1$ gibt, sodass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ für fast alle k gilt (d.h. für alle bis auf endlich viele k).

Beweis.

- Aus der Annahme folgt: Es gibt $N \in \mathbb{N}$, mit $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ für alle $k \geq N$
- Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} |a_N| q^{k-N}$ konvergiert, da $\sum_{k=N}^{\infty} |a_N| q^{k-N} = \frac{|a_N|}{q^N} \sum_{k=N}^{\infty} q^k$ und da die geometrische Reihe für $0 \leq q < 1$ konvergiert.
- Mit $|a_k| \leq |a_N| q^{k-N}$ für $k > N$ (Beweis folgt gleich) zeigt das Majorantenkriterium, dass $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, und damit auch $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$, da höchstens noch endlich viele Summanden hinzukommen.

Quotientenkriterium

Satz 5.12(Quotientenkriterium)

Die Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, wenn es eine Zahl $0 \leq q < 1$ gibt, sodass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ für fast alle k gilt (d.h. für alle bis auf endlich viele k).

Beweis.

- Aus der Annahme folgt: Es gibt $N \in \mathbb{N}$, mit $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ für alle $k \geq N$
- Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} |a_N| q^{k-N}$ konvergiert, da $\sum_{k=N}^{\infty} |a_N| q^{k-N} = \frac{|a_N|}{q^N} \sum_{k=N}^{\infty} q^k$ und da die geometrische Reihe für $0 \leq q < 1$ konvergiert.
- Mit $|a_k| \leq |a_N| q^{k-N}$ für $k > N$ (Beweis folgt gleich) zeigt das Majorantenkriterium, dass $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, und damit auch $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$, da höchstens noch endlich viele Summanden hinzukommen.

Quotientenkriterium

Satz 5.12(Quotientenkriterium)

Die Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, wenn es eine Zahl $0 \leq q < 1$ gibt, sodass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ für fast alle k gilt (d.h. für alle bis auf endlich viele k).

Beweis.

- Aus der Annahme folgt: Es gibt $N \in \mathbb{N}$, mit $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ für alle $k \geq N$
- Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} |a_N| q^{k-N}$ konvergiert, da $\sum_{k=N}^{\infty} |a_N| q^{k-N} = \frac{|a_N|}{q^N} \sum_{k=N}^{\infty} q^k$ und da die geometrische Reihe für $0 \leq q < 1$ konvergiert.
- Mit $|a_k| \leq |a_N| q^{k-N}$ für $k > N$ (Beweis folgt gleich) zeigt das Majorantenkriterium, dass $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, und damit auch $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$, da höchstens noch endlich viele Summanden hinzukommen.

Quotientenkriterium

Satz 5.12(Quotientenkriterium)

Die Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, wenn es eine Zahl $0 \leq q < 1$ gibt, sodass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ für fast alle k gilt (d.h. für alle bis auf endlich viele k).

Beweis.

- Aus der Annahme folgt: Es gibt $N \in \mathbb{N}$, mit $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ für alle $k \geq N$
- Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} |a_N| q^{k-N}$ konvergiert, da $\sum_{k=N}^{\infty} |a_N| q^{k-N} = \frac{|a_N|}{q^N} \sum_{k=N}^{\infty} q^k$ und da die geometrische Reihe für $0 \leq q < 1$ konvergiert.
- Mit $|a_k| \leq |a_N| q^{k-N}$ für $k > N$ (Beweis folgt gleich) zeigt das Majorantenkriterium, dass $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, und damit auch $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$, da höchstens noch endlich viele Summanden hinzukommen.

Quotientenkriterium (2)

Fehlender Beweis, dass $|a_k| \leq |a_N| q^{k-N}$ für alle $k > N$.

- Verwende Induktion über k.
- Induktionsanfang $k = N + 1$:
  $|a_{N+1}| \leq |a_N| q$ folgt direkt aus $\left|\frac{a_{(N+1)}}{a_N}\right| \leq q$
- Induktionsschritt $k \to k + 1$, $k > N$

$$
\begin{aligned}
|a_{k+1}| &\leq |a_k| q && \text{wegen } \left|a_{(k+1)}/a_k\right| \leq q \\
&\leq |a_N| q^{k-N} q && \text{nach Induktionsannahme} \\
&= |a_N| q^{k+1-N}
\end{aligned}
$$

Quotientenkriterium (2)

Fehlender Beweis, dass $|a_k| \leq |a_N| q^{k-N}$ für alle $k > N$.

- Verwende Induktion über k.
- Induktionsanfang $k = N + 1$:
  $|a_{N+1}| \leq |a_N| q$ folgt direkt aus $\left|\frac{a_{(N+1)}}{a_N}\right| \leq q$
- Induktionsschritt $k \to k + 1$, $k > N$

$$
\begin{aligned}
|a_{k+1}| &\leq |a_k| q && \text{wegen } \left|a_{(k+1)}/a_k\right| \leq q \\
&\leq |a_N| q^{k-N} q && \text{nach Induktionsannahme} \\
&= |a_N| q^{k+1-N}
\end{aligned}
$$

Quotientenkriterium (2)

Fehlender Beweis, dass $|a_k| \leq |a_N| q^{k-N}$ für alle $k > N$.

- Verwende Induktion über k.
- Induktionsanfang $k = N + 1$:
  $|a_{N+1}| \leq |a_N| q$ folgt direkt aus $\left| \frac{a_{(N+1)}}{a_N} \right| \leq q$
- Induktionsschritt $k \to k + 1$, $k > N$

$$\begin{aligned} |a_{k+1}| &\leq |a_k| q && \text{wegen } \left| a_{(k+1)}/a_k \right| \leq q \\ &\leq |a_N| q^{k-N} q && \text{nach Induktionsannahme} \\ &= |a_N| q^{k+1-N} \end{aligned}$$

Quotientenkriterium (2)

Fehlender Beweis, dass $|a_k| \leq |a_N| q^{k-N}$ für alle $k > N$.

- Verwende Induktion über k.
- Induktionsanfang $k = N + 1$:
  $|a_{N+1}| \leq |a_N| q$ folgt direkt aus $\left| \frac{a_{(N+1)}}{a_N} \right| \leq q$
- Induktionsschritt $k \to k + 1$, $k > N$

$$
\begin{aligned}
|a_{k+1}| &\leq |a_k| q && \text{wegen } \left| a_{(k+1)}/a_k \right| \leq q \\
&\leq |a_N| q^{k-N} q && \text{nach Induktionsannahme} \\
&= |a_N| q^{k+1-N}
\end{aligned}
$$

Beispiele (1)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert absolut.

Beweis. Hier gilt

$$\left| \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2},$$

also können wir das Quotientenkriterium mit $q = \frac{1}{2}$ verwenden.

Bemerkung: Der Grenzwert der Reihe ist $e = 2.71828\ldots$.

Beispiele (2)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (Exponentialreihe) konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hier gilt

$$\left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \frac{|x| \cdot k!}{(k+1)!} = \frac{|x|}{k+1} \leq \frac{1}{2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 2|x|$. Da es nur endlich viele natürliche

Zahlen $\leq 2|x|$ gibt, können wir das Quotientenkriterium ebenfalls mit $q = \frac{1}{2}$ verwenden.

Bemerkung: Der Grenzwert der Reihe ist e^x.

Bemerkungen

Beachte: Es genügt im Quotientenkriterium **nicht** $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ zu zeigen (sondern $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q$ für ein **festes** $q < 1$)

Zum Beispiel konvergiert die harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ nicht, aber für alle k gilt:

$$\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} < 1$$

Leibnizsches Kriterium

Satz (Leibnizsches Kriterium)

Sei $(a_k)_{k \geq n}$ eine Folge mit $a_k \geq 0$ und $a_k \geq a_{k+1}$ für alle $k \geq n$. Gilt weiterhin $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k \quad .$$

Beweis: Siehe z.B. Forster

Beispiel

Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium (mit $a_k = \frac{1}{k}$).

Bemerkung: Über den Grenzwert macht das Kriterium wie immer keine Aussage. Hier ist er $\ln(2)$.

Bemerkungen

- Beachte, dass man aus $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ allein **nicht** schließen kann, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert.

  Die harmonische Reihe ist ein Gegenbeispiel.

- Es gibt noch weitere Konvergenzkriterien (z.B. Cauchy-Kriterium, Wurzelkriterium).

- Auch wenn keines der Kriterien anwendbar ist, kann es noch sein, dass eine Reihe konvergiert.

  Dann muss man direkt mit der Grenzwertdefinition arbeiten.