

Reihen

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik



Letzte Änderung der Folien: 20. November 2019

Unendliche Reihen

Definition (Unendliche Reihe)

Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Summen heißt **unendliche Reihe** (kurz einfach nur **Reihe**).

- Wenn diese Folge konvergiert, so schreiben wir $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ für ihren Grenzwert, d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

- Wenn der Grenzwert nicht existiert, dann sagen wir:
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert nicht.
- Die Definition der bestimmten Divergenz überträgt sich vom Grenzwert der Partialsummen auf die Reihe.

Partialsumme

Definition (Partialsummen)

Für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die n -te **Partialsumme** s_n definiert als

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

D.h.

$$s_0 = a_0$$

$$s_1 = a_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

...

Beispiel: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wobei $a_n := \frac{1}{n+1}$

$$s_0 = a_0 = \frac{1}{1}$$

$$s_1 = a_0 + a_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

...

Bemerkungen

Die Notation $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ wird doppelt verwendet:

- Für die Folge $(\sum_{k=0}^n a_k)_n$ der Partialsummen (d.h. für die Reihe selbst)
- Für den Grenzwert dieser Folge, wenn er existiert.

Entsprechende Definitionen gelten, wenn die Summation nicht mit 0, sondern mit $m \in \mathbb{N}$ beginnt:

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$$

Bemerkungen (2)

Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ können auch durch unendliche Reihen beschrieben werden, denn

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})$$

D.h. falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (bzw. die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1})$ konvergiert), dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1})$$

Beispiele (2)

Der vorherige Satz erfasst alle Möglichkeiten für die Konvergenz der unendlichen geometrischen Reihe:

- Für $|x| < 1$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
- Für $x \geq 1$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \infty$.

Beispiele: Geometrische Reihe

Satz 5.1 (Unendliche geometrische Reihe)

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Beweis.

- Es gilt $\sum_{n=0}^k x^n = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$ (Satz 2.4)

- Außerdem gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-x^{k+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}, \text{ da } \lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} = 0 \text{ (mit Satz 3.15)} \quad \square$$

Beispiele: Geometrische Reihe (2)

Satz 5.2

$$\text{Es gilt } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Beweis.

- 1 Zeige mit Induktion $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$

(nächste Folie)

- 2 Anschließend verwende $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$. □

Beispiele: Geometrische Reihe (3)

Induktionsbeweis, dass $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ (für $n \in \mathbb{N}_{>0}$) gilt.

Induktionsbasis: $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

Induktionsschritt: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

$$\begin{aligned} &\stackrel{I.V.}{=} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1+n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1+n^2+2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)} \end{aligned}$$

Beispiele: Harmonische Reihe (2)

Induktionsbeweis für die Aussage $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

Induktionsanfang $n=1$: $\frac{1}{1} \geq \frac{1}{2}$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \stackrel{I.V.}{\geq} \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{n}{2} + ((2^{n+1}-1) - (2^n-1)) \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{n}{2} + ((2^{n+1}-2^n) \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + (2^n(2-1)) \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Beispiele: Harmonische Reihe

Satz 5.3 (Unendliche harmonische Reihe)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergiert nicht.

Beweis:

- Zeige per Induktion über n : $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$
- (und schließe anschließend $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2}$ divergiert).

Beispiele

Satz 5.4

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert (gegen $\frac{\pi}{6}$).

Beweis: Techniken fehlen noch.

Satz 5.5

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und sei $u \in \mathbb{R}$.

Dann gelten die Gleichungen:

$$u \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} u a_k, \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k).$$

Insbesondere sind die Reihen auf den rechten Seiten der Gleichungen konvergent.

Beispiel: Unendliche Dezimalbrüche (2)

Zeige $0,\bar{9} = 1$:

$$\begin{aligned} 0,\bar{9} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = -9 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{9}{10^k} \\ &= -9 + 9 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = -9 + 9 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^k \\ &= -9 + 9 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right) = -9 + 9 \left(\frac{1}{\frac{9}{10}} \right) \\ &= -9 + 9 \left(\frac{10}{9} \right) = -9 + 10 = 1 \end{aligned}$$

Beispiel: Unendliche Dezimalbrüche

Unendliche Dezimalbrüche lassen mithilfe von speziellen Reihen darstellen. Z.B. lässt sich $0,8\bar{1}2$ darstellen als

$$\frac{8}{10} + \frac{12}{1000} + \frac{12}{100000} + \dots = \frac{8}{10} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{10^{3+2k}}$$

Mit den Rechenregeln und dem Grenzwert der unendlichen geometrischen Reihe kann man umformen:

$$\begin{aligned} \frac{8}{10} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{10^{3+2k}} &= \frac{8}{10} + \frac{12}{10^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2k}} = \frac{8}{10} + \frac{12}{10^3} \sum_{k=0}^{\infty} (10^{-2})^k \\ &= \frac{8}{10} + \frac{12}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-2}} = \frac{8}{10} + \frac{12}{10^3} \cdot \frac{100}{99} = \frac{8}{10} + \frac{12}{990} \\ &= \frac{8}{10} + \frac{2}{165} = \frac{4}{5} + \frac{2}{165} = \frac{4 \cdot 33}{165} + \frac{2}{165} = \frac{134}{165} \end{aligned}$$

Konvergenzkriterien

- Wir benötigen weitere Mittel und Wege, um nachzuweisen, dass Reihen konvergieren
- Wir betrachten hierbei nur eine Auswahl der Methoden
- Beachte: Konvergenz nachweisen und den Grenzwert selbst berechnen sind zwei unterschiedliche Problemstellungen

Definition

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergiert absolut**,
falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz 5.8, Vorarbeiten

Uns fehlen noch Techniken zum Beweis von Satz 5.8,
da er eine Aussage über die Existenz eines Grenzwerts ist,
ohne den Grenzwert konkret anzugeben.

Daher: Zunächst Satz von Cauchy.

Satz 5.8

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

Beachte:

- Die Umkehrung gilt nicht: Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren
- Z.B. ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergent
- Aber $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

Satz von Cauchy

Satz 5.9 (Cauchy)

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|a_N - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

Beweis (Skizze).

“ \Rightarrow ”:

- Angenommen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und sei $\varepsilon > 0$.
- Wegen Konvergenz gibt es $N' \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N'$.
- Sei $N = N' + 1$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} |a_N - a_n| &= |a_N - a + a - a_n| \\ &\leq |a_N - a| + |a - a_n| \\ &= |a_N - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n > N$.

Satz von Cauchy (2)

“ \Leftarrow ” (Skizze):

Zeige: Wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$|a_N - a_n| < \varepsilon \text{ für alle } n > N \text{ gilt, dann konvergiert } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

- Mit der Annahme können wir natürliche Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ finden, sodass $|a_{n_k} - a_n| < \frac{1}{2^k}$ für alle $n > n_k$ gilt.
- D.h. Intervall $I_k = [a_{n_k} - \frac{1}{2^k}, a_{n_k} + \frac{1}{2^k}]$ enthält alle a_n mit Index $n > n_k$.
- Intervalle I_1, I_2, I_3, \dots bilden eine Intervallschachtelung, denn
 - a) Sei $x \in I_{k+1}$. Dann gilt $|a_{n_{k+1}} - x| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ und $|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < \frac{1}{2^k}$ (da $n_{k+1} > n_k$). Mit der Dreiecksungleichung folgt dann

$$\begin{aligned} |a_{n_k} - x| &= |(a_{n_{k+1}} - a_{n_k}) + (a_{n_{k+1}} - x)| \\ &\leq |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| + |a_{n_{k+1}} - x| = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

Damit folgt $x \in I_k$. D.h. $I_{k+1} \subseteq I_k$.

b) Es gilt $I_{k+1} \subset I_k$, da die Länge der Intervalle echt kleiner wird.

- Die eindeutige reelle Zahl, die in allen Intervallen enthalten ist, ist der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Majorantenkriterium

Satz 5.10 (Majorantenkriterium)

Sei $\sum_{k=n}^{\infty} c_k$ eine konvergente Reihe. Dann konvergiert $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ absolut, wenn $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \geq n$ gilt.

Man sagt dann: Die Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} c_k$ ist Majorante von $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$.

Beweis von Satz 5.8

Wir zeigen Satz 5.8 „Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.“

- Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.
- Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen $N \in \mathbb{N}$ finden, sodass $\left| \sum_{k=0}^N a_k - \sum_{k=0}^n a_k \right| < \varepsilon$ für alle $n > N$.
- Da $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, liefert Satz 5.9 ein N , sodass $\left| \sum_{k=0}^N |a_k| - \sum_{k=0}^n |a_k| \right| < \varepsilon$ für alle $n > N$.
- Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir die gewünschte Ungleichung:

$$\left| \sum_{k=0}^N a_k - \sum_{k=0}^n a_k \right| = \left| \sum_{k=N+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=N+1}^n |a_k| = \left| \sum_{k=0}^n |a_k| - \sum_{k=0}^N |a_k| \right| < \varepsilon$$

Beispiel

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert absolut, denn:

- Aus Satz 5.2 wissen wir $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$ konvergiert.
- Es gilt $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$ für alle $k > 0$:
 - Offensichtlich gilt $1 \leq k$ für alle $k > 0$.
 - Daraus folgt $k+1 \leq k+k$ und damit auch $1 \leq \frac{k+k}{k+1} = \frac{2k}{k+1}$.
 - Division durch k^2 zeigt $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$
- Daher ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$ Majorante von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$
- Majorantenkriterium liefert: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert absolut.

Den Wert der Reihe kann man so aber nicht bestimmen, man weiss nur, dass es ihn gibt. Zur Information: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Beweis: Korrektheit des Majorantenkriteriums

- Wir zeigen: Die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt ist. (mit Satz 4.11 folgt die Konvergenz der Folge der Partialsummen und damit auch der Reihe.)
- Die Folge der Partialsummen von $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|$ ist sicher monoton wachsend, da die Summenglieder $|a_k|$ alle nichtnegativ sind.
- Mit der Annahme $|a_k| \leq c_k$ haben wir

$$\sum_{k=n}^m |a_k| \leq \sum_{k=n}^m c_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} c_k$$

für alle m .

- Also ist $\sum_{k=n}^{\infty} c_k$ eine obere Schranke für die Partialsummen. \square

Quotientenkriterium (2)

Fehlender Beweis, dass $|a_k| \leq |a_N|q^{k-N}$ für alle $k > N$.

- Verwende Induktion über k .
- Induktionsanfang $k = N + 1$:
 $|a_{N+1}| \leq |a_N|q$ folgt direkt aus $\left| \frac{a_{N+1}}{a_N} \right| \leq q$
- Induktionsschritt $k \rightarrow k + 1$, $k > N$

$$\begin{aligned} |a_{k+1}| &\leq |a_k|q && \text{wegen } |a_{(k+1)}/a_k| \leq q \\ &\leq |a_N|q^{k-N}q && \text{nach Induktionsannahme} \\ &= |a_N|q^{k+1-N} \end{aligned}$$

Quotientenkriterium

Satz 5.12(Quotientenkriterium)

Die Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, wenn es eine Zahl $0 \leq q < 1$ gibt, sodass $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$ für fast alle k gilt (d.h. für alle bis auf endlich viele k).

Beweis.

- Aus der Annahme folgt: Es gibt $N \in \mathbb{N}$, mit $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$ für alle $k \geq N$
- Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} |a_N|q^{k-N}$ konvergiert, da $\sum_{k=N}^{\infty} |a_N|q^{k-N} = \frac{|a_N|}{q^N} \sum_{k=N}^{\infty} q^k$ und da die geometrische Reihe für $0 \leq q < 1$ konvergiert.
- Mit $|a_k| \leq |a_N|q^{k-N}$ für $k > N$ (Beweis folgt gleich) zeigt das Majorantenkriterium, dass $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, und damit auch $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$, da höchstens noch endlich viele Summanden hinzukommen.

Beispiele (1)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert absolut.

Beweis. Hier gilt

$$\left| \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2},$$

also können wir das Quotientenkriterium mit $q = \frac{1}{2}$ verwenden.

Bemerkung: Der Grenzwert der Reihe ist $e = 2.71828\dots$

Beispiele (2)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (**Exponentialreihe**) konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hier gilt

$$\left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \frac{|x| \cdot k!}{(k+1)!} = \frac{|x|}{k+1} \leq \frac{1}{2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 2|x|$. Da es nur endlich viele natürliche

Zahlen $\leq 2|x|$ gibt, können wir das Quotientenkriterium ebenfalls mit $q = \frac{1}{2}$ verwenden.

Bemerkung: Der Grenzwert der Reihe ist e^x .

Leibnizsches Kriterium

Satz (Leibnizsches Kriterium)

Sei $(a_k)_{k \geq n}$ eine Folge mit $a_k \geq 0$ und $a_k \geq a_{k+1}$ für alle $k \geq n$. Gilt weiterhin $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k .$$

Beweis: Siehe z.B. Forster

Bemerkungen

Beachte: Es genügt im Quotientenkriterium **nicht** $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$ zu zeigen (sondern $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < q$ für ein **festes** $q < 1$)

Zum Beispiel konvergiert die harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ nicht, aber für alle k gilt:

$$\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} < 1$$

Beispiel

Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium (mit $a_k = \frac{1}{k}$).

Bemerkung: Über den Grenzwert macht das Kriterium wie immer keine Aussage. Hier ist er $\ln(2)$.

Bemerkungen

- Beachte, dass man aus $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ allein **nicht** schließen

kann, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Die harmonische Reihe ist ein Gegenbeispiel.

- Es gibt noch weitere Konvergenzkriterien (z.B. Cauchy-Kriterium, Wurzelkriterium).
- Auch wenn keines der Kriterien anwendbar ist, kann es noch sein, dass eine Reihe konvergiert.

Dann muss man direkt mit der Grenzwertdefinition arbeiten.