LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Grundlagen der Analysis
Wintersemester 2019/20

Folgen und Grenzwerte

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 6. November 2019

Folgen

Definition (Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch eine reelle Zahl a_n für jede natürliche Zahl n.

Notation

- Wir schreiben auch $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$.
- Wir schreiben $(a_n)_{n\geq k}$ für die Folge $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$, d.h. $(a_{k+n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiele

- $a_n := \frac{1}{n}$ definiert die Folge $(a_n)_{n\geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$.
- $a_n := (-1)^n$ definiert die Folge $(a_n)_{n\geq 1} = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$.
- $a_n := \frac{n}{n+1}$ definiert die Folge $(a_n)_{n\geq 1} = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots)$.
- $a_n := \frac{n}{2^n}$ definiert die Folge $(a_n)_{n\geq 1} = (\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \ldots)$.

Konvergenz und Grenzwert

Definition (Konvergenz einer Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gegen** $a \in \mathbb{R}$,
falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt,
sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

Die reelle Zahl a heißt dann **Grenzwert der Folge**.

Notation: Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ für den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn dieser existiert.

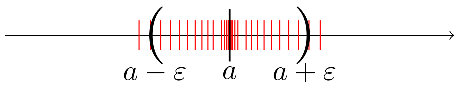
Eine Folge heißt

- **konvergent**, wenn der Grenzwert existiert
- **divergent**, wenn kein Grenzwert exisitiert

Veranschaulichung

Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besagt:

Es gibt beliebig kleine ε-Umgebungen des Grenzwertes $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, so dass fast alle (nämlich alle bis auf endlich viele) Folgenglieder in der ε-Umgebung liegen.



Beispiele

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$.
- Nach einer Konsequenz des Archimedischen Axioms (Satz 3.13) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$.
- Für alle $n > N$ gilt: $\frac{1}{n} < \frac{1}{N}$.
- Daher gilt sicher auch $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n > N$
- und damit gilt $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n > N$

Beispiele (2)

$(n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Grenzwert (divergiert).

Beweis durch Widerspruch:

- Angenommen a sei der Grenzwert.
- Sei $k = \lfloor a \rfloor + 1$
- Dann gilt $k \geq a$ und $|(k+i) - a| \geq 1$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots\}$
- D.h. z.B. für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt es kein N, sodass $|a_n - a| = |n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$ (denn für alle $n > k$ ist $|a_n - a| = |n - a| \geq 1 > \frac{1}{2}$).
- Daher existiert a nicht.

Beispiele (3)

$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Grenzwert (divergiert).

Beweis durch Widerspruch:

- Angenommen a wäre ein Grenzwert.
- Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ müsste dann $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle hinreichend großen n gelten.
- Da die Folge immer abwechselnd die Werte 1 und -1 annimmt, bedeutet das: $|1 - a| < \varepsilon$ und $|-1-a| < \varepsilon$. Mit der Dreiecksungleichung folgt daraus aber $2 = |1-a+a+1| \leq |1-a| + |a+1| = |1-a| + |-a-1| \leq 2\varepsilon$, also $1 \leq \varepsilon$, was für beliebiges $\varepsilon > 0$ sicher nicht wahr ist.
- Unsere Annahme, dass a ein Grenzwert der Folge ist, muss also falsch gewesen sein.

Beispiele (4)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Beweis:

- Sei $\varepsilon > 0$.
- Nach Satz 3.13 gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$
- Damit ist auch $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ für alle $n > N$
- Damit ist auch $|\frac{n}{n+1} - 1| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ für alle $n > N$

Beispiele (5)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

Beweis:

- Zeige zunächst $\frac{n}{2^n} < \frac{1}{n}$ für alle $n > 4$:
  - Zeige die äquivalente Aussage $n^2 < 2^n$ für alle $n > 4$ durch Induktion über n
  - $n = 5$ gilt, da $5^2 = 25 < 32 = 2^5$
  - Induktionsschritt $n \to n+1$ für $n \geq 5$: $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 3n < n^2 + n \cdot n = 2n^2 \overset{I.V.}{<} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$
- Sei $\varepsilon > 0$. Aus $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, wissen wir: Es gibt $N \in \mathbb{N}$: $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n > N$
- Daher gibt es auch $N' \in \mathbb{N}$ mit $|\frac{n}{2^n} - 0| = \frac{n}{2^n} - 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n > N'$

Einzigartigkeit des Grenzwerts

Satz

Jede Folge hat höchstens einen Grenzwert.

Beweis. Durch Widerspruch

- Annahme: a und a' sind verschiedene Grenzwerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Setze $\varepsilon := \frac{|a-a'|}{2}$.
- Da $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$.
- Da $a' = \lim_{n\to\infty} a_n$, gibt es $N' \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a'| < \varepsilon$ für alle $n > N'$.
- Für alle $n > \max(N, N')$ gelten beide Ungleichungen.
- Daher durch Addition: $|a_n - a'| + |a_n - a| < 2\varepsilon$.
- Mit der Dreiecksungleichung:
  $|a - a'| = |(a_n - a') + (a - a_n)|$
  $\leq |a_n - a'| + |a - a_n| = |a_n - a'| + |a_n - a| < 2\varepsilon = |a - a'|$
- D.h. $|a - a'| < |a - a'|$. Widerspruch wegen (O1) $\square$.

Rechenregeln

Satz 4.5

Für alle konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

- $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) + (\lim_{n\to\infty} b_n)$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$

Beweis. Wir zeigen den ersten Fall (der zweite geht analog)

- Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.
- Zu zeigen ist $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.
- Sei $\varepsilon > 0$. Nach Annahme existieren $N \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathbb{N}$ sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_m - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N$, $m > M$
- Wir haben dann $|a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für alle $n > \max(N, M)$, womit $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$ gezeigt ist. $\square$

Anmerkungen

Satz 4.5

Für alle konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) + (\lim_{n\to\infty} b_n)$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$

Für divergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und/oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann trotzdem ein Grenzwert für $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren.

- Z.B. ist für $a_n := n$, $b_n := -n$ ist $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$
- Z.B. ist für $a_n := n$, $b_n := \frac{1}{n}$ ist $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 1$

Satz 4.5 ist für solche Fälle nutzlos.

Beispiele

Für $a_n := \frac{n+1}{n}$ kann man $\lim_{n\to\infty} a_n$ berechnen durch

$(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}) + (\lim_{n\to\infty} 1) = 0 + 1 = 1$

Rechenregeln (2)

Satz

Für alle konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

Wenn $(\lim_{n\to\infty} b_n) \neq 0$, dann $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$.

Beachte: Wenn $(\lim_{n\to\infty} b_n) \neq 0$, dann muss es ein $N \in \mathbb{N}$ geben, sodass $b_n \neq 0$ für alle $n > N$.

Rechenregeln (3)

Satz

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $a_n < b_n$. Dann gilt $(\lim_{n\to\infty} a_n) \leq (\lim_{n\to\infty} b_n)$.

Beachte: Unter den Annahmen des Satzes gilt nicht immer $(\lim_{n\to\infty} a_n) < (\lim_{n\to\infty} b_n)$.

Beispiel?

$$a_n := \frac{1}{n+1} \qquad b_n := \frac{1}{n}$$

Dann gilt: $a_n < b_n$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \leq 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$

Beispiele

Sei $a_n := \dfrac{2n^2+2n+10}{3n^2+n+1}$

Berechnung des Grenzwerts. Trick: Kürze mit n^2:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n+10}{3n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2+2n+10}{n^2}}{\frac{3n^2+n+1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{10}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{2}{n}+\frac{10}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}$$

da $\lim_{n\to\infty} 2+\frac{2}{n}+\frac{10}{n^2} = (\lim_{n\to\infty} 2) + (\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}) + (\lim_{n\to\infty} \frac{10}{n^2}) = 2+0+0 = 2$

und $\lim_{n\to\infty} 3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} = (\lim_{n\to\infty} 3) + (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}) + (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}) = 3+0+0 = 3$

Monotonie

Definition (Monotonie für Folgen)

- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **monoton wachsend**, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **streng monoton wachsend**, falls $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiele:

- $a_n = \dfrac{1}{n}$ ist nicht monoton wachsend.
- $a_n = (-1)^n$ ist nicht monoton wachsend.
- $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ ist streng monoton wachsend (und daher auch monoton wachsend)
- $a_n = n + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend

Beschränktheit

Definition (Beschränktheit)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **nach oben beschränkt** falls die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine obere Schranke hat.

Beispiele:

- $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ ist beschränkt, da z.B. 1 eine obere Schranke von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist.
- $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt, da z.B. 1 eine obere Schranke von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist.
- $a_n = (-2)^n$ ist nicht beschränkt, da keine obere Schranke für $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ existiert.

Konvergenz und Beschränktheit

Satz

Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt.

Beweis.

- Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ (der Grenzwert existiert nach Annahme).
- Nach Definition der Konvergenz gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < 1$ für alle $n > N$ gilt.
- Dann gilt aber $a_k \leq \max\{a_0, a_1, \ldots, a_N, a+1\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Konvergenz und Beschränktheit (2)

Satz 4.11

Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis.

- Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, sodass $0 \leq a - a_N < \varepsilon$: Da a Supremum ist, folgt $a_N \leq a$ und somit $0 \leq a - a_N$. Für den Rest: Gäbe es kein N mit $a - a_N < \varepsilon$, dann hätten wir $a - a_n \geq \varepsilon$ für alle n. D.h. $a - \varepsilon \geq a_n$ für alle n und damit wäre $a - \varepsilon$ eine obere Schranke für $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, die kleiner als a ist. Widerspruch, da a **kleinste** obere Schranke ist.
- Wegen der Monotonie der Folge gilt dann $a_N \leq a_n$ für alle $n > N$. Daraus folgt dann $0 \leq a - a_n \leq a - a_N < \varepsilon$.
- Damit haben wir gezeigt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a - a_n| \leq \varepsilon$ für alle $n > N$. Das heißt, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. $\square$

Bestimmte Divergenz

Definition (Bestimmte Divergenz gegen ∞)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **divergiert bestimmt gegen ∞** falls für jedes $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $a_n > K$ für alle $n > N$. Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Definition (Bestimmte Divergenz gegen $-\infty$)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **divergiert bestimmt gegen $-\infty$** falls für jedes $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $a_n < K$ für alle $n > N$. Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Beispiele

- $\lim\limits_{n\to\infty} -n = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n} = \infty$
- $a_n := n(-1)^n$ konvergiert nicht und divergiert weder bestimmt gegen ∞ noch gegen $-\infty$.

Wenn eine Folge weder konvergiert noch bestimmt divergiert, sprechen wir von **unbestimmter** Divergenz.