LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Grundlagen der Analysis
Wintersemester 2019/20

Axiomatisierung der Reellen Zahlen

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 8. November 2019

Exkurs: Axiome und Folgerungen

Was sind Axiome?

- Axiome sind **Grundannahmen**, die wir **nicht beweisen**, sondern als gegegeben annehmen.
- Man versucht mit **möglichst wenigen** Axiomen auszukommen.
- Oft hat man die Wahl zwischen verschiedenen Axiomen

Grundsatz:
Eine mathematische Aussage ist **wahr**, wenn sie ausgehend von den Axiomen **bewiesen** wurde.

D.h. nach und nach wird eine Menge von Aussagen aufgebaut, die dann im Beweis weiterer Aussagen verwendet werden kann.

Exkurs: Aussagen

Die Mathematik verwendet verschiedene Begriffe für Aussagen:

Theorem	Sehr wichtige Aussagen
Satz, Proposition	Wichtige Aussagen, die für sich alleine stehen.
Lemma	Hilfssätze, die meist nur verwendet werden, um andere Sätze, Propositionen und Theoreme zu beweisen.
Korollar	Eine Aussage, die direkt aus einer vorhergehenden Aussage folgt. Meist ohne einen extra Beweis aufzuschreiben.

Die reellen Zahlen

- Wir charakterisieren die reellen Zahlen durch Axiome.
- Anschließend beweisen wir einige Folgerungen aus den Axiomen

Dabei gibt es drei Arten von Axiomen:

1. Körperaxiome (Gesetze der Grundrechenarten)
2. Anordnungsaxiome (Gesetze für $<$)
3. Vollständigkeitsaxiom (Lückenlosigkeit von $\mathbb{R}$)

Körperaxiome

Die Körperaxiome sagen im Wesentlichen:

Die reellen Zahlen verfügen über die Grundrechenarten $+$, $-$, $\cdot$, $/$, und die Zahlen $0 \in \mathbb{R}$ und $1 \in \mathbb{R}$, die sich wie gewohnt verhalten.

Genauer:

Auf $\mathbb{R}$ sind Operationen $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert, die den **neun Körperaxiomen** genügen.

Diese setzen sich zusammen aus:

- Axiome für die Addition
- Axiome für die Multiplikation
- Distributivgesetz

Axiome der Addition

(A1) Assoziativgesetz:
Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $(x + y) + z = x + (y + z)$

(A2) Kommutativgesetz:
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x + y = y + x$

(A3) Existenz der Null:
Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(A4) Existenz der Negativen:
Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert $-x \in \mathbb{R}$, sodass $x + (-x) = 0$.

Folgerungen

Satz

(3.1) Die Zahl $0 \in \mathbb{R}$ ist eindeutig durch ihre Eigenschaft bestimmt.

Beweis. Sei $0' \in \mathbb{R}$ eine weitere Zahl, die die Nulleigenschaft (A3) hat.

- Aus (A3) folgt $0' + 0 = 0'$.
- Aus (A3) folgt $0 + 0' = 0$.
- Aus (A2) folgt $0' + 0 = 0 + 0'$. Daher folgt $0 = 0'$. □

Zur Erinnerung: Axiome der Addition:
(A1) Assoziativgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $(x + y) + z = x + (y + z)$
(A2) Kommutativgesetz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x + y = y + x$
(A3) Existenz der Null: Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$
(A4) Existenz der Negativen: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert $-x \in \mathbb{R}$, sodass $x + (-x) = 0$.

Folgerungen (2)

Satz

(3.2) Das Negative einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist eindeutig durch ihre Eigenschaft bestimmt.

Beweis. Sei $x' \in \mathbb{R}$ eine Zahl, die die Eigenschaft $x + x' = 0$ hat.
Es gilt:

$x + x' = 0$	
$\Leftrightarrow -x + (x + x') = (-x) + 0$	(Addition von $-x$ auf beiden Seiten)
$\Leftrightarrow -x + (x + x') = -x$	(mit (A3))
$\Leftrightarrow x' + (x + (-x)) = -x$	(Kommutativität & Assoziativität)
$\Leftrightarrow x' + 0 = -x$	(mit (A4))
$\Leftrightarrow x' = -x$	(mit (A3)) □

Zur Erinnerung: Axiome der Addition:
(A1) Assoziativgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $(x + y) + z = x + (y + z)$
(A2) Kommutativgesetz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x + y = y + x$
(A3) Existenz der Null: Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$
(A4) Existenz der Negativen: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert $-x \in \mathbb{R}$, sodass $x + (-x) = 0$.

Folgerungen (3)

Satz

(3.3) Es gilt $-0 = 0$.

Beweis.

- Aus (A3) folgt $0 + (-0) = 0$
- Aus (A4) folgt $0 + 0 = 0$
- Da das Negative eindeutig bestimmt ist, folgt $0 = -0$. □

Zur Erinnerung: Axiome der Addition:
(A1) Assoziativgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $(x + y) + z = x + (y + z)$
(A2) Kommutativgesetz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x + y = y + x$
(A3) Existenz der Null: Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$
(A4) Existenz der Negativen: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert $-x \in \mathbb{R}$, sodass $x + (-x) = 0$.

Folgerungen (4)

Satz

(3.4) Die Gleichung $a + x = b$ hat eine eindeutige Lösung: $x = b - a$.
(3.5) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $-(-x) = x$.
(3.6) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $-(x + y) = -x - y$.

Beweis:

(3.4)

- $x = b - a$ ist Lösung :
  $a + (b - a) = a + (b + (-a)) = b + (a + (-a)) = b + 0 = b$.
- $x = b - a$ ist eindeutig: Sei y weitere Lösung, d.h. $a + y = b$,
  dann gilt:
  $$\begin{aligned} & a + y = b \\ \Leftrightarrow\ & (a + y) + (-a) = b - a \\ \Leftrightarrow\ & y + (a + (-a)) = b - a \\ \Leftrightarrow\ & y + 0 = b - a \\ \Leftrightarrow\ & y = b - a \end{aligned}$$

(3.5) und (3.6) gehen analog, siehe Forster. □

Axiome der Multiplikation

(M1) Assoziativgesetz:
Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $(xy)z = x(yz)$

(M2) Kommutativgesetz:
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $xy = yx$

(M3) Existenz der Eins:
Es gibt eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(M4) Existenz des Inversen:
Zu jedem $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ existiert $x^{-1} \in \mathbb{R}$, sodass $xx^{-1} = 1$.

Notation: Statt $b^{-1}a$ schreibt man auch a/b oder $\frac{a}{b}$

Distributivgesetz

(D) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $x(y + z) = xy + xz$

Folgerungen aus (M1) - (M4) und (D)

Satz

(3.7) Die Zahl $1 \in \mathbb{R}$ ist eindeutig durch ihre Eigenschaft bestimmt.
(3.8) Das Inverse einer Zahl $x \neq 0$ ist eindeutig bestimmt.
(3.9) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $ax = b$ eine eindeutige Lösung $x = a^{-1}b$
(3.10) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y)z = xz + yz$
(3.11) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot 0 = 0$.
(3.12) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $xy = 0$, genau dann wenn $x = 0$ oder $y = 0$.
(3.13) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-x = (-1)x$
(3.14) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $(-x)(-y) = xy$
(3.15) Für alle $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ gilt $(x^{-1})^{-1} = x$
(3.16) Für alle $x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0, y \neq 0$ gilt $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$

Beweise der Folgerungen aus (M1) - (M4) und (D) (1)

(3.7) Die Zahl $1 \in \mathbb{R}$ ist eindeutig durch ihre Eigenschaft bestimmt.
Erfülle $1'$ auch (M3). Dann folgt $1 \cdot 1' \overset{M3}{=} 1'$. Ebenso $1' \cdot 1 \overset{M3}{=} 1$. Da $1 \cdot 1' \overset{M2}{=} 1' \cdot 1$ folgt $1' = 1$

(3.8) Das Inverse einer Zahl $x \neq 0$ ist eindeutig bestimmt.
Sei $x' \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot x' = 1$. Dann
$x \cdot x' = 1 \Leftrightarrow x^{-1} \cdot (x \cdot x') = x^{-1} \cdot 1 \Leftrightarrow (x^{-1} \cdot x) \cdot x' = x^{-1} \cdot 1 \Leftrightarrow$
$1 \cdot x' = x^{-1} \cdot 1 \Leftrightarrow x' \cdot 1 = x^{-1} \cdot 1 \Leftrightarrow x' = x^{-1}$

(3.9) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $ax = b$ eine eindeutige Lösung $x = a^{-1}b$
- ist Lösung: $a \cdot (a^{-1}b) = (a \cdot a^{-1})b = 1 \cdot b = b \cdot 1 = b$.
- eindeutig: $ay = b \Leftrightarrow a^{-1}(ay) = a^{-1}b \Leftrightarrow (a^{-1}a)y = a^{-1}b \Leftrightarrow (aa^{-1})y = a^{-1}b \Leftrightarrow 1y = a^{-1}b \Leftrightarrow y = a^{-1}b$

(3.10) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y)z = xz + yz$
$(x + y)z \overset{M2}{=} z(x + y) \overset{D}{=} zx + zy \overset{M2}{=} xz + yz$

Beweise der Folgerungen aus (M1) - (M4) und (D) (2)

(3.11) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot 0 = 0$.
- $x \cdot 0 \overset{A3}{=} x(0 + 0) \overset{D}{=} (x \cdot 0) + (x \cdot 0)$.
- subtrahiere $x \cdot 0$ von beiden Seiten: Ergibt $0 = x \cdot 0$

(3.12) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $xy = 0$, genau dann wenn $x = 0$ oder $y = 0$.
- Wenn $x = 0$, dann $0y \overset{M2}{=} y0 \overset{3.11}{=} 0$.
- Wenn $y = 0$, dann $x0 \overset{3.11}{=} 0$.
- Wenn $xy = 0$:
  - Falls $x = 0$, dann gilt $x = 0$ oder $y = 0$.
  - Falls $x \neq 0$, dann folgt mit (3.9) $y = x^{-1}0 = 0$.

(3.13) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-x = (-1)x$.
Zunächst: $x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 - 1)x = 0x = 0$
Damit folgt $(-1)x$ ist Negatives von x.
Wegen Eindeutigkeit des Negativen folgt die Behauptung.

Beweise der Folgerungen aus (M1) - (M4) und (D) (3)

(3.14) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $(-x)(-y) = xy$
$(-x)(-y) = (-x)(-1)y = (-1)(-x)y = -(-x)y = xy$

(3.15) Für alle $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ gilt $(x^{-1})^{-1} = x$.
Aus $x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1} = 1$ und $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$ und Eindeutigkeit des Inversen folgt $(x^{-1})^{-1} = 1$.

(3.16) Für alle $x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0, y \neq 0$ gilt $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

$$\begin{aligned} & (xy)(xy)^{-1} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & (xy)(xy)^{-1}x^{-1} = 1x^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & xx^{-1}y(xy)^{-1} = x^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & 1y(xy)^{-1} = x^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & y(xy)^{-1} = x^{-1} \end{aligned}$$

und mit (3.9): $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$

Allgemeine Assoziativ- und Kommutativgesetze

Sei

- $x_1 + x_2 + \ldots + x_n := (\ldots(x_1 + x_2) + \ldots) + x_n$
- $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n := (\ldots(x_1 \cdot x_2) + \ldots) \cdot x_n$

Assoziativgesetz:
Jede andere Anordnung der Klammerung führt zum selben Ergebnis.

Kommutativgesetz:
Sei $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ eine Permutation von $(1, 2\ldots, n)$. Dann gilt:

- $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_{i_1} + \ldots + x_{i_n}$
- $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}$

Ganzzahlige Potenzen

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die **Potenz** $x^n \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$x^0 := 1 \text{ und } x^{n+1} := x^n x.$$

Man schreibt x^{-n} für $\left(\frac{1}{x}\right)^n$.

Satz (Rechenregeln für Potenzen)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gelten die Potenzgesetze:

$$x^n x^m = x^{n+m}, \quad (3.17)$$
$$(x^m)^n = x^{mn}, \quad (3.18)$$
$$x^n y^n = (xy)^n, \quad (3.19)$$

Beweis: (3.17) Durch vollständige Induktion über n:
Basis $n = 0$: $x^0 x^m = 1x^m = x^m = x^{m+0} = x^{0+m}$
Schritt $n \to n+1$:
$x^{n+1}x^m = x^n x x^m = x x^n x^m \overset{I.V.}{=} x x^{n+m} = x^{n+m+1} = x^{n+1+m}$
(3.18) und (3.19) gehen analog mit vollständiger Induktion über n

Dezimalbruchdarstellung mit endlichen vielen Nachkommastellen

Der Ausdruck $z_1 z_2 \ldots z_k . z_{k+1} \ldots z_n$ bezeichnet die Zahl

$$\sum_{i=1}^{n+k} z_i 10^{k-i}.$$

Zum Beispiel ist 1.32 durch $1 + 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$ gegeben.

Körper

Jede Menge mit Operationen $+, \cdot$, welche die neun Axiome (A1)-(A4), (M1)-(M4) und (D) erfüllt, ist ein **Körper**.

Z.B. ist $(\{0,1\}, +, \cdot)$ mit

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

ein Körper!

- Insbesondere folgt daher **nicht** aus den Körperaxiomen
$$1 + 1 \neq 0$$
- Daher sind **weitere Axiome** notwendig, um z.B. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ zu rechtfertigen.

Anordnungsaxiome

In $\mathbb{R}$ sind gewisse Elemente als **positiv** ausgezeichnet.

Wir schreiben $x > 0$, wenn $x \in \mathbb{R}$ positiv ist, so dass die folgenden Anordnungsaxiome gelten:

(O1) **Trichotomie (Dreiteilung)**:
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x > 0$ oder $x = 0$ oder $-x > 0$.

(O2) **Abgeschlossenheit gegenüber Addition**:
Wenn $x > 0$ und $y > 0$, dann ist $x + y > 0$.

(O3) **Abgeschlossenheit gegenüber Multiplikation**:
Wenn $x > 0$ und $y > 0$ dann $xy > 0$.

Notation

- Wir schreiben $x < y$ und $y > x$ als Abkürzung für $y - x > 0$.
- Wir schreiben $x \leq y$ und $y \geq x$ falls $x < y$ oder $x = y$ gilt.

Rechenregeln für die Ordnungsrelation

Satz

Für alle $x, y, a \in \mathbb{R}$ gilt:

(3.20) Wenn $x < y$, dann $a + x < a + y$.

(3.21) Wenn $x < y$ und $a > 0$, dann $ax < ay$.

(3.22) $x < y \iff -x > -y$

(3.23) Wenn $x < y$ und $a < 0$, dann $ax > ay$.

(3.24) Wenn $x \neq 0$, dann $x^2 > 0$, insbesondere $1 > 0$.

(3.25) Wenn $x > 0$, dann $\frac{1}{x} > 0$.

(3.26) Wenn $0 < x$ und $x < y$, dann $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Beweise

(3.20) Wenn $x < y$, dann $a + x < a + y$.
$x < y$ entspricht $y - x > 0$.
Außerdem gilt $y - x = a + y - x - a = (a + y) - (a + x)$.
Daher gilt $(a + y) - (a + x) > 0$ und somit $a + x < a + y$.

(3.21) Wenn $x < y$ und $a > 0$, dann $ax < ay$.
$x < y$ entspricht $y - x > 0$.
Da $a > 0$, folgt aus (O3) $(y - x)a > 0$, und daher
$ay - ax > 0$, d.h. $ax < ay$.

(3.22) $x < y \iff -x > -y$
$x < y$ entspricht $y - x > 0$ und daher
$y - x = y + -x = -(-y) + (-x) = (-x) - (-y) > 0$,
was $-x > -y$ entspricht.

(3.23) Wenn $x < y$ und $a < 0$, dann $ax > ay$.
$x < y$ entspricht $y - x > 0$, $a < 0$ entspricht $-a > 0$ (aus (3.22)) daher folgt aus (3.21) $-ax < -ay$, d.h.
$-ay - (-ax) > 0$ d.h. $ax - ay > 0$ und daher $ax > ay$

Beweise (2)

(3.24) Wenn $x \neq 0$, dann $x^2 > 0$, insbesondere $1 > 0$.
Aus (O3) folgt $x^2 > 0$ für $x > 0$.
Wenn $x < 0$, dann verwende (3.23) für $a = x$, $y = 0$:
$a \cdot x = x^2 > ay = x \cdot 0 = 0$.
Da $0 \neq 1$ folgt $1^2 = 1 > 0$

(3.25) Wenn $x > 0$, dann $\frac{1}{x} > 0$.
Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$.
Nach (O1) muss $x \neq 0$ gelten, also existiert $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$.
Nach (3.24) gilt $\left(\frac{1}{x}\right)^2 > 0$.
Nach (O3) dann auch $x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 > 0$.
Das bedeutet aber $\frac{1}{x} > 0$.

(3.26) Wenn $0 < x$ und $x < y$, dann $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.
Aus (O3) folgt $xy > 0$. Aus (3.25) folgt $(xy)^{-1} > 0$ also $x^{-1}y^{-1} > 0$. Aus $x < y$ und $x^{-1}y^{-1} > 0$ folgt mit (3.21) $xx^{-1}y^{-1} < yx^{-1}y^{-1}$, was $y^{-1} < x^{-1}$ ergibt.

Bernoulli-Ungleichung

Satz 3.8 (Bernoulli-Ungleichung)

Es gilt $(x+1)^n \geq 1+nx$ für alle $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

- Vollständige Induktion über n.
- Induktionsanfang $n=0$: $(x+1)^0 = 1 \geq 1 = 1+0x$
- Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$(x+1)^{n+1} = (x+1)^n(x+1) \overset{I.V.}{\geq} (1+nx)(x+1)$$
$$= x+1+nx^2+nx \geq 1+(n+1)x \qquad \square$$

Beachte, dass aus $(x+1)^n \geq (1+nx)$ nur $(x+1)^n(x+1) \geq (1+nx)(x+1)$ gefolgert werden darf, wenn $(x+1) \geq 0$ gilt, was durch die Bedingung $x \geq -1$ des Satzes sichergestellt ist.

Absoluter Betrag

Definition (Absolutbetrag)

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $|x| \in \mathbb{R}$ durch

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x > 0, \\ -x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Definition gilt $|x| \geq 0$.

Eigenschaften des Absolutbetrags

Satz 3.9

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq |x|$ und $-x \leq |x|$.

Beweis. Wir betrachten die drei möglichen Fälle für x nach (O1).

1. Fall $x > 0$. Dann gilt $|x| = x$ nach Definition.
   Wir haben sofort $x \leq |x|$.
   Für $-x \leq |x|$ ist $-x \leq x$ zu zeigen.
   Wir zeigen $-x < x$. Dafür genügt es zu zeigen $0 < 2x$.
   Folgt aus $0 < x$ und $0 < 2$ und (O3).
2. Fall $x < 0$. Dann gilt $|x| = -x$ nach Definition. Damit folgt $-x \leq |x|$ sofort. Für $x \leq |x|$ zeige $x \leq -x$. Dafür zeige $x < -x$. Dafür zeige $0 < -2x = 2(-x)$. Da $0 < 2$ und $0 < -x$ folgt mit (O3) $2(-x) = -2x > 0$.
3. Fall $x = 0$. Dann gilt $|x| = -x = 0$ nach Definition und damit sofort $-x \leq |x|$ und $x \leq |x|$ $\square$.

Weitere Eigenschaften

Satz 3.10

Die folgenden Aussagen gelten für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

- Es gilt $|x| = 0$ genau dann wenn $x = 0$.
- $|xy| = |x||y|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis. Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung:

- Nach (O1) ist $x+y$ entweder positiv, gleich null oder negativ.
- Wenn $x+y > 0$, dann gilt $|x+y| = x+y$ nach Definition und wir müssen $x+y \leq |x|+|y|$ zeigen. Das folgt aus $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ (vorangegangener Satz) mit (O2).
- Der Fall $x+y < 0$ folgt analog.
- Im Fall $x+y = 0$ ist $0 \leq |x|+|y|$ zu zeigen, was aus $0 \leq |x|$ und $0 \leq |y|$ folgt.

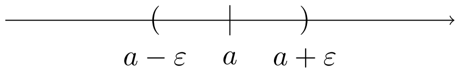
ε-Umgebung

Satz 3.11

Für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt: Es gilt $|x - x_0| < \varepsilon$ genau dann wenn $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$.

Der Beweis ist einfach und wird ausgelassen.

Satz zeigt, dass x in einer ε-Umgebung von x_0 liegt: In $\mathbb{R}$ ist die ε-Umgebung einer Zahl a, dass offene Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

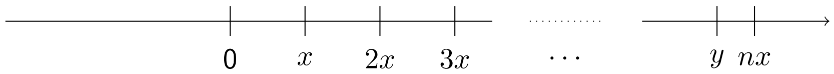


Archimedisches Axiom

Definition (Archimedisches Axiom)

(Arch) Für alle $x > 0$ und $y > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$, sodass $nx > y$.

Als Skizze auf der Zahlengerade



Später: Wir brauchen (Arch) nicht als Axiom, da es aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt.

Konsequenzen des Archimedischen Axioms

Satz 3.13 (kleine Brüche existieren)

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

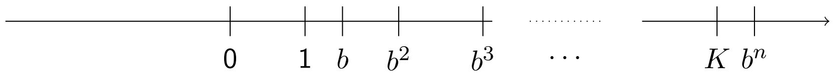
Beweis.

- Sei $\varepsilon > 0$.
- Setze $x := \varepsilon$ und $y := 1$.
- Nach (Arch) existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $y < nx$, also $1 < n\varepsilon$.
- Division durch n (d.h. Multiplikation mit $\frac{1}{n}$) liefert $\frac{1}{n} < \varepsilon$. $\square$

Konsequenzen des Archimedischen Axioms (2)

Satz 3.14

Für alle b mit $b > 1$ und alle $K \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > K$.



Beweis. Sei $b > 1$ und $K \in \mathbb{R}$.

- Fall $K \leq 0$: Dann gilt die Aussage, weil alle Potenzen von b^n positiv sind (folgt aus (O3))
- Fall $0 < K \leq 1$: Dann ist $b^1 = b > k$.
- Fall $K > 1$: Setze $x := b - 1$.
  Dann gilt $b^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx$ mit Bernoulli-Ungleichung.
  Nach (Arch) gibt es n mit $nx > K - 1$.
  Daraus folgt $1 + nx > K$.
  Zusammen ergibt das $b^n \geq 1 + nx > K$. $\square$

Konsequenzen des Archimedischen Axioms (3)

Satz 3.15

Für alle c mit $0 < c < 1$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $c^n < \varepsilon$.

Zum Beweis kann man den vorherigen Satz mit $b := \frac{1}{c}$ und $K := \frac{1}{\varepsilon}$ verwenden.

Vollständigkeit

Bisher: Körperaxiome und Anordnungsaxiome:

- Werden auch von der Menge der rationalen Zahlen erfüllt!
- Es fehlt noch das Vollständigkeitsaxiom, welches die Lückenlosigkeit der reellen Zahlen bereitstellt.

Vollständigkeitsaxiom

Definition (Supremum)

Sei M eine Menge von reellen Zahlen.

- Eine Zahl a heißt obere Schranke für M falls $x \leq a$ für alle $x \in M$ gilt.
- Eine Zahl a heißt Supremum für M falls a die kleinste obere Schranke für M ist. Das bedeutet:
  1. a ist eine obere Schranke für M.
  2. Für jede obere Schranke b für M gilt $a \leq b$.
- Eine Menge M heißt nach oben beschränkt, wenn sie eine obere Schranke hat.

Vollständigkeitsaxiom:

Jede nichtleere und nach oben beschränkte Menge hat ein Supremum.

Beispiele

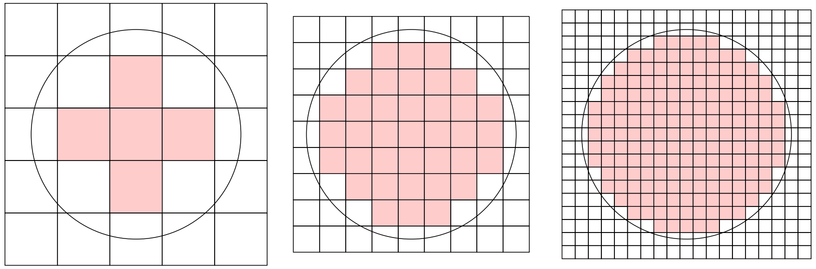
$M = \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\}$.

- Die Zahl 1 ist obere Schranke für M, da $\frac{n}{n+1} \leq 1$ für alle n
- Die Zahl 1 ist sogar Supremum für M:
  Beweis durch Widerspruch. Annahme es gibt eine kleinere obere Schranke $b < 1$. Dann ist $\frac{n}{n+1} \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
  Aus $b < 1$ folgt $0 < 1 - b$.
  Nach dem Satz, dass kleine Brüche existieren, gibt es $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\frac{1}{n} < 1 - b$. Gleichzeitig gilt $1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Damit haben wir $1 - \frac{n}{n+1} < 1 - b$.
  Daraus folgt $b < \frac{n}{n+1}$, was aber der Annahme widerspricht, dass $\frac{n}{n+1} \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt.

$\square$

Rationale Zahlen sind nicht vollständig

Beispiel: Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser 2 durch ausgefüllte Quadrate auf Karopapier approximieren.



Seitenlänge der Quadrate auf 1/2, 1/4, 1/8,... anpassen.
Menge der Approximationen ist Menge von rationalen Zahlen.
Das Supremum dieser Menge ist π, was keine rationale Zahl ist.

$\sqrt{2}$ ist irrational

Wir zeigen den üblichen Beweis, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist:

Satz

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Beweis. Durch Widerspruch. Nehme an: $\sqrt{2}$ ist rational.

- Dann gilt $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ wobei p, q teilerfremd (d.h. $\frac{p}{q}$ ist unkürzbar).
- Da $\sqrt{2}^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2}$, gilt $p^2 = 2q^2$.
- D.h. p^2 ist durch 2 teilbar. Da $p^2 = p \cdot p$ ist daher p selbst durch 2 teilbar, d.h. $p = 2 \cdot p'$.
- Aus $p^2 = 2q^2$ folgt $q^2 = \frac{p^2}{2} = p' \cdot p = p' \cdot 2p'$. Daher ist q^2 durch 2 teilbar. Da $q^2 = q \cdot q$ ist auch q durch 2 teilbar, d.h. $q = 2 \cdot q'$.
- Dann ist $\frac{p}{q} = \frac{2 \cdot p'}{2 \cdot q'}$ kürzbar! Widerspruch. □

Ganzzahliger Anteil

Definition (Ganzzahliger Anteil)

Für $x > 0$ definieren wir: $\lfloor x \rfloor := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$

Satz 3.19

Für alle $x > 0$ ist $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$ und es gilt $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Beweis. Sei $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.

- Da $\lfloor x \rfloor$ die kleinste obere Schranke ist, und da $\lfloor x \rfloor - 1 < \lfloor x \rfloor$, kann $\lfloor x \rfloor - 1$ keine obere Schranke sein.
- Also gibt es $m \in M$ mit $m > \lfloor x \rfloor - 1$, d.h. $m + 1 > \lfloor x \rfloor$.
- Da $\lfloor x \rfloor$ oberere Schranke ist, kann $m + 1$ nicht in M sein.
- Daher gilt **nicht** $m + 1 \leq x$. Wegen (O1) gilt $m + 1 > x$.
- Wegen $m \in M$ gilt auch $m \leq x$.
- Also: $m \leq x < m + 1$ und $m \in \mathbb{N}$. D.h. M ist gleich $\{0, 1, ..., m\}$, deren kleinste obere Schranke ist aber m, also $m = \lfloor x \rfloor$. □

Notation für Intervalle:

$$
\begin{array}{ll}
[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} & \text{(abgeschlossenes Intervall)} \\
[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\} & \text{(halboffenes Intervall)} \\
(a,b] = \{x \mid a < x \leq b\} & \text{(halboffenes Intervall)} \\
(a,b) = \{x \mid a < x < b\} & \text{(offenes Intervall)}
\end{array}
$$

Intervallschachtelungen

Definition (Intervallschachtelung)

Eine Intervallschachtelung ist durch eine Folge von Intervallen $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ... gegeben (für jede natürliche Zahl n ein Intervall $[a_n, b_n]$), die folgende Eigenschaften haben müssen:

1. $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
2. Das Intervall $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ ist echt in $[a_n, b_n]$ enthalten, d.h. es gilt $a_n \leq a_{n+1}$ und $b_{n+1} \leq b_n$ und (mindestens) eine dieser Ungleichheiten ist echt, also $a_n < a_{n+1}$ oder $b_{n+1} < b_n$.
3. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

Punkt 1: alle Intervalle sind nichtleer.
Punkt 2: $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ echt in $[a_n, b_n]$ enthalten
Punkt 3: Intervalle werden beliebig klein.

Beispiel

$$\begin{array}{lcl}
[a_0, b_0] & = & [0.9, 1] \\
[a_1, b_1] & = & [0.99, 1] \\
[a_2, b_2] & = & [0.999, 1] \\
\ldots & & \\
[a_{n-1}, b_{n-1}] & = & [0.\underbrace{9\cdots 9}_{n\text{-viele 9en}}, 1]
\end{array}$$

ist Intervallschachtelung

1. $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ✓
2. $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ ist echt in $[a_n, b_n]$ enthalten, da $a_{n+1} > a_n$ und $b_{n+1} = b_n$ für alle n
3. $|b_{n-1} - a_{n-1}| = \dfrac{1}{10^n}$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es n mit $\dfrac{1}{10^n} < \varepsilon$ (folgt mit dem Satz, dass kleine Brüche existieren)

Reellen Zahlen durch Intervallschachtelungen

Satz 3.21 über Intervallschachtelungen

Für jede Intervallschachtelung gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$, das in allen Intervallen enthalten ist, d.h. $x \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Beweis. Sei $x := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

- Da x obere Schranke gilt $x \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
- Für jedes n gilt: $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0$
- D.h. jedes b_i ist obere Schranke für die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$
- Da x als kleinste obere Schranke folgt daraus: $x \leq b_n$.
- Daher: $a_n \leq x \leq b_n$ für bel. n, also: x in allen Intervallen enthalten.
- Noch zu zeigen: x ist eindeutig. Sei $x' \in \mathbb{R}$ mit $x \neq x'$ und x' in allen Intervallen. Setze $\varepsilon = |x - x'|$. Beachte: $\varepsilon > 0$.
- Nach der 3. Eigenschaft für Intervallschachtelungen gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $|b_n - a_n| < \varepsilon$.
  Da x und x' beide in $[a_n, b_n]$ liegen, folgt $|x - x'| \leq |b_n - a_n|$.
- D.h. $\varepsilon = |x - x'| \leq |b_n - a_n| < \varepsilon$. Widerspruch! □

Dezimalbruchentwicklung

Die übliche Darstellung reeller Zahlen in der Form $z_1 z_2 \ldots z_k . z_{k+1} \ldots$, wobei jedes $z_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ definiert eine eindeutige reelle Zahl:
Die Intervalle $[a_n, b_n]$ mit

$$a_{n-1} := \sum_{i=1}^{n} z_i 10^{k-i} \qquad b_{n-1} := a_{n-1} + 10^{k-n} \text{ für } n = 1, 2, \ldots$$

definieren eine Intervallschachtelung.

Der Satz über Intervallschachtelungen zeigt, dass $z_1 z_2 \ldots z_k . z_{k+1} \ldots$ eine eindeutige reelle Zahl bestimmt.

Beispiel

Für $1.1111\ldots$ ist die Intervallschachtelung
$[a_0, b_0] = [1, 2]$,
$[a_1, b_1] = [1.1, 1.2]$,
$[a_2, b_2] = [1.11, 1.12]$,
$[a_3, b_3] = [1.111, 1.112]$, usw.

Beispiele

Beispiel

Für den Ausdruck $1.0000\ldots$ ist die Intervallschachtelung
$[a_0, b_0] = [1, 2]$,
$[a_1, b_1] = [1, 1.1]$,
$[a_2, b_2] = [1, 1.01]$,
$[a_3, b_3] = [1, 1.001]$, usw.
Die Zahl 1 ist in allen diesen Intervallen enthalten. Also gilt $1.\overline{0} = 1$.

Beispiel

Für den Ausdruck $0.9999\ldots$ ist die Intervallschachtelung
$[a_0, b_0] = [0, 1]$,
$[a_1, b_1] = [0.9, 1]$,
$[a_2, b_2] = [0.99, 1]$,
$[a_3, b_3] = [0.999, 1]$, usw.
Die Zahl 1 ist in allen diesen Intervallen enthalten. Also gilt $0.\overline{9} = 1$.

Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$ bestimmen

- $[a_0, b_0] = [1, 2]$
- und für $i \geq 2$:

$$[a_{i-1}, b_{i-1}] = [a_{i-2} + x_i \cdot 10^{-i}, a_{i-2} + (x_i + 1) \cdot 10^{-i}]$$

  wobei $x_i \in \{0, \ldots, 9\}$ jeweils maximal gewählt wird, sodass $a_{i-1}^2 \leq 2$ und $2 \leq b_{i-1}^2$

Dann ist $\sqrt{2}$ in allen Intervallen enthalten.
Berechnung weiterer Intervalle:

- $[a_1, b_1] = [1 + 4 \cdot 10^{-1}, 1 + 5 \cdot 10^{-1}]$, denn $1.4^2 = 1.96 \leq 2 \leq 2.25 = 1.5^2$
- $[a_2, b_2] = [1.4 + 1 \cdot 10^{-2}, 1.4 + 2 \cdot 10^{-2}]$, denn $1.41^2 = 1.9881 \leq 2 \leq 2.0164 = 1.42^2$
- $[a_3, b_3] = [1.41 + 4 \cdot 10^{-3}, 1.41 + 5 \cdot 10^{-3}]$, denn $1.414^2 = 1.999396 \leq 2 \leq 2.002225 = 1.415^2$
- usw.