LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Grundlagen der Analysis
Wintersemester 2019/20

Einführung und Vollständige Induktion

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 23. Oktober 2019

Analysis

Begriff Analysis

Das Wort Analysis stammt aus dem Griechischen und bedeutet „Auflösung“

Historie

- (Infinitesimalrechnung 1680er Jahre)

  Gottfried Wilhelm Leibniz (dt. Mathematiker 1646-1716) und

  Isaac Newton (engl. Naturforscher 1643-1727)
- Leonhard Euler (schweiz. Mathematiker 1707-1783)
  „Begründer der Analysis“,
  1748: 2-bändiges Werk „Introductio in analysin infinitorum“
  (Einleitung in die Analysis des Unendlichen)

Analysis

Von der Webseite der DMV[1]:

> *Die Analysis baut auf dem Begriff des Grenzwerts auf. Sie beschäftigt sich mit Funktionen und ihren Eigenschaften, sowie der Ableitung und dem Integral.*
>
> *In der Schule liegt hier der Schwerpunkt auf der Untersuchung von Funktionen, der Kurvendiskussion.*
>
> *An der Universität gehören viele Untergebiete zur Analysis, die alle auf Ableitung und Integral aufbauen oder diese verallgemeinern. Im Vorfeld dazu untersucht man die Konvergenz von Reihen und Folgen und beschäftigt sich genauer mit dem Begriff der Stetigkeit.*

[1] Deutsche Mathematiker-Vereinigung http://www.mathematik.de/analysis

Natürliche Zahlen

Natürliche Zahlen

Wir schreiben $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich der 0), d.h.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Achtung: Oft wird $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$ verwendet.

Wir schreiben $\mathbb{N}_{>0}$ für die Menge der natürlichen Zahlen ohne 0, d.h.

$$\mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Notation: Ganze, rationale, reelle Zahlen

Wie üblich verwenden wir:

- $\mathbb{Z}$ für die ganzen Zahlen ($\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$),
- $\mathbb{Q}$ für die rationalen Zahlen ($\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$)
- $\mathbb{R}$ für die reellen Zahlen (Definition folgt noch).
- $\mathbb{C}$ für die komplexen Zahlen (Definition folgt noch).

Summenzeichen

Für jede ganze Zahl i mit $m \leq i \leq n$ sei a_i eine reelle Zahl.

Dann definieren wir

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \dots a_n$$

Für $m = n$ ist $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i = a_m$

Für $m > n$ definieren wir die **leere Summe** als $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i = 0$

Beispiel

$$\sum_{i=3}^{5} 2 \cdot i = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 6 + 8 + 10 = 24$$

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Um zu beweisen, dass eine Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt, genügt es zu zeigen, dass:

1. **(Induktionsanfang)**: $A(0)$ gilt.
2. **(Induktionsschritt)**: Für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$.

Beachte:

- Im Induktionsschritt muss man sich nicht um den Nachweis von $A(n)$ kümmern, sondern nur $A(n+1)$ zeigen. Man darf dabei verwenden, dass $A(n)$ gilt.
- Hier ist die eigentliche Mächtigkeit der vollständigen Induktion versteckt!

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Um zu beweisen, dass eine Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt, genügt es zu zeigen, dass:

1. **(Induktionsanfang)**: $A(0)$ gilt.
2. **(Induktionsschritt)**: Für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$.

Warum stimmt das Beweisprinzip?

Wir können für **jedes** $m \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit für $A(m)$ herleiten:

- $A(0)$ gilt wegen (Induktionsanfang),
- $A(1)$ gilt, da $A(0)$ gilt und $A(n) \implies A(n+1)$ für $n = 0$,
- $A(2)$ gilt, da $A(1)$ gilt und $A(n) \implies A(n+1)$ für $n = 1$.
- $\dots$
- $A(m)$ gilt, da $A(m-1)$ gilt und $A(n) \implies A(n+1)$ für $n = m-1$.

Beispiel zur vollständigen Induktion

Satz 2.3 (Gaußsche Summenformel)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Beweis. Durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $A(0)$ ist die Aussage $\sum_{i=1}^{0} i = \frac{(0+1)0}{2}$.
Diese gilt, da sich beide Seiten zu 0 vereinfachen lassen.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig (aber fest). Wir verwenden die Induktionsvoraussetzung, dass $A(n)$, d.h. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$, gilt und zeigen $A(n+1)$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i \overset{I.V.}{=} (n+1) + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{2(n+1)+(n+1)n}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

□

Vollständige Induktion: Weitere Übung

Satz 2.4 (Geometrische Reihe)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$ gilt: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Beweis. Durch vollständige Induktion über n, d.h.

- Induktionsanfang: Durch Umformen: $\sum_{i=0}^{0} x^i = x^0 = 1 = \frac{1-x^1}{1-x}$
- Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\sum_{i=0}^{n+1} x^i = (\sum_{i=0}^{n} x^i) + x^{n+1} \overset{I.V.}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}(1-x)}{1-x}$$
$$= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x\cdot x^{n+1}}{1-x}$$
$$= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

□

Allgemeineres Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Beweisprinzip der vollständigen Induktion (2)

Um zu beweisen, dass eine Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ gilt, genügt es zu zeigen, dass:

1. **(Induktionsanfang)**: $A(n_0)$ gilt.
2. **(Induktionsschritt)**: Für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: Wenn $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+1)$.

Beachte: Vorheriges Prinzip ist Spezialfall für $n_0 = 0$

Beispiel

Satz 2.6

Für alle $n \geq 3 \in \mathbb{N}$ gilt: $n+1 < n^2$

Beweis. Verwende vollständige Induktion über $n \geq n_0 = 3$.

- Induktionsanfang $n = 3$:

$$3+1 = 4 < 9 = 3^2$$

- Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei $n \geq 3$.
Nehme als Induktionsvoraussetzung an, dass $n+1 < n^2$ gilt.
Schließe für $n+1$:

$$(n+1)+1 \overset{I.V.}{<} n^2+1 \leq n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

□

Starke Induktion

Starke Induktion

Um zu beweisen, dass eine Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ gilt, genügt es zu zeigen, dass:

Für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:
Wenn $A(k)$ für alle $n_0 \leq k \leq n-1$ gilt, dann gilt auch $A(n)$.

Korrektheit, lässt sich mit der „normalen" Induktion beweisen.

Korrektheit der starken Induktion

Nehme an, die Voraussetzung der starken Induktion gilt, d.h.:

(*) Für jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:
Wenn $A(k)$ für alle $n_0 \leq k \leq n-1$ gilt, dann gilt auch $A(n)$.

Sei $B(n) :=$ Aussage $A(k)$ gilt für $n_0 \leq k \leq n$.

Zeige: $B(n)$ gilt für alle $n \geq n_0$ mit vollständiger Induktion:

- Induktionsanfang: Aus (*) für $n = n_0$:
  Wenn $A(k)$ für alle $n_0 \leq k \leq n_0 - 1$, dann gilt auch $A(n_0)$.
  Diese Aussage äquivalent zu: $A(n_0)$ gilt. Daher gilt $B(n_0)$.
- Induktionsschritt, $n \to n+1$: Nehme an $B(n)$ gilt. Dann gilt $A(k)$ für alle k mit $n_0 \leq k \leq n$.
  Mit der Voraussetzung (*) folgt: $A(n+1)$ gilt.
  Damit folgt: $A(k)$ gilt für alle k mit $n_0 \leq k \leq n+1$, d.h. $B(n+1)$ gilt. □

Beispiel

Satz 2.8

Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist das Produkt endlich vieler Primzahlen.

Beweis. Mit starker Induktion über $n \geq 2$.

- Fall $n = 2$. Dann gilt die Aussage, da 2 eine Primzahl ist.
- Induktionsschritt: $n > 2$: Nehme an, dass sich alle Zahlen $2 \leq k \leq n-1$ als Produkt von Primzahlen schreiben lassen.
  Wenn n eine Primzahl ist, dann gilt die Aussage.
  Wenn n keine Primzahl ist, dann gibt es ein $2 \leq q \leq n-1$, das n teilt, d.h. n lässt sich $n = q \cdot m$ schreiben mit $2 \leq m \leq n-1$.
  Die Induktionsvoraussetzung zeigt, dass sich m und auch q jeweils als Produkt von Primzahlen schreiben lassen:
  $$m = p_{1,m} \cdots p_{r,m} \text{ und } q = p_{1,q} \cdots p_{s,q}$$
  Daher lässt sich n auch als Produkt von Primzahlen $m = p_{1,m} \cdots p_{r,m} \cdot p_{1,q} \cdots p_{s,q}$ schreiben.

Produktzeichen und Fakultät

Wir definieren
$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n$$
wobei das **leere Produkt** definiert ist als $\prod_{i=m}^{n} a_i = 1$ für $m > n$.

Definition (Fakultät)

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ (die Fakultät von n) definiert durch
$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot \ldots \cdot n$$
.

Induktiv kann man auch definieren:

- $0! = 1$
- $(n+1)! = n!(n+1)$

Anordnungen endlicher Mengen

Satz 2.10

Die Anzahl aller möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge $\{A_1, \ldots, A_n\}$ (mit $n \geq 1$) ist $n!$.

Beweis. Durch vollständige Induktion über n.

Induktionsanfang $n = 1$**:**

$\{A_1\}$ kann man nur als (A_1) anordnen und $1! = 1$.

Induktionsschritt $n \to n + 1$**:**

- Als Induktionsannahme verwenden wir, dass $\{A_1, \ldots, A_n\}$ auf $n!$ mögliche Weisen angeordnet werden kann.
- Für jede diese Anordnungen $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_n})$ mit $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}$ können wir A_{n+1} an $n + 1$ verschiedenen Positionen einfügen.
- D.h. es gibt $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$ verschiedene Anordnungen von $\{A_1, \ldots, A_{n+1}\}$. □