$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von (UN-)DIRECTED-HAMILTON-CYCLE, TRAVELLING-SALESPERSON und GRAPH-COLORING

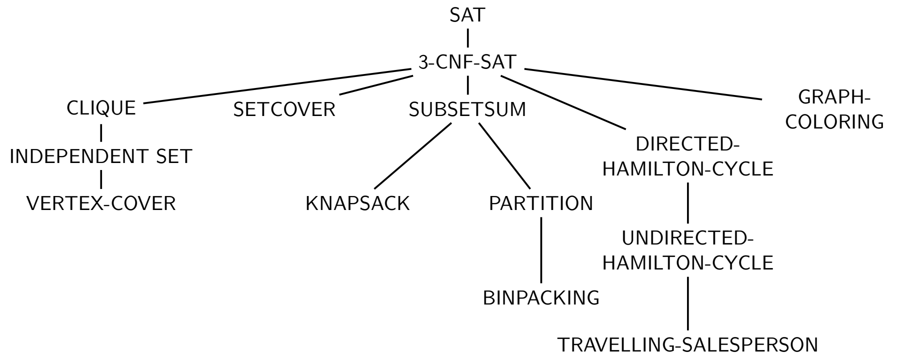
Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 24. Juli 2022

Inhalt der kommenden Vorlesungen

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeitsbeweise für eine Auswahl an Problemen.



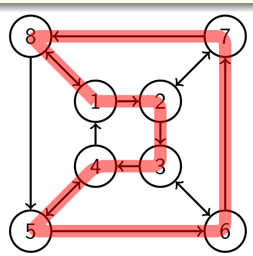
Heute: $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von (UN-)DIRECTED-HAMILTON-CYCLE, TRAVELLING-SALESPERSON und GRAPH-COLORING

Hamiltonische Kreise

Definition

In einem gerichteten Graphen ist ein Hamilton-Kreis, ein Kreis, der genau alle Knoten einmal besucht.
Formal: Für $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist ein Hamilton-Kreis eine Permutation $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, sodass $(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}) \in E$ und $(v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}) \in E$.

Beispiel:



Das DIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem

Definition (DIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem)

Das DIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation wie folgt formulieren:

gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

gefragt: Gibt es einen Hamilton-Kreis in G?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von DIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Satz

DIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

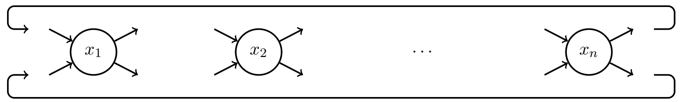
Beweis: DIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\in \mathcal{NP}$:

- Rate nichtdeterministisch die Permutation π
- Verifiziere, ob $(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}) \in E$ und $(v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}) \in E$ gilt.
- DIRECTED-HAMILTON-CYCLE kann daher kann auf einer NTM in Polynomialzeit entschieden werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von DIRECTED-HAMILTON-CYCLE (2)

DIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-schwer

- Ziel: 3-CNF-SAT $\leq_p$ DIRECTED-HAMILTON-CYCLE
- Sei $F = K_1 \wedge \ldots \wedge K_m$ eine 3-CNF, sodass jede Klausel K_i genau 3 Literale enthält. Sei $Var(F) = \{x_1, \ldots, x_n\}$
- Erzeuge zunächst

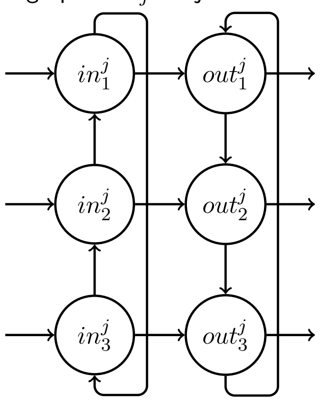


- Idee: Hamilton-Kreis läuft oben durch x_i, wenn $I(x_i) = 1$ und unten durch x_i, wenn $I(x_i) = 0$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von DIRECTED-HAMILTON-CYCLE (3)

DIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-schwer

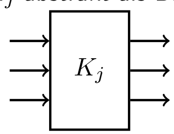
Teilgraphen K_j für jede Klausel K_j:



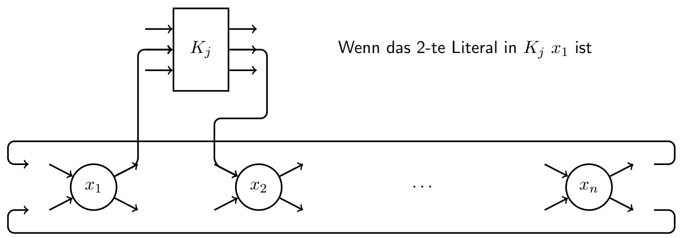
Eigenschaften:

- Jeder Hamilton-Kreis, der durch Eingang in_i^j in K_j hereingeht, muss K_j durch den Knoten out_i^j verlassen. (sonst bleibt man stecken)
- Der Graph kann einmal, zweimal oder dreimal in einem Hamilton-Kreis durchlaufen werden

Teilgraph K_j abstrakt als Bauteil:



$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von DIRECTED-HAMILTON-CYCLE (4)



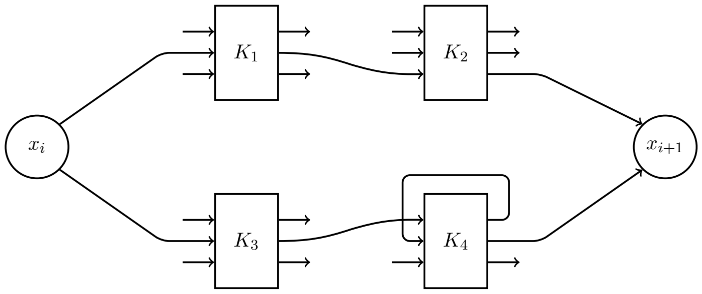
Verbindungen:

- i-ter Ein-/Ausgang von K_j wird zwischen x_k und x_{k+1} verbunden, wenn i-tes Literal in Klausel K_j ist x_k oder $\neg x_k$
- obere Verbindung, wenn Literal x_k ist
- untere Verbindung, wenn Literal $\neg x_k$ ist
- mehrere K_j hintereinander erlaubt.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von DIRECTED-HAMILTON-CYCLE (5)

Beispiel: $F = K_1 \wedge K_2 \wedge K_3 \wedge K_4$ eine 3-CNF, sodass

- x_i kommt an 2. Position in K_1 vor
- x_i kommt an 3. Position in K_2 vor
- $\neg x_i$ kommt an 2. Position in K_3 vor
- $\neg x_i$ kommt an 1. und 2. Position in K_4 vor



$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von DIRECTED-HAMILTON-CYCLE (6)

- Konstruktion des Graph in Polynomialzeit möglich:
  Füge iterativ die K_j-Graphen ein.
- Alle Anschlüsse werden angeschlossen: der Graph ist wohl geformt.
- Wenn der Graph einen Hamilton-Kreis hat, dann läuft der Kreis entweder oben durch x_i oder unten durch x_i.
  - Das liefert Belegung $I(x_i) = 1$ bzw. $I(x_i) = 0$
  - Da jedes K_j mindestens einmal von Hamilton-Kreis durchlaufen wird: Jede Klausel wird durch I erfüllt.
- Wenn I Belegung mit $I(F) = 1$, dann gibt es einen Hamilton-Kreis:
  - Durchlaufe Knoten x_i oben, wenn $I(x_i) = 1$ und unten, wenn $I(x_i) = 0$.
  - Durchlaufe K_j ein bis drei Mal, je nachdem welche und wie viele Literale in der Klausel K_j durch I wahr gemacht werden.
- Daher 3-CNF-SAT $\leq_p$ DIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Das UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem

Hamilton-Kreis im ungerichteten Graph

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Ein Hamilton-Kreis ist eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, sodass $\{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\} \in E$ und $\{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\} \in E$?

Definition (UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem)

Das UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation wie folgt formulieren:

gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

gefragt: Gibt es einen Hamilton-Kreis in G?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Satz

UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\in \mathcal{NP}$:

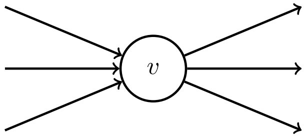
- Rate die Permutation π nichtdeterministisch
- Verifiziere, ob $\{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\} \in E$ und $\{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\} \in E$ gilt.
- Dies kann auf einer NTM in Polynomialzeit durchgeführt werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

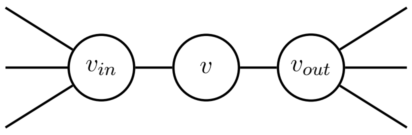
UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-schwer:

- Sei f die Funktion, die aus einem gerichteten Graphen (V, E) einen ungerichteten Graphen macht, sodass $f(V) = \bigcup\{\{v_{in}, v, v_{out}\} \mid v \in V\}$ und $f(E) = \{\{u_{out}, v_{in}\} \mid (u, v) \in E\} \cup \bigcup\{\{\{v_{in}, v\}, \{v, v_{out}\}\} \mid v \in V\}$.

D.h. jeder Knoten v mit Ein- und Ausgängen:



wird ersetzt durch:



$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-schwer:

- In $f(G)$ kann der Knoten v durch einen Hamilton-Kreis nur in einer Richtung durchlaufen werden
(von v_{in} durch v durch v_{out} oder umgekehrt).
- Falls $v_{in,\pi(1)}, v_{\pi(1)}, v_{out,\pi(1)}, \ldots v_{in,\pi(n)}, v_{\pi(n)}, v_{out,\pi(n)}, v_{in,\pi(1)}$
oder $v_{out,\pi(1)}, v_{\pi(1)}, v_{in,\pi(1)}, \ldots v_{out,\pi(n)}, v_{\pi(n)}, v_{in,\pi(n)}, v_{out,\pi(1)}$
ein ungerichteter Hamilton-Kreis,
dann ist $v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}$ gerichteter Hamilton Kreis.
- Umgekehrte Richtung: Trivial
- Da f in Polynomialzeit berechenbar ist, folgt
DIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\leq_p$ UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE.

Das TRAVELLING-SALESPERSON-Problem

Definition (TRAVELLING-SALESPERSON-Problem)

Das TRAVELLING-SALESPERSON-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation wie folgt formulieren:

gegeben: Ein Menge von Knoten (Städten) $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, eine $(n \times n)$-Matrix $(M_{i,j})$ mit Entfernungen $M_{i,j} \in \mathbb{N}$ zwischen den Städten v_i und v_j, sowie eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

gefragt: Gibt es eine Rundreise, die alle Städte besucht, der Startort gleich dem Zielort ist, und nicht länger als k ist.Formal: Gibt es eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, sodass $(\sum_{i=1}^{n-1} M_{\pi(i),\pi(i+1)}) + M_{\pi(n)+\pi(1)} \leq k$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von TRAVELLING-SALESPERSON

Satz

Das TRAVELLING-SALESPERSON-Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: TRAVELLING-SALESPERSON $\in \mathcal{NP}$:

- Rate die Permutation π nichtdeterministisch
- Prüfe, ob $(\sum_{i=1}^{n-1} M_{\pi(i),\pi(i+1)}) + M_{\pi(n)+\pi(1)} \leq k$ gilt.
- Dies kann auf einer NTM in Polynomialzeit durchgeführt werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von TRAVELLING-SALESPERSON

TRAVELLING-SALESPERSON ist $\mathcal{NP}$-schwer:
Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$. Dann sei $f(G) = (V, (M_{i,j}, n))$ mit

$$Mi, j = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \{i, j\} \in E \\ 2, & \text{wenn } \{i, j\} \notin E \end{cases}$$

- Wenn G einen ungerichteten Hamilton-Kreis hat, dann ist das eine Rundreise der Länge n.
- Wenn $f(G)$ eine Rundreise der Länge $\leq n$ hat, dann muss die Länge genau n sein, und es können nur Kanten mit Entfernung 1 verwendet werden. Daher hat G einen ungerichteten Hamilton-Kreis.

Da f Polynomialzeit von einer DTM berechnet werden kann:
UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\leq_p$ TRAVELLING-SALESPERSON.

Das GRAPH-COLORING-Problem

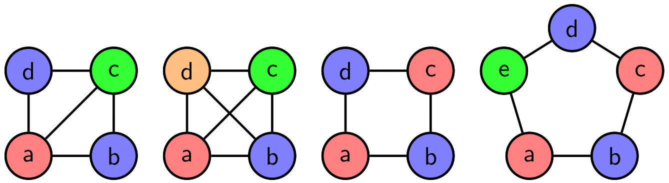
Definition (GRAPH-COLORING-Problem)

Das GRAPH-COLORING-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation wie folgt formulieren:

gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

gefragt: Gibt es Färbung der Knoten in V mit $\leq k$ Farben, sodass keine zwei benachbarten Knoten in G, die gleiche Farbe erhalten.

Beispiel



3 4 2 3

Wie viele Farben sind jeweils minimal notwendig?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Satz

GRAPH-COLORING ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: GRAPH-COLORING $\in \mathcal{NP}$

- Rate nichtdeterministisch die Farbe aus $\{1, \ldots, k\}$ für jeden Knoten $v \in V$.
- Prüfe, dass die Farben von u und v stets verschieden sind, für alle $\{u, v\} \in E$.
  Das geht in (deterministischer) Polynomialzeit.
- Daher kann GRAPH-COLORING auf einer NTM in polynomieller Zeit entschieden werden.

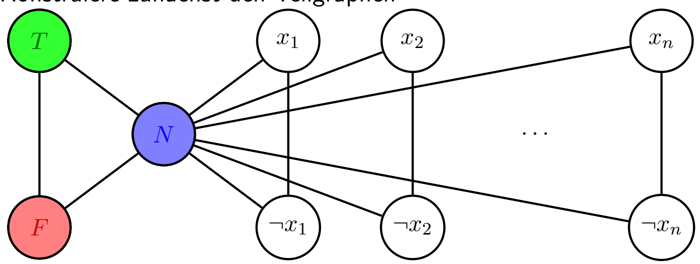
$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING (2)

GRAPH-COLORING ist $\mathcal{NP}$-schwer.

- Ziel: 3-CNF-SAT $\leq_p$ GRAPH-COLORING
- Sei $F = K_1 \wedge \ldots \wedge K_m$ eine 3-CNF, sodass jede Klausel K_i genau 3 Literale enthält
- Sei $Var(F) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- Wir erzeugen ein GRAPH-COLORING Problem mit $k = 3$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING (3)

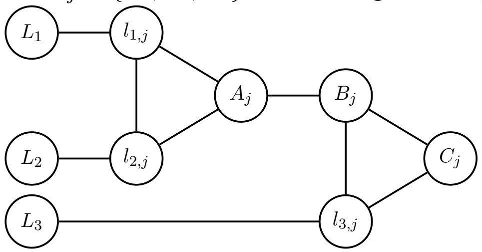
Konstruiere zunächst den Teilgraphen



- Wenn Graph 3-färbbar ist, dann müssen T, N, F mit allen drei Farben gefärbt werden.
- O.B.d.A. seien dies genau die Farben T, N, F mit genau den Knoten
- Für 3-Färbung muss $(x_i, \neg x_i)$ mit (T,F) oder (F,T) gefärbt werden.
- Daher: 3-Färbung erzeugt Belegung $I(x_i) = 1$, wenn x_i mit T gefärbt, $I(x_i)$=0, wenn x_i mit F gefärbt.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING (3)

Für jede Klausel $K_j = \{L_1, L_2, L_3\}$ wird der folgende Teilgraph G_j erzeugt:



- Idee: G_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.
- Verbinde $l_{i,j}$ mit x_k oder $\neg x_k$ aus dem anderen Graphen.
- Farben der L_i daher F oder T.
- Wenn alle L_i mit F gefärbt, kann C_j nicht mit T (sondern nur mit F) gefärbt werden.
- Wenn mind. ein L_i mit T, kann C_j mit T gefärbt werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING (4)

- Erzeuge alle Teilgraphen G_j für $K_1, \ldots, K_m$
- Verbinde $l_{i,j}$ mit x_k wenn $L_{i,j} = x_k$ und mit $\neg x_k$ wenn $L_{i,j} = \neg x_k$
- Verbinde jeweils C_j mit N und C_j mit F.
  (Zulässige Färbung muss C_j auf T setzen)

Korrektheit:

- Sei Graph 3-färbbar
- Dann sind alle C_j mit T gefärbt
- x_i und $\neg x_i$ sind mit T und F oder umgekehrt gefärbt
- Belegung $I(x_i) = 1$ wenn x_i mit T und $I(x_i) = 0$ sonst
- I macht Formel F wahr, da in jeder Klausel ein Literal durch I wahr gemacht wird.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING (5)

- Analog kann aus erfüllendem I eine 3-Färbung erzeugt werden.
- Berechnung des Graph geht in Polynomialzeit.
- Daher 3-CNF-SAT $\leq_p$ GRAPH-COLORING.
- Da 3-CNF-SAT $\mathcal{NP}$-schwer, folgt:

GRAPH-COLORING ist $\mathcal{NP}$-schwer

Zusammenfassung: Polynomielle Reduktionen