$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE, INDEPENDENT SET und VERTEX COVER

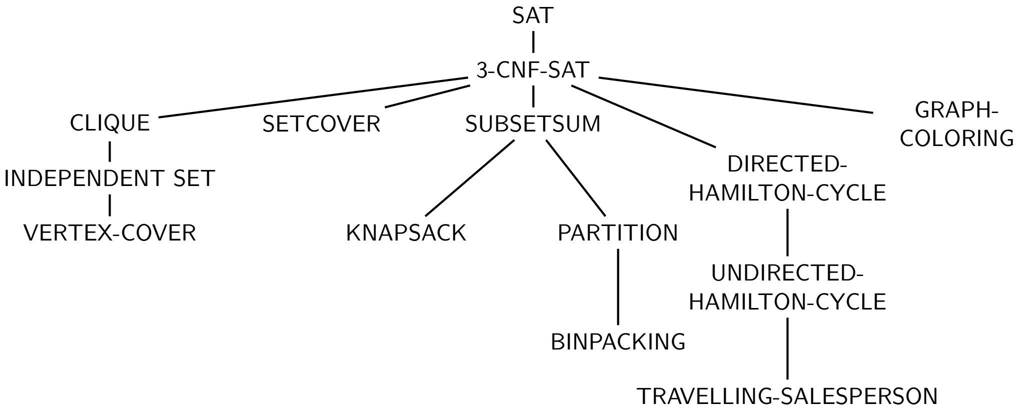
Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 19. Juli 2022

Inhalt der kommenden Vorlesungen

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeitsbeweise für eine Auswahl an Problemen.



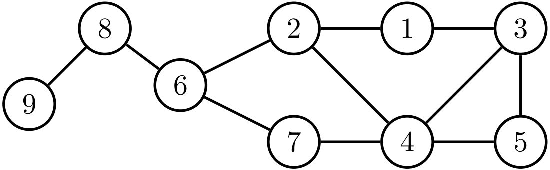
Heute: $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE, INDEPENDENT SET, VERTEX COVER

Wiederholung: Graphen

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ besteht aus

- einer endlichen Menge V von Knoten (vertices)
- einer endlichen Menge E von Kanten (edges) wobei Kanten aus zwei Knoten bestehen, und für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \neq v$

Z.B.: $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\},$
$\{2, 6\}, \{4, 7\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{8, 9\}\}$



Beachte: Wir verbieten

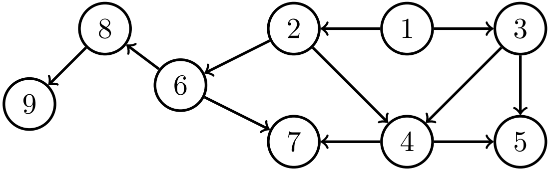
- Schlingen $\{u, u\} \in E$,
- Mehrfachkanten (= mehrere Kanten zwischen u und v)
- Hypergraphen (Kanten mit nicht genau 2 Knoten)

Wiederholung: Gerichtete Graphen

Bei gerichteten Graphen sind die Kanten gerichtet:

$$(u, v) \in E \text{ statt } \{u, v\} \in E.$$

Daher sind Kanten (u, v) und (v, u) verschieden.
Z.B.: $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 5),$
$(2, 6), (4, 7), (6, 7), (6, 8), (8, 9)\}$



Cliquen in Graphen

Definition

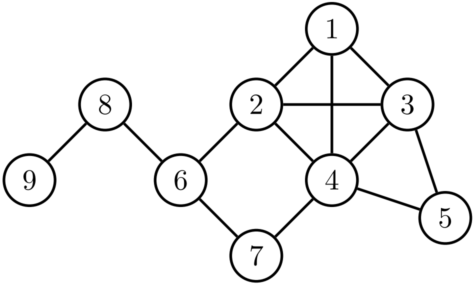
Für einen ungerichteten Graph $G = (V, E)$ ist eine **Clique der Größe k** eine Menge $V' \subseteq V$, sodass $|V'| = k$ und für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt: $\{u, v\} \in E$.

Cliquen in Graphen

Definition

Für einen ungerichteten Graph $G = (V, E)$ ist eine **Clique der Größe k** eine Menge $V' \subseteq V$, sodass $|V'| = k$ und für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt: $\{u, v\} \in E$.

Beispiel:

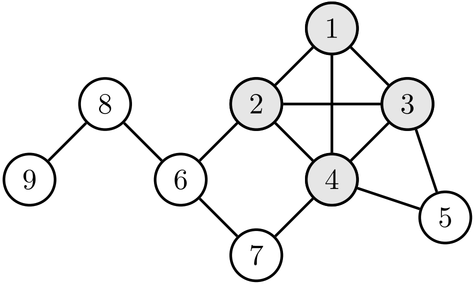


Cliquen in Graphen

Definition

Für einen ungerichteten Graph $G = (V, E)$ ist eine **Clique der Größe k** eine Menge $V' \subseteq V$, sodass $|V'| = k$ und für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt: $\{u, v\} \in E$.

Beispiel:



Clique der Größe 4

CLIQUE-Problem

Definition (CLIQUE-Problem)

Das CLIQUE-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation formulieren durch:

gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

gefragt: Besitzt G eine Clique der Größe mindestens k?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (1)

Satz

CLIQUE ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (1)

Satz

CLIQUE ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: CLIQUE $\in \mathcal{NP}$

- Rate nichtdeterministisch eine Menge $V' \subseteq V$ von k Knoten
- Prüfe (deterministisch), ob für alle $u, v \in V' : \{u, v\} \in E$ gilt.
  Falls ja, akzeptiere, sonst verwerfe.
- Daher kann eine NTM konstruiert werden, die CLIQUE in Polynomialzeit entscheidet.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (2)

Beweis: CLIQUE ist $\mathcal{NP}$-schwer:

- Ziel: 3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (2)

Beweis: CLIQUE ist $\mathcal{NP}$-schwer:

- Ziel: 3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE
- Sei $F = K_1 \wedge \ldots \wedge K_m$ eine 3-CNF, wobei

$$K_i = (L_{i,1} \vee L_{i,2} \vee L_{i,3}) \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

(falls $K_i < 3$ Literale hat, verdopple Literale)

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (2)

Beweis: CLIQUE ist $\mathcal{NP}$-schwer:

- Ziel: 3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE
- Sei $F = K_1 \wedge \ldots \wedge K_m$ eine 3-CNF, wobei

$$K_i = (L_{i,1} \vee L_{i,2} \vee L_{i,3}) \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

(falls $K_i < 3$ Literale hat, verdopple Literale)

- Für jedes $L_{i,j}$ erzeuge: Knoten (i, j) im Graphen, d.h.

$$V = \bigcup_{i=1}^{m} \{(i, 1), (i, 2), (i, 3)\}$$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (3)

...

- Keine Kante innerhalb der drei Knoten $\{(i,1),(i,2),(i,3)\}$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (3)

...

- Keine Kante innerhalb der drei Knoten $\{(i,1),(i,2),(i,3)\}$
- Kanten zwischen „verschiedenen Klauseln“:

$$E \subseteq \{\{(i,j),(i',j')\} \mid i \neq i' \text{ und } i,i' \in \{1,\ldots,m\} \text{ und } j,j' \in \{1,2,3\}\}$$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (3)

...

- Keine Kante innerhalb der drei Knoten $\{(i,1),(i,2),(i,3)\}$
- Kanten zwischen „verschiedenen Klauseln":

$$E \subseteq \{\{(i,j),(i',j')\} \mid i \neq i' \text{ und } i,i' \in \{1,\dots,m\} \text{ und } j,j' \in \{1,2,3\}\}$$

- E maximal, ohne dass sich zwei verbundene Literale $L_{i,j}$ und $L_{i',j'}$ widersprechen (d.h. $L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}}$, wobei: $\overline{L}$ ist negiertes Literal zu L: $\overline{x} = \neg x$ und $\overline{\neg x} = x$).

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (3)

...

- Keine Kante innerhalb der drei Knoten $\{(i,1),(i,2),(i,3)\}$
- Kanten zwischen „verschiedenen Klauseln“:

$$E \subseteq \{\{(i,j),(i',j')\} \mid i \neq i' \text{ und } i,i' \in \{1,\dots,m\} \text{ und } j,j' \in \{1,2,3\}\}$$

- E maximal, ohne dass sich zwei verbundene Literale $L_{i,j}$ und $L_{i',j'}$ widersprechen (d.h. $L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}}$, wobei: $\overline{L}$ ist negiertes Literal zu L: $\overline{x} = \neg x$ und $\overline{\neg x} = x$).

$$E := \left\{ \{(i,j),(i',j')\} \,\middle|\, \begin{array}{l} i \neq i' \text{ und } i,i' \in \{1,\dots,m\} \text{ und } j,j' \in \{1,2,3\} \\ \text{und } L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}} \end{array} \right\}$$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (3)

...

- Keine Kante innerhalb der drei Knoten $\{(i,1),(i,2),(i,3)\}$
- Kanten zwischen „verschiedenen Klauseln“:

$$E \subseteq \{\{(i,j),(i',j')\} \mid i \neq i' \text{ und } i,i' \in \{1,\dots,m\} \text{ und } j,j' \in \{1,2,3\}\}$$

- E maximal, ohne dass sich zwei verbundene Literale $L_{i,j}$ und $L_{i',j'}$ widersprechen (d.h. $L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}}$, wobei: $\overline{L}$ ist negiertes Literal zu L: $\overline{x} = \neg x$ und $\overline{\neg x} = x$).

$$E := \left\{ \{(i,j),(i',j')\} \;\middle|\; \begin{array}{l} i \neq i' \text{ und } i,i' \in \{1,\dots,m\} \text{ und } j,j' \in \{1,2,3\} \\ \text{und } L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}} \end{array} \right\}$$

- $f(F) = ((V,E),m)$ ist in Polynomialzeit berechenbar.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (4)

Zu Zeigen: F erfüllbar, g.d.w. (V, E) eine Clique der Größe mindestens m hat.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (4)

Zu Zeigen: F erfüllbar, g.d.w. (V, E) eine Clique der Größe mindestens m hat.

„$\Rightarrow$“

- Wenn F erfüllbar ist:
  $\exists\ I$, sodass in jeder Klausel $I(K_i)$ mind 1 Literal wahr.
- D.h.: $L_{1,j_1}, \dots, L_{m,j_m}$ mit $I(L_{1,j_1}) = 1, \dots, I(L_{m,j_m}) = 1$.
- Diese können sich paarweise nicht widersprechen
  $\implies$ sind im Graphen paarweise miteinander verbunden
- Sie formen eine Clique der Größe m.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (5)

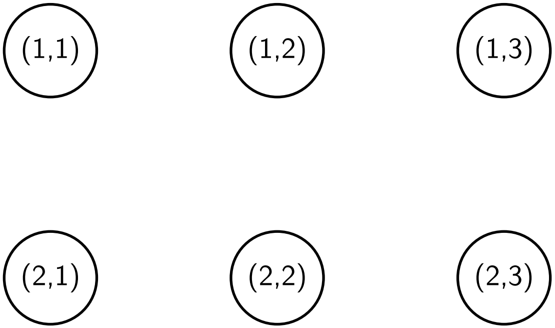
Zu Zeigen: F erfüllbar, g.d.w. (V, E) eine Clique der Größe mindestens m hat.

„$\Leftarrow$“

- (V, E) hat Clique der Größe mindestens m.
- Dann gibt es Clique $V' = \{(i_1, j_1), \ldots (i_m, j_m)\}$,
- Da (i, x) und (i, y) nie miteinander verbunden sind, müssen alle $i_1, \ldots, i_m$ paarweise verschieden sein, also $\{i_1, \ldots, i_m\} = \{1, \ldots, m\}$.
- Daher: Die Literale $L_{i_1,j_1}, \ldots Li_m, j_m$ widersprechen sich paarweise nicht
- Daher Belegung I mit $I(x) = 1$ wenn $L_{i_k,j_k} = x$ und $I(x) = 0$ wenn $L_{i,k,j_k} = \neg x$ und $I(y) = 1$ für alle anderen Variablen
- I macht F wahr

Beispiel

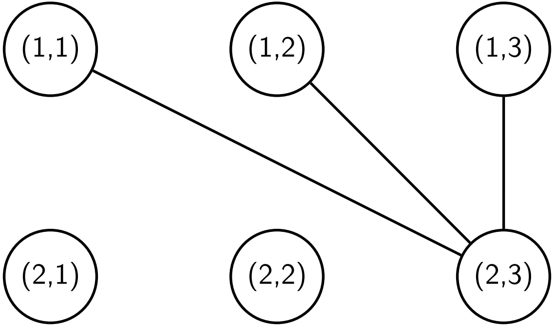
Sei $F = (x_1 \lor x_1 \lor x_1) \land (\neg x_1 \lor \neg x_1 \lor \neg x_1)$



Es gibt keine Kanten, da sich $(1, i)$ und $(2, j)$ stets widersprechen.

Beispiel (2)

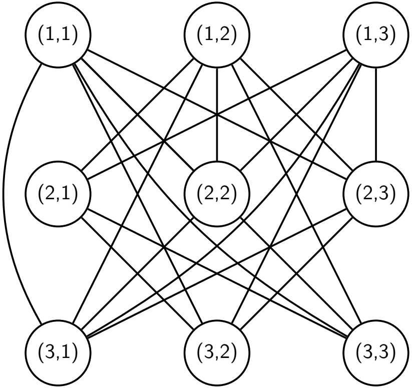
Sei $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee x_1)$



Jede der Cliquen der Größe 2 führt zu erfüllender Belegung, die x_1 wahr macht.

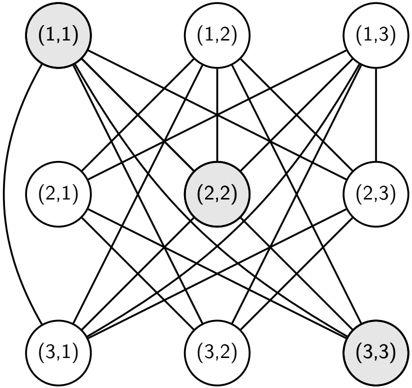
Beispiel (3)

Sei $F = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$



Beispiel (3)

Sei $F = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$



Z.B. ist $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ eine Clique der Größe 3.
Die zugehörige Belegung ist $I(x_1) = 1, I(x_2) = 1, I(x_3) = 0$

Unabhängige Knotenmenge

Definition

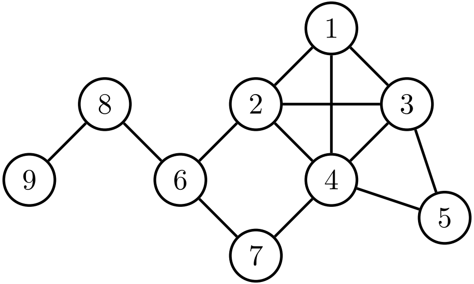
Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist $V' \subseteq V$ eine unabhängige Knotenmenge (independent set), wenn keine zwei Knoten aus V' über eine Kante verbunden sind, d.h. $u, v \in V' \implies \{u, v\} \notin E$.

Unabhängige Knotenmenge

Definition

Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist $V' \subseteq V$ eine unabhängige Knotenmenge (independent set), wenn keine zwei Knoten aus V' über eine Kante verbunden sind, d.h. $u, v \in V' \implies \{u, v\} \notin E$.

Beispiel:

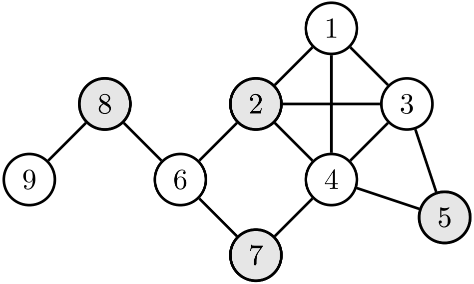


Unabhängige Knotenmenge

Definition

Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist $V' \subseteq V$ eine unabhängige Knotenmenge (independent set), wenn keine zwei Knoten aus V' über eine Kante verbunden sind, d.h. $u, v \in V' \implies \{u, v\} \notin E$.

Beispiel:

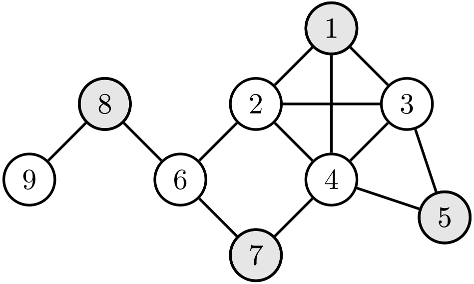


Unabhängige Knotenmenge

Definition

Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist $V' \subseteq V$ eine unabhängige Knotenmenge (independent set), wenn keine zwei Knoten aus V' über eine Kante verbunden sind, d.h. $u, v \in V' \implies \{u, v\} \notin E$.

Beispiel:

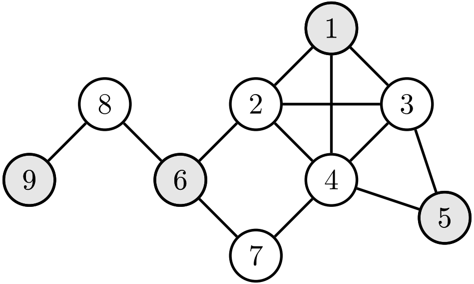


Unabhängige Knotenmenge

Definition

Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist $V' \subseteq V$ eine unabhängige Knotenmenge (independent set), wenn keine zwei Knoten aus V' über eine Kante verbunden sind, d.h. $u, v \in V' \implies \{u, v\} \notin E$.

Beispiel:

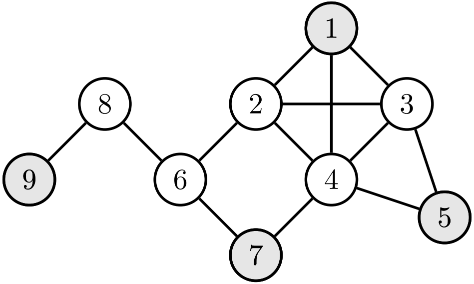


Unabhängige Knotenmenge

Definition

Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist $V' \subseteq V$ eine unabhängige Knotenmenge (independent set), wenn keine zwei Knoten aus V' über eine Kante verbunden sind, d.h. $u, v \in V' \implies \{u, v\} \notin E$.

Beispiel:

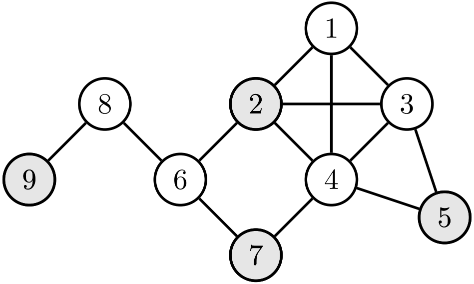


Unabhängige Knotenmenge

Definition

Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist $V' \subseteq V$ eine unabhängige Knotenmenge (independent set), wenn keine zwei Knoten aus V' über eine Kante verbunden sind, d.h. $u, v \in V' \implies \{u, v\} \notin E$.

Beispiel:



Komplementgraph

Für Graph $G = (V, E)$ ist der Komplementgraph zu G der Graph

$$\overline{G} = (V, \overline{E}) \text{ mit } \overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$$

Komplementgraph

Für Graph $G = (V, E)$ ist der Komplementgraph zu G der Graph

$$\overline{G} = (V, \overline{E}) \text{ mit } \overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$$

Lemma

Für jeden ungerichteten Graph G gilt: G hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k genau dann, wenn $\overline{G}$ eine Clique der Größe k hat.

Komplementgraph

Für Graph $G = (V, E)$ ist der Komplementgraph zu G der Graph

$$\overline{G} = (V, \overline{E}) \text{ mit } \overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$$

Lemma

Für jeden ungerichteten Graph G gilt: G hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k genau dann, wenn $\overline{G}$ eine Clique der Größe k hat.

Beweis:

V' ist unabhängige Knotenmenge der Größe k

Komplementgraph

Für Graph $G = (V, E)$ ist der Komplementgraph zu G der Graph

$$\overline{G} = (V, \overline{E}) \text{ mit } \overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$$

Lemma

Für jeden ungerichteten Graph G gilt: G hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k genau dann, wenn $\overline{G}$ eine Clique der Größe k hat.

Beweis:

	V' ist unabhängige Knotenmenge der Größe k
g.d.w.	$V' \subseteq V$ mit $u, v \in V' \implies \{u, v\} \notin E$ und $\lvert V' \rvert = k$

Komplementgraph

Für Graph $G = (V, E)$ ist der Komplementgraph zu G der Graph

$$\overline{G} = (V, \overline{E}) \text{ mit } \overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$$

Lemma

Für jeden ungerichteten Graph G gilt: G hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k genau dann, wenn $\overline{G}$ eine Clique der Größe k hat.

Beweis:

$$\begin{array}{rl} & V' \text{ ist unabhängige Knotenmenge der Größe } k \\ \text{g.d.w.} & V' \subseteq V \text{ mit } u, v \in V' \implies \{u, v\} \notin E \text{ und } |V'| = k \\ \text{g.d.w.} & V' \subseteq V \text{ mit } u, v \in V' \implies \{u, v\} \in \overline{E} \text{ und } |V'| = k \end{array}$$

Komplementgraph

Für Graph $G = (V, E)$ ist der Komplementgraph zu G der Graph

$$\overline{G} = (V, \overline{E}) \text{ mit } \overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$$

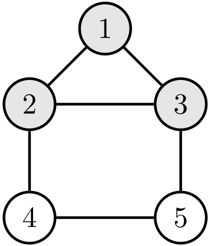
Lemma

Für jeden ungerichteten Graph G gilt: G hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k genau dann, wenn $\overline{G}$ eine Clique der Größe k hat.

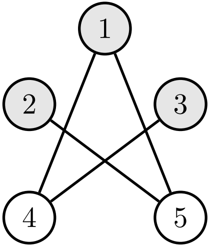
Beweis:

	V' ist unabhängige Knotenmenge der Größe k
g.d.w.	$V' \subseteq V$ mit $u, v \in V' \implies \{u, v\} \notin E$ und $\lvert V' \rvert = k$
g.d.w.	$V' \subseteq V$ mit $u, v \in V' \implies \{u, v\} \in \overline{E}$ und $\lvert V' \rvert = k$
g.d.w.	V' ist eine Clique der Größe k in $\overline{G}$

Beispiel

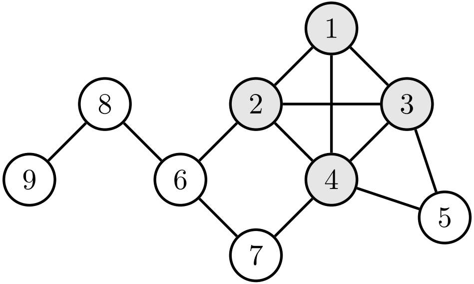


Graph

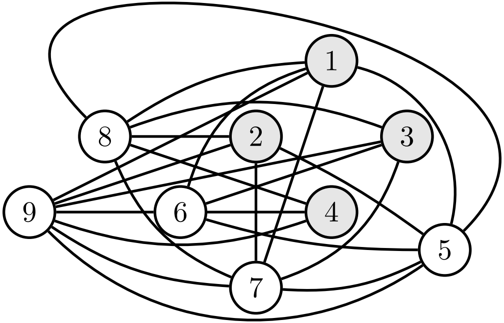


Komplementgraph

Beispiel (2)



Graph



Komplementgraph

INDEPENDENT-SET Problem

Definition (INDEPENDENT-SET-Problem)

Das INDEPENDENT-SET-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation formulieren durch:

gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

gefragt: Besitzt G eine unabhängige Knotenmenge der Größe mindestens k?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET

Satz

INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis, Teil 1: INDEPENDENT-SET $\in \mathcal{NP}$:

- Rate nichtdeterministisch Menge V' von k Knoten.
- Verifiziere deterministisch, ob für jedes Paar $\{u, v\} \in V'$ gilt: $\{u, v\} \notin E$.
  Dies geht in Polynomialzeit.
- Daher kann INDEPENDENT-SET in Polynomialzeit auf einer NTM entschieden werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET (2)

INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$-schwer.

- Sei $f((V,E,m)) = (V,\overline{E},m)$ mit $\overline{E} = \{\{u,v\} \mid u,v \in V, \{u,v\} \notin E\}$.
- Dann gilt:

(V,E) hat eine Clique der Größe mindestens m

g.d.w.

$(V,\overline{E})$ hat unabhängige Knotenmenge (independent set) der Größe mindestens m.

- Funktion f kann in Polynomialzeit berechnet werden.
- Daher: CLIQUE $\leq_p$ INDEPENDENT-SET
- Da CLIQUE $\mathcal{NP}$-schwer, folgt: INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$-schwer.

Überdeckende Knotenmenge

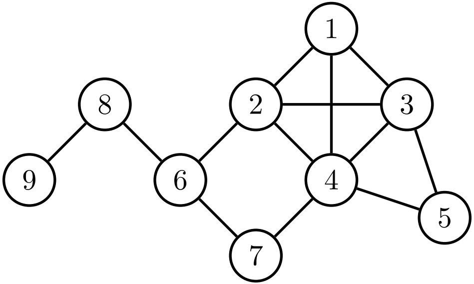
Definition

Für einen Graph $G = (V, E)$ ist $V' \subseteq V$ eine überdeckende Knotenmenge (vertex cover), wenn jede Kante aus E mindestens 1 Knoten in V' hat, d.h. für alle Knoten $u, v \in V : \{u, v\} \in E \implies u \in V' \vee v \in V'$.

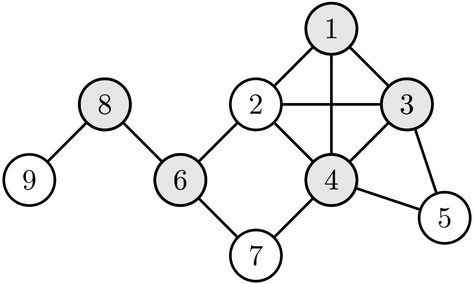
Beachte:

- V ist immer eine überdeckende Knotenmenge
- Man möchte ein möglichst kleine Menge V' finden.

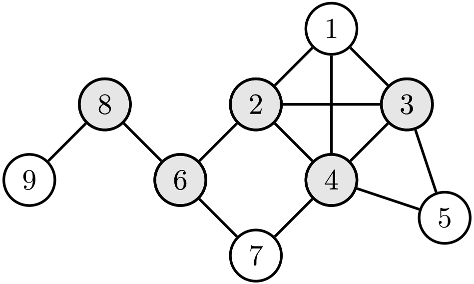
Beispiel



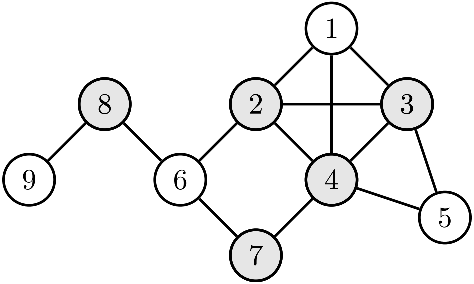
Beispiel



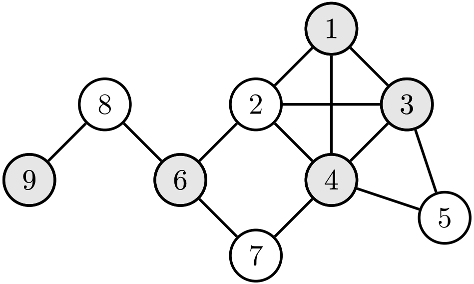
Beispiel



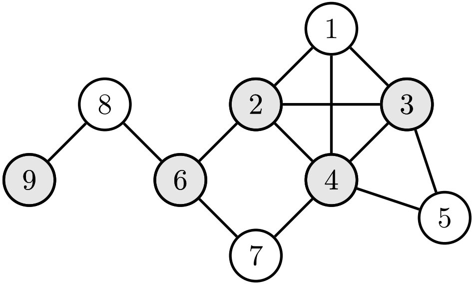
Beispiel



Beispiel



Beispiel



Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

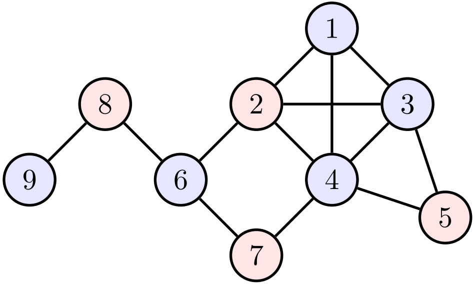
Lemma

$G = (V, E)$ hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k
g.d.w.
G hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe $|V| - k$.

Beweis:

	$V' \subseteq V$ ist unabhängige Knotenmenge
g.d.w.	$u, v \in V' \implies \{u, v\} \notin E$
g.d.w.	$\{u, v\} \in E \implies u \notin V' \vee v \notin V'$
g.d.w.	$\{u, v\} \in E \implies (u \in V \setminus V') \vee (v \in V \setminus V')$
g.d.w.	$V \setminus V'$ ist überdeckende Knotenmenge

Beispiel



unabhängige Knotenmenge

überdeckende Knotenmenge

Das VERTEX-COVER-Problem

Definition (VERTEX-COVER-Problem)

Das VERTEX-COVER-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation formulieren durch:

gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

gefragt: Besitzt G eine überdeckende Knotenmenge der Größe höchstens k?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von VERTEX-COVER

Satz

VERTEX-COVER- ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von VERTEX-COVER

Satz

VERTEX-COVER- ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von VERTEX-COVER

Satz

VERTEX-COVER- ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: Sei $G = (V, E)$. VERTEX-COVER $\in \mathcal{NP}$:

- Rate nichtdeterministisch eine Menge $V' \subseteq V$ von k Knoten
- Prüfe deterministisch (in Polynomialzeit), ob für alle $\{u, v\} \in E$: $u \in V' \vee v \in V'$.
- D.h. VERTEX-COVER wird in Polynomialzeit von NTM entschieden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von VERTEX-COVER

Satz

VERTEX-COVER- ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: Sei $G = (V, E)$. VERTEX-COVER $\in \mathcal{NP}$:

- Rate nichtdeterministisch eine Menge $V' \subseteq V$ von k Knoten
- Prüfe deterministisch (in Polynomialzeit), ob für alle $\{u, v\} \in E$: $u \in V' \vee v \in V'$.
- D.h. VERTEX-COVER wird in Polynomialzeit von NTM entschieden.

VERTEX-COVER ist $\mathcal{NP}$-schwer:

- Sei $f((V, E, m)) = (V, E, |V| - m)$. Dann gilt:

  (V, E) hat unabhängige Knotenmenge (independent set) der Größe mindestens m

  g.d.w.

  (V, E) hat überdeckende Knotenmenge (vertex cover) der Größe höchstens $|V| - m$.
- Da f in Polynomialzeit berechnet werden kann, gilt INDEPENDENT-SET $\leq_p$ VERTEX-COVER.