

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von 3-CNF-SAT

Prof. Dr. David Sabel

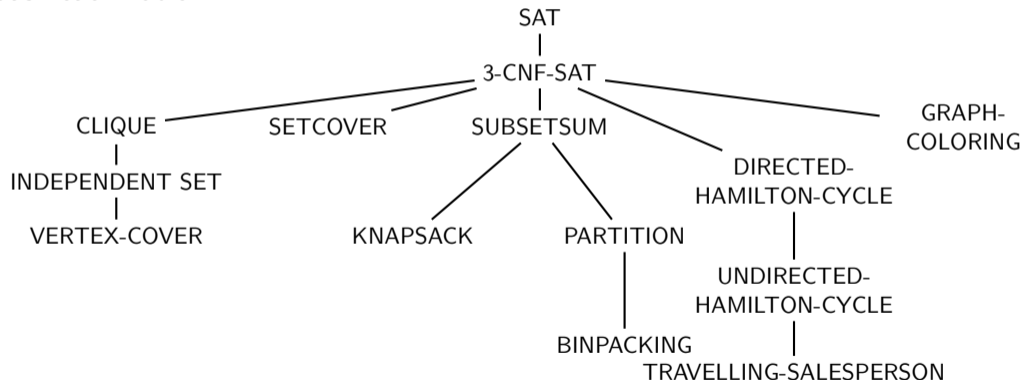
LFE Theoretische Informatik



# Inhalt der kommenden Vorlesungen

$\mathcal{NP}$ -Vollständigkeitsbeweise für eine Auswahl an Problemen.

$\mathcal{NP}$ -Schwere durch Polynomialzeitreduktion bekannter  $\mathcal{NP}$ -vollständiger Probleme auf das neue Problem.



In dieser Vorlesung:  $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von 3-CNF-SAT

## Definition ( $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit)

Eine Sprache  $L$  heißt  $\mathcal{NP}$ -vollständig, wenn gilt

- 1  $L \in \mathcal{NP}$  und
- 2  $L$  ist  $\mathcal{NP}$ -schwer (manchmal auch  $\mathcal{NP}$ -hart genannt):  
Für alle  $L' \in \mathcal{NP}$  gilt  $L' \leq_p L$

Ausreichend, um  $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von  $L$  zu zeigen:

- 1 Zeige  $L \in \mathcal{NP}$
- 2 Zeige  $L_0 \leq_p L$  für ein bekanntes  $\mathcal{NP}$ -vollständiges Problem (z.B.  $L_0 = \text{SAT}$ )

### Konjunktive Normalform

Aussagenlogische Formel  $F$  ist in **konjunktiver Normalform** (CNF), wenn:

$$F = \bigwedge_{i=1}^m \left( \bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j} \right)$$

- **Literal**  $L_{i,j}$  ist aussagenlogische Variable oder deren Negation
- $\left( \bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j} \right)$  ist eine **Klausel**
- Erfüllende Belegung muss  $\geq 1$  Literal pro Klausel wahr machen.

Klauselmengenschreibweise:  $\{ \{ L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1} \}, \dots, \{ L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m} \} \}$

Annahme: Keine Klauseln, die  $x$  und  $\neg x$  enthalten

Diese Klauseln sind immer wahr und können gelöscht werden.

# Konjunktive Normalform

---

Jede aussagenlogische Formel kann in eine **äquivalente** konjunktive Normalform gebracht werden:

- $\iff$  ,  $\implies$  auflösen
- Negationen nach innen schieben und anschließend Ausmultiplizieren (Distributivität, Kommutativität anwenden, um konjunktive Normalform herzustellen)

Aber:

- Algorithmus hat im worst case **exponentielle Laufzeit**
- Algorithmus kann daher **nicht** für eine **Polynomialzeitreduktion** verwendet werden.

### Definition (3-CNF-SAT)

Das **3-CNF-SAT-Problem** lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation formulieren als:

gegeben: Eine aussagenlogische Formel  $F$  in konjunktiver Normalform, sodass jede Klausel höchstens 3 Literale enthält.

gefragt: Ist  $F$  erfüllbar? Genauer: Gibt es eine erfüllende Belegung der Variablen mit den Wahrheitswerten 0 und 1, sodass  $F$  den Wert 1 erhält?

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von 3-CNF-SAT

---

## Satz

3-CNF-SAT ist  $\mathcal{NP}$ -vollständig.

Beweis, Teil 1: 3-CNF-SAT ist in  $\mathcal{NP}$

- Rate nicht-deterministisch eine Belegung der Variablen
- Prüfe in jedem nicht-deterministischen Zweig deterministisch, ob die Belegung die 3-CNF wahr macht. Akzeptiere in diesem Fall, sonst verwerfe.  
Dies geht in Polynomialzeit in der Größe der 3-CNF.
- Daher kann 3-CNF-SAT auf einer NTM in Polynomialzeit entschieden werden.

## $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (2)

---

Beweis, Teil 2: 3-CNF-SAT ist  $\mathcal{NP}$ -schwer

- Wir zeigen  $\text{SAT} \leq_p \text{3-CNF-SAT}$ .
- Gesucht: Polynomiell berechenbare, totale Funktion  $f$ , sodass  $F$  erfüllbar g.d.w. 3-CNF  $f(F)$  erfüllbar.



## $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (2)

---

Beweis, Teil 2: 3-CNF-SAT ist  $\mathcal{NP}$ -schwer

- Wir zeigen  $\text{SAT} \leq_p \text{3-CNF-SAT}$ .
- Gesucht: Polynomiell berechenbare, totale Funktion  $f$ , sodass  $F$  erfüllbar g.d.w. 3-CNF  $f(F)$  erfüllbar.
- $f$  muss **die Erfüllbarkeit erhalten**, aber nicht die **Äquivalenz**
- Verfahren, um  $F$  in erfüllbarkeitsäquivalente 3-CNF  $f(F)$  umzuformen, sodass  $f(F)$  **polynomielle Größe** in  $|F|$  hat:

**Tseitin-Transformation**

## $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (3)

---

### Tseitin-Transformation:

- Schiebe alle **Negationen nach innen** vor die Literale, dabei werden die Regeln  $\neg\neg F \rightarrow F$ ,  $\neg(F \wedge G) \rightarrow \neg F \vee \neg G$ ,  $\neg(F \vee G) \rightarrow \neg F \wedge \neg G$ ,  $\neg(F \iff G) \rightarrow (\neg F) \iff G$  und  $\neg(F \implies G) \rightarrow F \wedge \neg G$  angewendet.

## $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (3)

---

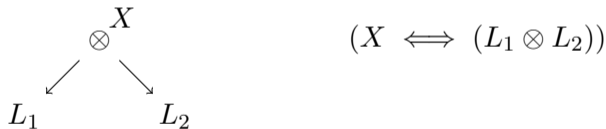
### Tseitin-Transformation:

- Schiebe alle **Negationen nach innen** vor die Literale, dabei werden die Regeln  $\neg\neg F \rightarrow F$ ,  $\neg(F \wedge G) \rightarrow \neg F \vee \neg G$ ,  $\neg(F \vee G) \rightarrow \neg F \wedge \neg G$ ,  $\neg(F \iff G) \rightarrow (\neg F) \iff G$  und  $\neg(F \implies G) \rightarrow F \wedge \neg G$  angewendet.
- Syntaxbaum der Formel (Blätter = Literale):  
Für jeden Nichtblatt-Knoten: **neue aussagenlogische Variable**

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (3)

## Tseitin-Transformation:

- Schiebe alle **Negationen nach innen** vor die Literale, dabei werden die Regeln  $\neg\neg F \rightarrow F$ ,  $\neg(F \wedge G) \rightarrow \neg F \vee \neg G$ ,  $\neg(F \vee G) \rightarrow \neg F \wedge \neg G$ ,  $\neg(F \iff G) \rightarrow (\neg F) \iff G$  und  $\neg(F \implies G) \rightarrow F \wedge \neg G$  angewendet.
- Syntaxbaum der Formel (Blätter = Literale):  
Für jeden Nichtblatt-Knoten: **neue aussagenlogische Variable**
- pro Gabelung: erzeuge



wobei  $\otimes \in \{ \iff, \wedge, \vee, \implies \}$  und  $L_1, L_2$  entweder die neue Variable oder das Literal am Blatt.

## $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (3)

### Tseitin-Transformation:

- Schiebe alle **Negationen nach innen** vor die Literale, dabei werden die Regeln  $\neg\neg F \rightarrow F$ ,  $\neg(F \wedge G) \rightarrow \neg F \vee \neg G$ ,  $\neg(F \vee G) \rightarrow \neg F \wedge \neg G$ ,  $\neg(F \iff G) \rightarrow (\neg F) \iff G$  und  $\neg(F \implies G) \rightarrow F \wedge \neg G$  angewendet.
- Syntaxbaum der Formel (Blätter = Literale):  
Für jeden Nichtblatt-Knoten: **neue aussagenlogische Variable**
- pro Gabelung: erzeuge



wobei  $\otimes \in \{ \iff, \wedge, \vee, \implies \}$  und  $L_1, L_2$  entweder die neue Variable oder das Literal am Blatt.

- Konjugiere diese Formeln zu  $F'$  und schließlich erzeuge  $W \wedge F'$ , mit  $W$  Variable für die Wurzel.

### Tseitin-Transformation (Fortsetzung)

- Insgesamt:  $W \wedge \bigwedge_{i,j,k} (X_i \iff (X_j \otimes_i X_k))$ , wobei  $X_r$  Literale sind.
- Berechne für jede Subformel  $(X_i \iff (X_j \otimes_i X_k))$  die CNF mit dem üblichen Algorithmus.
- Lösche doppelte Vorkommen von Literalen.
- Ergibt 3-CNF, da pro Klausel nur 3 verschiedene Variablen vorkommen können.

## $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (4)

---

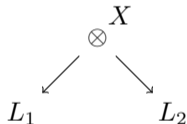
Komplexität:

- Größe der kleinen CNFs ist konstant.
- Jede Klausel hat nur 3 Literale: Mehr Variablen gibt es in den kleinen Formeln nicht, doppelte Literale löschen
- Größe der 3-CNF ist polynomiell in der ursprünglichen Formel
- Berechnung in Polynomialzeit geht daher!

## $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (5)

$F$  erfüllbar g.d.w.  $f(F)$  erfüllbar:

- „ $\Rightarrow$ “: Sei  $I$  Belegung mit  $I(F) = 1$ . Sei  $I'$  Belegung mit
  - $I'(X) = I(X)$  für alle Variablen, die in  $F$  vorkommen
  - $I'(W) = 1$  für die Variable  $W$  an der Wurzel
  - $I'(X) = I'(L_1 \otimes L_2)$  für



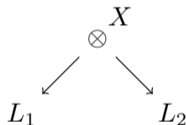
Dann gilt:  $I'(f(F)) = 1$



## $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (5)

$F$  erfüllbar g.d.w.  $f(F)$  erfüllbar:

- „ $\Rightarrow$ “: Sei  $I$  Belegung mit  $I(F) = 1$ . Sei  $I'$  Belegung mit
  - $I'(X) = I(X)$  für alle Variablen, die in  $F$  vorkommen
  - $I'(W) = 1$  für die Variable  $W$  an der Wurzel
  - $I'(X) = I'(L_1 \otimes L_2)$  für



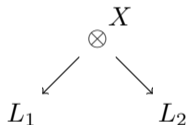
Dann gilt:  $I'(f(F)) = 1$

- „ $\Leftarrow$ “: Sei  $J$  Belegung von  $f(F)$  mit  $J(f(F)) = 1$   
Dann:  $I = J|_{Var(F)}$  macht  $F$  wahr.

## $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (5)

$F$  erfüllbar g.d.w.  $f(F)$  erfüllbar:

- „ $\Rightarrow$ “: Sei  $I$  Belegung mit  $I(F) = 1$ . Sei  $I'$  Belegung mit
  - $I'(X) = I(X)$  für alle Variablen, die in  $F$  vorkommen
  - $I'(W) = 1$  für die Variable  $W$  an der Wurzel
  - $I'(X) = I'(L_1 \otimes L_2)$  für



Dann gilt:  $I'(f(F)) = 1$

- „ $\Leftarrow$ “: Sei  $J$  Belegung von  $f(F)$  mit  $J(f(F)) = 1$   
Dann:  $I = J|_{Var(F)}$  macht  $F$  wahr.

Damit:  $SAT \leq_p 3\text{-CNF-SAT}$ .

Da  $SAT$   $\mathcal{NP}$ -schwer, ist somit auch  $3\text{-CNF-SAT}$   $\mathcal{NP}$ -schwer.

## Beispiel

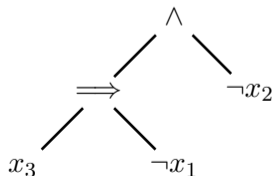
---

$$F = \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2)$$

Negationen nach innen schieben:

$$\begin{aligned} & \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2) \\ \rightarrow & (\neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1)) \wedge \neg x_2) \\ \rightarrow & (x_3 \implies \neg x_1) \wedge \neg x_2 \end{aligned}$$

Syntaxbaum dazu:



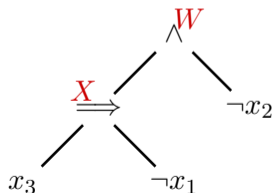
## Beispiel

$$F = \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2)$$

Negationen nach innen schieben:

$$\begin{aligned} & \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2) \\ \rightarrow & (\neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1)) \wedge \neg x_2) \\ \rightarrow & (x_3 \implies \neg x_1) \wedge \neg x_2 \end{aligned}$$

Syntaxbaum dazu:



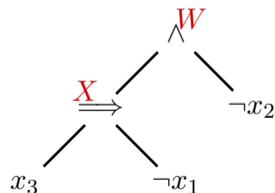
## Beispiel

$$F = \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2)$$

Negationen nach innen schieben:

$$\begin{aligned} & \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2) \\ \rightarrow & (\neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1)) \wedge \neg x_2) \\ \rightarrow & (x_3 \implies \neg x_1) \wedge \neg x_2 \end{aligned}$$

Syntaxbaum dazu:



$$\text{Formel: } W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$

## Beispiel (2)

---

Berechnung der CNFs der kleinen Subformeln:

$$W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$

## Beispiel (2)

---

Berechnung der CNFs der kleinen Subformeln:

$$W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightarrow W \wedge ((W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$

## Beispiel (2)

---

Berechnung der CNFs der kleinen Subformeln:

$$\begin{aligned} & W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge ((W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge ((W \vee (\neg X \vee x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \end{aligned}$$



## Beispiel (2)

---

Berechnung der CNFs der kleinen Subformeln:

$$\begin{aligned} & W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge ((W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge ((W \vee (\neg X \vee x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \end{aligned}$$

## Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Subformeln:

$$\begin{aligned} & W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge ((W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge ((W \vee (\neg X \vee x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee (x_3 \implies \neg x_1)) \wedge (X \vee \neg(x_3 \implies \neg x_1)) \end{aligned}$$

## Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Subformeln:

$$\begin{aligned} & W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge ((W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge ((W \vee (\neg X \vee x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee (x_3 \implies \neg x_1)) \wedge (X \vee \neg(x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee \neg(\neg x_3 \vee \neg x_1)) \end{aligned}$$

## Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Subformeln:

$$\begin{aligned} & W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge ((W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge ((W \vee (\neg X \vee x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee (x_3 \implies \neg x_1)) \wedge (X \vee \neg(x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee \neg(\neg x_3 \vee \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee (x_3 \wedge x_1)) \end{aligned}$$

## Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Subformeln:

$$\begin{aligned} & W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge ((W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge ((W \vee (\neg X \vee x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee (x_3 \implies \neg x_1)) \wedge (X \vee \neg(x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee \neg(\neg x_3 \vee \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee (x_3 \wedge x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee x_3) \wedge (X \vee x_1) \end{aligned}$$

## Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Subformeln:

$$\begin{aligned} & W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge ((W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge ((W \vee (\neg X \vee x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee (x_3 \implies \neg x_1)) \wedge (X \vee \neg(x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee \neg(\neg x_3 \vee \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee (x_3 \wedge x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee x_3) \wedge (X \vee x_1) \end{aligned}$$

Erfüllende Belegung  $J$ :

$$J(W) = 1, J(X) = 1, J(x_1) = 0, J(x_2) = 0, J(x_3) = 1$$

## Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Subformeln:

$$\begin{aligned} & W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge ((W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge ((W \vee (\neg X \vee x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee (x_3 \implies \neg x_1)) \wedge (X \vee \neg(x_3 \implies \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee \neg(\neg x_3 \vee \neg x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee (x_3 \wedge x_1)) \\ \rightarrow & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\ & \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee x_3) \wedge (X \vee x_1) \end{aligned}$$

Erfüllende Belegung  $J$ :

$$J(W) = 1, J(X) = 1, J(x_1) = 0, J(x_2) = 0, J(x_3) = 1$$

Belegung  $I$ :

$$I(x_1) = 0, I(x_2) = 0, I(x_3) = 1 \text{ erfüllt } F = \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2)$$