Reduktion und der Satz von Rice

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 2. Juli 2022

Wiederholung: Spezielles Halteproblem

Definition (Spezielles Halteproblem)

Das spezielle Halteproblem ist die Sprache

$$K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält für Eingabe } w\}$$

Beachte: K ist semi-entscheidbar:

Wiederhole für $i = 0, 1, \ldots$:

Simuliere i Schritte von M_w auf Eingabe w

Wenn M_w akzeptiert, dann akzeptiere und gebe 1 aus

Beachte: K unentscheidbar, aber semi-entscheidbar $\Longrightarrow$ $\overline{K}$ nicht semi-entscheidbar

Der Beweis, dass K unentscheidbar ist, verwendet ein Diagonalisierungsargument, dass wir gleich genauer erläutern.

Diagonalisierungsargument

	w_1	w_2	w_3	w_4	$\dots$
M_{w_1}	ja	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$
M_{w_2}	$nein$	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$
M_{w_3}	ja	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$
M_{w_4}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

- Spalten: alle Worte über $\{0,1\}$: $w_1, w_2, \dots$
- Zeilen: alle TMs $M_{w_1}, M_{w_2}, \dots$.
- Eintrag in Zeile i und Spalte j: ja, wenn M_{w_i} bei Eingabe w_j akzeptiert, $nein$ sonst.

Diagonalisierungsargument

	w_1	w_2	w_3	w_4	$\dots$
M_{w_1}	ja	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$
M_{w_2}	$nein$	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$
M_{w_3}	ja	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$
M_{w_4}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
M_{w_D}					

- Spalten: alle Worte über $\{0,1\}$: $w_1, w_2, \dots$
- Zeilen: alle TMs $M_{w_1}, M_{w_2}, \dots$.
- Eintrag in Zeile i und Spalte j: ja, wenn M_{w_i} bei Eingabe w_j akzeptiert, $nein$ sonst.
- Diagonalsprache: $L_D = \{w_i \mid M_{w_i}$ hält nicht für Eingabe $w_i\} (= \overline{K})$
- Sei w_D die TM-Beschreibung von TM M_{w_D}, die χ_{L_D} berechnet.

Diagonalisierungsargument

	w_1	w_2	w_3	w_4	$\dots$
M_{w_1}	ja	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$
M_{w_2}	$nein$	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$
M_{w_3}	ja	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$
M_{w_4}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
M_{w_D}	$nein$				

- Spalten: alle Worte über $\{0, 1\}$: $w_1, w_2, \dots$
- Zeilen: alle TMs $M_{w_1}, M_{w_2}, \dots$.
- Eintrag in Zeile i und Spalte j: ja, wenn M_{w_i} bei Eingabe w_j akzeptiert, $nein$ sonst.
- Diagonalsprache: $L_D = \{w_i \mid M_{w_i}$ hält nicht für Eingabe $w_i\}(= \overline{K})$
- Sei w_D die TM-Beschreibung von TM M_{w_D}, die χ_{L_D} berechnet.

Diagonalisierungsargument

	w_1	w_2	w_3	w_4	$\dots$
M_{w_1}	ja	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$
M_{w_2}	$nein$	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$
M_{w_3}	ja	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$
M_{w_4}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
M_{w_D}	$nein$	ja			

- Spalten: alle Worte über $\{0,1\}$: $w_1, w_2, \dots$
- Zeilen: alle TMs $M_{w_1}, M_{w_2}, \dots$.
- Eintrag in Zeile i und Spalte j: ja, wenn M_{w_i} bei Eingabe w_j akzeptiert, $nein$ sonst.
- Diagonalsprache: $L_D = \{w_i \mid M_{w_i}$ hält nicht für Eingabe $w_i\} (= \overline{K})$
- Sei w_D die TM-Beschreibung von TM M_{w_D}, die χ_{L_D} berechnet.

Diagonalisierungsargument

	w_1	w_2	w_3	w_4	$\dots$
M_{w_1}	ja	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$
M_{w_2}	$nein$	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$
M_{w_3}	ja	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$
M_{w_4}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
M_{w_D}	$nein$	ja	$nein$		

- Spalten: alle Worte über $\{0,1\}$: $w_1, w_2, \dots$
- Zeilen: alle TMs $M_{w_1}, M_{w_2}, \dots$.
- Eintrag in Zeile i und Spalte j: ja, wenn M_{w_i} bei Eingabe w_j akzeptiert, $nein$ sonst.
- Diagonalsprache: $L_D = \{w_i \mid M_{w_i}$ hält nicht für Eingabe $w_i\}(= \overline{K})$
- Sei w_D die TM-Beschreibung von TM M_{w_D}, die χ_{L_D} berechnet.

Diagonalisierungsargument

	w_1	w_2	w_3	w_4	$\dots$	w_D
M_{w_1}	ja	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$	$\dots$
M_{w_2}	$nein$	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$	$\dots$
M_{w_3}	ja	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$	$\dots$
M_{w_4}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
M_{w_D}	$nein$	ja	$nein$	$\dots$	$\dots$	

- Spalten: alle Worte über $\{0,1\}$: $w_1, w_2, \dots$
- Zeilen: alle TMs $M_{w_1}, M_{w_2}, \dots$.
- Eintrag in Zeile i und Spalte j: ja, wenn M_{w_i} bei Eingabe w_j akzeptiert, $nein$ sonst.
- Diagonalsprache: $L_D = \{w_i \mid M_{w_i}$ hält nicht für Eingabe $w_i\} (= \overline{K})$
- Sei w_D die TM-Beschreibung von TM M_{w_D}, die χ_{L_D} berechnet.

Diagonalisierungsargument

	w_1	w_2	w_3	w_4	$\dots$	w_D
M_{w_1}	ja	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$	$\dots$
M_{w_2}	$nein$	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$	$\dots$
M_{w_3}	ja	$nein$	ja	$\dots$	$\dots$	$\dots$
M_{w_4}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
M_{w_D}	$nein$	ja	$nein$	$\dots$	$\dots$	??

- Spalten: alle Worte über $\{0,1\}$: $w_1, w_2, \dots$
- Zeilen: alle TMs $M_{w_1}, M_{w_2}, \dots$.
- Eintrag in Zeile i und Spalte j: ja, wenn M_{w_i} bei Eingabe w_j akzeptiert, $nein$ sonst.
- Diagonalsprache: $L_D = \{w_i \mid M_{w_i}$ hält nicht für Eingabe $w_i\} (= \overline{K})$
- Sei w_D die TM-Beschreibung von TM M_{w_D}, die χ_{L_D} berechnet.
- Eintrag in Zeile M_{w_D} und Spalte w_D ist ja, g.d.w. der Eintrag in Spalte w_D und Zeile M_{w_D} $nein$ ist. Widerspruch! L_D ist daher nicht (semi-)entscheidbar.

Reduktion

- Hilfsmittel, um Unentscheidbarkeit nachzuweisen
- Statt Unentscheidbarkeit von Sprache L von Grundauf neu zu beweisen, zeige:

  Wenn man L entscheiden könnte, dann könnte man auch L_0 entscheiden.
- Wenn L_0 bereits als unentscheidbar gezeigt, folgt L ist unentscheidbar.

Reduktion (Definition)

Definition (Reduktion (einer Sprache auf eine andere))

Sei $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ Sprachen. Dann sagen wir L_1 ist auf L_2 reduzierbar (geschrieben $L_1 \leq L_2$), falls es eine totale und berechenbare Funktion $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ gibt, sodass für alle $w \in \Sigma_1^*$ gilt: $w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$

Reduktion (Definition)

Definition (Reduktion (einer Sprache auf eine andere))

Sei $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ Sprachen. Dann sagen wir L_1 ist auf L_2 reduzierbar (geschrieben $L_1 \leq L_2$), falls es eine totale und berechenbare Funktion $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ gibt, sodass für alle $w \in \Sigma_1^*$ gilt: $w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$

Satz

Wenn $L_1 \leq L_2$ und L_2 entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar) ist, dann ist auch L_1 entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar).

Reduktion (Definition)

Definition (Reduktion (einer Sprache auf eine andere))

Sei $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ Sprachen. Dann sagen wir L_1 ist auf L_2 reduzierbar (geschrieben $L_1 \leq L_2$), falls es eine totale und berechenbare Funktion $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ gibt, sodass für alle $w \in \Sigma_1^*$ gilt: $w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$

Satz

Wenn $L_1 \leq L_2$ und L_2 entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar) ist, dann ist auch L_1 entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar).

Beweis (nur entscheidbar, semi-entscheidbar analog): Sei f die $L_1 \leq L_2$ bezeugende (und berechenbare) Funktion. Da L_2 entscheidbar, ist χ_{L_2} berechenbar. Damit ist auch $\chi_{L_1}(w) := \chi_{L_2}(f(w))$ berechenbar. Offensichtlich gilt

$$\chi(L_1)(w) := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & w \in L_1 \\ 0, & w \notin L_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & f(w) \in L_2 \\ 0, & f(w) \notin L_2 \end{array} \right\} = \chi_{L_2}(f(w))$$

Unentscheidbarkeit

Mit Kontraposition folgt:

Lemma

Sei $L_1 \leq L_2$ und L_1 ist unentscheidbar.
Dann ist auch L_2 unentscheidbar.

Das ist die Richtung, die wir meistens brauchen:

- L_1 sei eine bekannt unentscheidbare Sprache
- Reduziere L_1 auf L_2 durch Angabe einer berechenbaren Funktion f mit $w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$.
- Damit folgt, dass L_2 unentscheidbar ist.

Halteproblem

Definition (Halteproblem)

Das (allgemeine) Halteproblem ist $H := \{w\#x \mid \text{TM } M_w \text{ hält für Eingabe } x\}$

Halteproblem

Definition (Halteproblem)

Das (allgemeine) Halteproblem ist $H := \{w\#x \mid \text{TM } M_w \text{ hält für Eingabe } x\}$

Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

Halteproblem

Definition (Halteproblem)

Das (allgemeine) Halteproblem ist $H := \{w\#x \mid \text{TM } M_w \text{ hält für Eingabe } x\}$

Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

Beweis: Wir reduzieren das spezielle Halteproblem auf das allgemeine Halteproblem, und zeigen daher $K \leq H$. Sei $f(w) = w\#w$. Dann gilt

$$\begin{array}{ll} & w \in K \\ \text{g.d.w.} & M_w \text{ hält für Eingabe } w \\ \text{g.d.w.} & w\#w \in H \\ \text{g.d.w.} & f(w) \in H \end{array}$$

f kann durch eine TM berechnet werden. Damit gilt $K \leq H$ und damit folgt aus K unentscheidbar auch H unentscheidbar.

Halteproblem bei leerer Eingabe

Definition

Das Halteproblem auf leerem Band ist $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält für die leere Eingabe}\}$

Halteproblem bei leerer Eingabe

Definition

Das Halteproblem auf leerem Band ist $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält für die leere Eingabe}\}$

Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

Halteproblem bei leerer Eingabe

Definition

Das Halteproblem auf leerem Band ist $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält für die leere Eingabe}\}$

Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

Beweis: Wir reduzieren H auf H_0: Sei $f(w_M\#x) = w_{M_{0,x}}$, wobei TM $M_{0,x}$ erst x auf das Band schreibt, sich dann wie M verhält.

$$
\begin{array}{ll}
 & w_M\#x \in H \\
\text{g.d.w.} & M_w \text{ hält für Eingabe } x \\
\text{g.d.w.} & M_{0,x} \text{ hält für die leere Eingabe} \\
\text{g.d.w.} & w_{M_{0,x}} \in H_0 \\
\text{g.d.w.} & f(w_M\#x) \in H_0
\end{array}
$$

Funktion f kann durch eine TM berechnet werden. Daher gilt $H \leq H_0$. Da H unentscheidbar, ist H_0 unentscheidbar.

Der Satz von Rice

Von Henry Gordon Rice im Jahr 1953 veröffentlicht.

Satz von Rice

Sei $\mathcal{R}$ die Klasse aller Turingberechenbaren Funktionen. Sei $\mathcal{S}$ eine beliebige Teilmenge, sodass $\emptyset \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. Dann ist die Sprache

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

unentscheidbar.

Der Satz zeigt:

- Fast alle interessanten Eigenschaften von TMs sind algorithmisch nicht entscheidbar.
- Z.B. folgt, dass die Sprache

  $$L = \{w \mid M_w \text{ berechnet eine konstante Funktion}\}$$

  nicht entscheidbar ist.

Beweis des Satzes von Rice

Sei $\Omega(x) = \perp$ für alle x.

Zeige:

1. $H_0 \leq C(\mathcal{S})$ für den Fall $\Omega \notin \mathcal{S}$.

   In diesem Fall folgt aus der Unentscheidbarkeit von H_0 die Unentscheidbarkeit von $C(\mathcal{S})$

2. $H_0 \leq C(\mathcal{R} \setminus \mathcal{S})$ falls $\Omega \in \mathcal{S}$.

   In diesem Fall folgt aus der Unentscheidbarkeit von H_0 die Unentscheidbarkeit von $C(\mathcal{R} \setminus \mathcal{S})$ und damit auch die Unentscheidbarkeit von $C(\mathcal{S})$, denn $\overline{C(\mathcal{S})} = C(\mathcal{R} \setminus \mathcal{S})$ und $\forall L : L$ entscheidbar $\iff$ $\overline{L}$ entscheidbar.

Wir beweisen nur 1), da 2) komplett analog geht.

Beweis des Satzes von Rice (2)

Fall: $\Omega \notin \mathcal{S}$. Da $\emptyset \subset \mathcal{S}$, gibt es eine Funktion $q \in \mathcal{S}$, die von e. TM Q berechnet wird.

Konstruktion einer TM M^*: Für TM M und Eingabe y:

1. M^* simuliert M auf leerer Eingabe.
2. Wenn M anhält, dann simuliert M^* die TM Q mit Eingabe y.

Sei f die Funktion, die aus der Beschreibung w für TM M_w, die Beschreibung $f(w)$ von M_w^* erstellt.

$$
\begin{aligned}
\text{Dann gilt: } w \in H_0 &\implies M_w \text{ hält auf leerer Eingabe} \\
&\implies M_w^* \text{ berechnet } q \\
&\implies \text{die von } M_w^* \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S} \\
&\implies f(w) \in C(\mathcal{S}) \\
\text{und ebenso: } w \notin H_0 &\implies M_w \text{ hält nicht auf leerer Eingabe} \\
&\implies M_w^* \text{ berechnet } \Omega \\
&\implies \text{die von } M_w^* \text{ berechnete Funktion liegt nicht in } \mathcal{S} \\
&\implies f(w) \notin C(\mathcal{S})
\end{aligned}
$$

Beweis des Satzes von Rice (3)

Aus $w \in H_0 \implies f(w) \in C(\mathcal{S})$ und $w \notin H_0 \implies f(w) \notin C(\mathcal{S})$ folgt

$$w \in H_0 \iff f(w) \in C(\mathcal{S})$$

(da $w \notin H_0 \implies f(w) \notin C(\mathcal{S})$ äquivalent zu $f(w) \in C(\mathcal{S}) \implies w \in H_0$)

Da f berechenbar ist und $w \in H_0 \iff f(w) \in C(\mathcal{S})$ gilt $H_0 \leq C(\mathcal{S})$.

Da H_0 unentscheidbar ist, ist damit auch $C(\mathcal{S})$ unentscheidbar.

Beispiele für die Anwendung des Satzes von Rice

Beispiel

Es ist unentscheidbar, ob eine Turingmaschine für jede Eingabe $i \in \mathbb{N}$ die Zahl $i + 1 \in \mathbb{N}$ berechnet.

- Sei $succ(bin(i)) = bin(i + 1)$.
- Sei $S = \{succ\}$.
- S ist nicht trivial:
  - $\emptyset \subset S$: klar
  - $S \subset \mathcal{R}$: f mit $f(bin(i)) = bin(i + 2)$ ist berechenbar, aber $f \notin S$.
- Mit Satz von Rice:

  $C(S) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion ist } succ\}$

  ist nicht entscheidbar.

Beispiele für die Anwendung des Satzes von Rice (2)

Beispiel

Es ist unentscheidbar, ob für Turingmaschinen M gilt: $L(M) = \emptyset$.

- Sei $S := \{f \mid f(x)$ ist undefiniert für alle $x\}$.
- S ist nicht trivial:
  - $\emptyset \subset S$: klar
  - $S \subset \mathcal{R}$: f mit $f(x) = x$ ist berechenbar, aber $f \notin S$.
- Mit Satz von Rice:

$$\begin{aligned} C(S) &= \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } S\} \\ &= \{w \mid M_w \text{ akzeptiert nie}\} \\ &= \{w \mid L(M_w) = \emptyset\} \end{aligned}$$

ist nicht entscheidbar.

Beispiele für die Anwendung des Satzes von Rice (3)

Beispiel

Es ist unentscheidbar, ob für Turingmaschinen M gilt: M hält für alle Eingaben.

- Sei $S := \{f \mid f(x)$ ist total und berechenbar$\}$
- S ist nicht trivial:
  - $\emptyset \subset S$: Z.B. gilt $id \in S$ mit $id(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$
  - $S \subset \mathcal{R}$: $f(1) = \perp$ und $f(x) = 0$ für $x \neq 1$, ist berechenbar und $f \notin S$.
- Mit Satz von Rice:

$$\begin{aligned} C(S) &= \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } S\} \\ &= \{w \mid M_w \text{ akzeptiert für jede Eingabe}\} \end{aligned}$$

ist nicht entscheidbar.

Bemerkung

Beachte:

- Der Satz von Rice lässt sich anwenden, auf Eigenschaften von $L(M)$ bzw. der von M berechneten Funktion, **aber**:
- Der Satz von Rice macht keine Aussage über Eigenschaften von M

Beispiele:

- Ist es entscheidbar, ob M höchstens 100 Zustände hat?
  $\rightarrow$ Satz von Rice ist hier **nicht** anwendbar (sogar entscheidbar)
- Ist es entscheidbar, ob M für jede Eingabe nach 1000 Schritten anhält?
  $\rightarrow$ Satz von Rice ist hier **nicht** anwendbar (sogar entscheidbar)
- Ist es entscheidbar, ob M für höchstens 50 verschiedene Eingaben anhält?
  $\rightarrow$ Satz von Rice ist anwendbar, da die Eigenschaft auch etwas über die berechnete Funktion aussagt (für höchstens 50 Eingaben definiert) (Problem ist auch unentscheidbar)