Turingmaschinen und Typ 1- und Typ 0-Sprachen

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 13. Juni 2022

Erinnerung: Typ 1- und Typ 0-Sprachen

- Typ 1: $|\ell| \leq |r|$ für alle Produktionen $\ell \to r$
- Typ 1-Grammatik = kontextsensitive Grammatik
- aber (im Gegensatz zu Typ 2): $\ell \in (\Sigma \cup V)^+$
- Typ 0: alles erlaubt
- In manchen Büchern werden unsere Typ 1-Grammatik auch monotone Grammatiken genannt
- In manchen Büchern wird für kontextsensitive Grammatiken gefordert: Produktionen von der Form $\alpha_1 A \alpha_2 \to \alpha_1 \alpha_3 \alpha_2$ mit $\alpha_3 \neq \varepsilon$
- Nun: Maschinenmodell, das zu Typ 1 und zu Typ 0 passt: Turingmaschinen (für Typ 1: mit Einschränkungen).

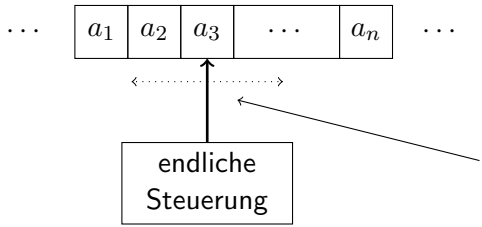
Motivation für Turingmaschinen

Einschränkungen der Kellerautomaten

- PDAs erkennen genau die CFLs,
  daher müssen Automaten für Typ 1- und Typ 0-Sprachen „mehr können“
- Wesentliche Beschränkung bei PDAs:
  Zugriff auf Speicher nur von oben möglich
- Z.B. kann man $\{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}\}$ nicht mit PDA erkennen, da man die Anzahl i
  - ... beim Lesen der $a's$ im Keller speichert;
  - ... beim Lesen der $b's$ vergleichen muss und das geht nur durch sukzessives Entnehmen aus dem Keller;
  - beim Lesen der $c's$ nicht mehr hat!

  Mit beliebigem Lesen des Speichers wäre es kein Problem, $a^i b^i c^i$ zu erkennen.

Turingmaschine:Illustration



Band mit Feldern
(nach links und rechts unbeschränkt)

Schreib-Lesekopf
(Bewegung nach links/rechts
möglich)

Formale Definition der Turingmaschine

Definition (Turingmaschine)

Eine Turingmaschine (TM) ist ein 7-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ mit

- Z ist eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet,
- $\Gamma \supset \Sigma$ ist das (endliche) Bandalphabet,
- δ ist die Zustandsüberführungsfunktion
  - deterministische TM (DTM): $\delta : Z \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{L, R, N\}$,
  - nichtdeterministische TM (NTM): $\delta : Z \times \Gamma \to \mathcal{P}(Z \times \Gamma \times \{L, R, N\})$
- $z_0 \in Z$ ist der Startzustand,
- $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$ ist das Blank-Symbol
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände.

Zustandswechsel, informell

DTM: Ein Eintrag $\delta(z, a) = (z', b, x)$ bedeutet:

Falls die TM im Zustand z ist und das Zeichen a an der aktuellen Position des Schreib-Lesekopfs ist, dann

- Wechsle in Zustand z'
- Ersetze a durch b auf dem Band
- Falls $x = L$: Verschiebe den Schreib-Lesekopf ein Position nach links
- Falls $x = R$: Verschiebe den Schreib-Lesekopf ein Position nach rechts
- Falls $x = N$: Lasse Schreib-Lesekopf unverändert (Neutral)

Zustandswechsel, informell

DTM: Ein Eintrag $\delta(z, a) = (z', b, x)$ bedeutet:

Falls die TM im Zustand z ist und das Zeichen a an der aktuellen Position des Schreib-Lesekopfs ist, dann

- Wechsle in Zustand z'
- Ersetze a durch b auf dem Band
- Falls $x = L$: Verschiebe den Schreib-Lesekopf ein Position nach links
- Falls $x = R$: Verschiebe den Schreib-Lesekopf ein Position nach rechts
- Falls $x = N$: Lasse Schreib-Lesekopf unverändert (Neutral)

NTM: $\delta(z, a)$ ist eine Menge solcher möglichen Schritte und die NTM macht in einem Lauf irgendeinen davon (nichtdeterministisch)

Konfigurationen

Definition (Konfiguration einer Turingmaschine)

Eine Konfiguration einer Turingmaschine ist ein Wort $k \in \Gamma^* Z \Gamma^*$

D.h. eine Konfiguration ist ein Wort wzw', sodass:

- die TM ist im Zustand z,
- auf dem Band steht $\cdots \square\square ww' \square\square \cdots$ und
- der Schreib-Lesekopf steht auf dem ersten Symbol von w'

Konfigurationen

Definition (Konfiguration einer Turingmaschine)

Eine Konfiguration einer Turingmaschine ist ein Wort $k \in \Gamma^* Z \Gamma^*$

D.h. eine Konfiguration ist ein Wort wzw', sodass:

- die TM ist im Zustand z,
- auf dem Band steht $\cdots \square\square ww' \square\square \cdots$ und
- der Schreib-Lesekopf steht auf dem ersten Symbol von w'

Definition (Startkonfiguration einer TM)

Für ein Eingabewort w ist die Startkonfiguration einer TM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ das Wort $z_0 w$.

Im Spezialfall $w = \varepsilon$ ist die Startkonfiguration $z_0 \square$

D.h. am Anfang steht der Kopf auf dem ersten Symbol der Eingabe.

Transitionsrelation einer TM

Definition (Transitionsrelation für Konfigurationen einer TM)

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine TM. Die Relation $\vdash_M$ ist definiert durch (wobei $\delta(z, a) = (z', c, x)$ für eine NTM $(z', c, x) \in \delta(z, a)$ meint):

- $b_1 \cdots b_m z a_1 \cdots a_n \vdash_M b_1 \cdots b_m z' c a_2 \cdots a_n$,
  wenn $\delta(z, a_1) = (z', c, N)$, $m \geq 0, n \geq 1, z \notin E$
- $b_1 \cdots b_m z a_1 \cdots a_n \vdash_M b_1 \cdots b_{m-1} z' b_m c a_2 \cdots a_n$,
  wenn $\delta(z, a_1) = (z', c, L)$, $m \geq 1, n \geq 1, z \notin E$
- $b_1 \cdots b_m z a_1 \cdots a_n \vdash_M b_1 \cdots b_m c z' a_2 \cdots a_n$,
  wenn $\delta(z, a_1) = (z', c, R)$, $m \geq 0, n \geq 2, z \notin E$
- $b_1 \cdots b_m z a_1 \vdash_M b_1 \cdots b_m c z' \square$,
  wenn $\delta(z, a_1) = (z', c, R)$ und $m \geq 0, z \notin E$
- $z a_1 \cdots a_n \vdash_M z' \square c a_2 \cdots a_n$,
  wenn $\delta(z, a_1) = (z', c, L)$ und $n \geq 1, z \notin E$

Transitionsrelation einer TM (2)

Weitere Notation dazu:

- $\vdash_M^i$: die i-fache Anwendung von $\vdash_M$
- $\vdash_M^*$ die reflexiv-transitive Hülle von $\vdash_M$
- Wenn M klar ist, schreiben wir nur $\vdash, \vdash^i$, bzw. $\vdash^*$.

Bemerkung:

Wir nehmen an, dass die TM anhält,
sobald sie einen Endzustand erreicht.

(Schöning-Buch erlaubt weiterrechnen)

Akzeptierte Sprache einer TM

Definition (Akzeptierte Sprache einer TM)

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine TM.
Die von M akzeptierte Sprache $L(M)$ ist definiert als

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Gamma^*, z \in E : z_0 w \vdash_M^* uzv\}$$

Akzeptierte Sprache einer TM

Definition (Akzeptierte Sprache einer TM)

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine TM.
Die von M akzeptierte Sprache $L(M)$ ist definiert als

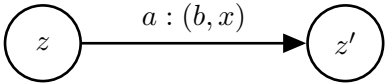
$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Gamma^*, z \in E : z_0 w \vdash_M^* uzv\}$$

Triviale Beispiele:

- Für Turingmaschinen der Form $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ mit $z_0 \in E$ gilt $L(M) = \Sigma^*$, denn diese Turingmaschinen akzeptieren jede Eingabe sofort.
- Für Turingmaschinen der Form $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \emptyset)$ gilt $L(M) = \emptyset$, denn sie akzeptieren nie.

Notation als Zustandsgraph

- Darstellung analog zu DFA / NFA / PDA
- Für $(z', b, x) \in \delta(z, a)$ zeichnen wir

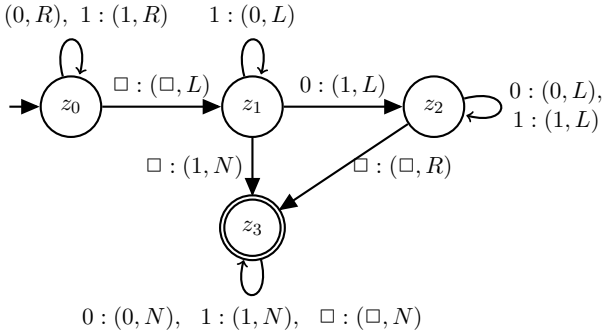


Beispiel (aus Schöning-Buch)

TM $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{0,1\}, \{0,1,\square\}, \delta, z_0, \square, \{z_3\})$ mit

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0,0) = (z_0,0,R) & \delta(z_0,1) = (z_0,1,R) & \delta(z_0,\square) = (z_1,\square,L) \\ \delta(z_1,0) = (z_2,1,L) & \delta(z_1,1) = (z_1,0,L) & \delta(z_1,\square) = (z_3,1,N) \\ \delta(z_2,0) = (z_2,0,L) & \delta(z_2,1) = (z_2,1,L) & \delta(z_2,\square) = (z_3,\square,R) \\ \delta(z_3,0) = (z_3,0,N) & \delta(z_3,1) = (z_3,1,N) & \delta(z_3,\square) = (z_3,\square,N) \end{array}$$

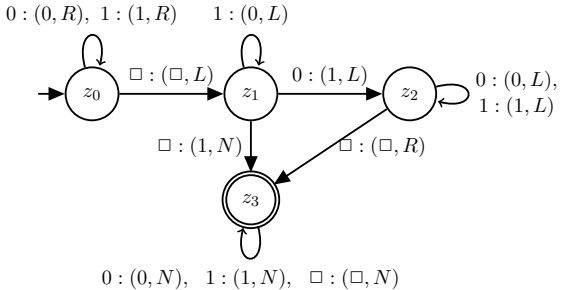
Zustandsgraph:



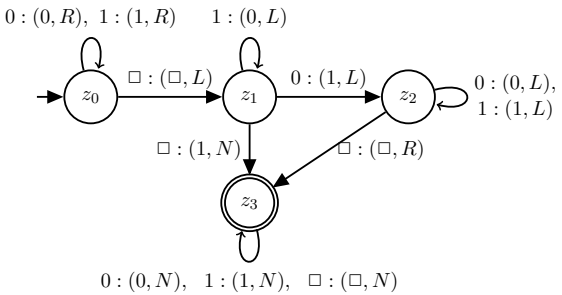
Beispiel (Forts.)

TM interpretiert Eingabe $w \in \{0,1\}^*$ als Binärzahl und addiert 1:

- In z_0 wird das rechte Ende gesucht, dann in z_1 gewechselt
- In z_1 wird versucht 1 zur aktuellen Ziffer hinzu zu addieren:
  Gelingt das ohne Übertrag, dann in z_2
  Bei Übertrag: Weitermachen in z_1 und $+1$ zur nächsten Ziffer links
- In z_2: bis zum Anfang links laufen, dann in z_3.
- In z_3 wird akzeptiert.



Beispiellauf



$$
\begin{aligned}
& z_0 0011 \\
\vdash\ & 0 z_0 011 \\
\vdash\ & 00 z_0 11 \\
\vdash\ & 001 z_0 1 \\
\vdash\ & 0011 z_0 \square \\
\vdash\ & 001 z_1 1 \square \\
\vdash\ & 00 z_1 10 \square \\
\vdash\ & 0 z_1 000 \square \\
\vdash\ & z_2 0100 \square \\
\vdash\ & z_2 \square 0100 \square \\
\vdash\ & \square z_3 0100 \square
\end{aligned}
$$

LBAs: Spezielle Turingmaschinen

Ideen und Notationen:

- Linear beschränkte Turingmaschinen:
  Schreib-Lesekopf darf den Bereich der Eingabe auf dem Band nicht verlassen
- Zum Erkennen des Endes:
  Letztes Symbol der Eingabe wird markiert
- Kopie des Alphabets:
  Für Alphabet $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ bezeichne $\widehat{\Sigma} = \{\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_n\}$.
- Eingabe bei LBAs: Statt $a_1 \cdots a_m$ nun $a_1 \cdots a_{m-1}\widehat{a}_m$
- TM arbeitet auf $\Sigma' = \Sigma \cup \widehat{\Sigma}$
- Linkes Ende muss die Maschine selbst markieren!

LBAs: Definition

Definition (LBA)

Eine NTM $M = (Z, \Sigma \cup \widehat{\Sigma}, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ heißt linear beschränkt (LBA, linear bounded automaton), wenn für alle $a_1 \cdots a_m \in \Sigma^+$ und alle Konfigurationen uzv mit $z_0 a_1 \cdots a_{m-1} \widehat{a}_m \vdash_M^* uzv$ gilt: $|uv| \leq m$.

Die akzeptierte Sprache eines LBA M ist

$$L(M) := \left\{ a_1 \cdots a_m \in \Sigma^* \,\middle|\, \begin{array}{l} z_0 a_1 \cdots a_{m-1} \widehat{a}_m \vdash_M^* uzv, \\ \text{wobei } u, v \in \Gamma^* \text{ und } z \in E \end{array} \right\}$$

Beachte: LBAs sind NTMs

Satz von Kuroda

Theorem (Satz von Kuroda)

Kontextsensitive Sprachen werden genau von den LBAs erkannt.

Satz

Die durch (allgemeine) nichtdeterministischen Turingmaschinen akzeptierten Sprachen sind genau die Typ 0-Sprachen.

Beweise: Nächste Vorlesung (nur FSK)

TM vs. NTM

- Nichtdeterministische Turingmaschinen können durch deterministische Turingmaschinen simuliert werden:
  Probiere alle Berechnungsmöglichkeiten der NTM nacheinander durch
- Daher gilt der letzte Satz auch für DTM
- Unterschied zwischen NTMs und DTMs kommt erst zum Tragen, wenn wir das Laufzeitverhalten betrachten (s. Kapitel zur Komplexitätstheorie)

Überblick: Grammatiken und Automaten für die Chomsky-Hierarchie

Sprache	Grammatik	Automat	sonstiges
Typ 3	reguläre Grammatik	endlicher Automat (DFA und NFA)	regulärer Ausdruck
deterministisch kontextfrei	$LR(k)$-Grammatik	Deterministischer Kellerautomat (DPDA)	
Typ 2	kontextfreie Grammatik	Kellerautomat (PDA) (nichtdeterministisch)	
Typ 1	kontextsensitive Grammatik	linear beschränkte Turingmaschine (LBA) (nichtdeterministisch)	
Typ 0	Typ 0-Grammatik	Turingmaschine (deterministisch und nichtdeterministisch)	

Beachte: $LR(k)$-Grammatiken wurden nicht behandelt.

Trennende Beispiele

- Die Sprache $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist Typ 2 aber nicht vom Typ 3.
- Die Sprache $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ist Palindrom}\}$ ist Typ 2 aber nicht deterministisch-kontextfrei.
- Die Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist Typ 1 aber nicht vom Typ 2.
- Die Sprache

$$H = \{M\#w \mid \text{die durch } M \text{ beschriebene Turingmaschine hält bei Eingabe } w\}$$

  ist Typ 0 aber nicht vom Typ 1.
  (Die Sprache H ist das Halteproblem, welches wir später noch genauer betrachten und erläutern).
- Das Komplement von H ist nicht vom Typ 0.

Deterministisch vs. nichtdeterministisch

Deterministischer Automat	nichtdeterministischer Automat	äquivalent?
DFA	NFA	ja
DPDA	PDA	nein
DLBA	LBA	unbekannt
DTM	NTM	ja

Abschlusseigenschaften

Sprachklasse	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Kleenescher Abschluss
Typ 3	✓	✓	✓	✓	✓
det.kontextfrei	×	×	✓	×	×
Typ 2	×	✓	×	✓	✓
Typ 1	✓	✓	✓	✓	✓
Typ 0	✓	✓	×	✓	✓

Entscheidbarkeiten

Sprachklasse	Wortproblem	Leerheits-problem	Äquivalenz-problem	Schnittproblem
Typ 3	ja	ja	ja	ja
det.kontextfrei	ja	ja	ja	nein
Typ 2	ja	ja	nein	nein
Typ 1	ja	nein	nein	nein
Typ 0	nein	nein	nein	nein

Komplexität des Wortproblems

Sprachklasse	
Typ 3, DFA gegeben	lineare Komplexität
deterministisch kontextfrei	lineare Komplexität
Typ 2, Chomsky-Normalform gegeben	$O(n^3)$
Typ 1	exponentiell
Typ 0	unlösbar