Deterministisch kontextfreie Sprachen und Entscheidbarkeiten

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 13. Juni 2022

Deterministisch kontextfreie Sprachen

- Definiert durch deterministische Kellerautomaten mit **Akzeptanz durch Endzustände**.
- ε-Übergänge sind erlaubt, aber nur wenn es keinen anderen Übergang (mit einem Terminalzeichen und selben Kellersymbol) gibt.

Definition (Deterministischer Kellerautomat, DPDA)

Ein Kellerautomat mit Endzuständen $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ist deterministisch (ein DPDA) wenn für alle $(z, a, A) \in (Z, \Sigma, \Gamma)$ gilt:

$$|\delta(z, a, A)| + |\delta(z, \varepsilon, A)| \leq 1.$$

Die von DPDAs akzeptierten Sprachen heißen deterministisch kontextfrei.

Beispiele (1)

Satz

Die Sprache $L = \{w\$\overline{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ ist deterministisch kontextfrei.

Beweis: Betrachte den DPDA
$M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b, \$\}, \{\#, A, B\}, \delta, z_0, \#, \{z_2\})$ mit

$$\begin{array}{rclcrcl}
\delta(z_0, a, \#) &=& \{(z_0, A\#)\} & & \delta(z_0, \$, A) &=& \{(z_1, A)\} \\
\delta(z_0, b, \#) &=& \{(z_0, B\#)\} & & \delta(z_0, \$, B) &=& \{(z_1, B)\} \\
\delta(z_0, a, A) &=& \{(z_0, AA)\} & & \delta(z_0, \$, \#) &=& \{(z_1, \#)\} \\
\delta(z_0, b, A) &=& \{(z_0, BA)\} & & \delta(z_1, a, A) &=& \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_0, a, B) &=& \{(z_0, AB)\} & & \delta(z_1, b, B) &=& \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_0, b, B) &=& \{(z_0, BB)\} & & \delta(z_1, \varepsilon, \#) &=& \{(z_2, \varepsilon)\}
\end{array}$$

und $\delta(z_i, c, C) = \emptyset$ sonst

Beachte: $L = \{w\overline{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ ist nicht deterministisch kontextfrei aber kontextfrei

Beispiele (2)

Satz

Die Sprache $L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist deterministisch kontextfrei.

Beweis: Betrachte den DPDA
$M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \{\#, A\}, \delta, z_0, \#, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned}
\delta(z_0, a, \#) &= \{(z_0, A\#)\} \\
\delta(z_0, a, A) &= \{(z_0, AA)\} \\
\delta(z_0, b, A) &= \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_1, b, A) &= \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_1, \varepsilon, \#) &= \{(z_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

und $\delta(z_i, c, B) = \emptyset$, sonst

Eigenschaften von deterministisch kontextfreien Sprachen

Theorem (Eigenschaften determin. kontextfreier Sprachen)

1. Das Wortproblem für deterministisch kontextfreie Sprachen kann in Linearzeit entschieden werden.
2. Für deterministisch kontextfreie Sprachen gibt es eindeutige Grammatiken.
3. Deterministisch kontextfreie Sprachen sind unter Komplementbildung abgeschlossen.

Beweis: siehe Literatur

Weitere Eigenschaften

Satz

Determ. kontextfreie Sprachen sind **nicht** abgeschlossen bez. Vereinigung und Schnitt.

Beweis: i) Schnittbildung:

- Die Sprachen $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_{>0}\}$ und $L_2 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_{>0}\}$ sind deterministisch kontextfrei
- $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht kontextfrei.

ii) Vereinigung:

- $L \cap L' = \overline{\overline{L} \cup \overline{L'}}$
- Annahme: Det. CFLs abgeschlossen bez. Vereinigung
- Da det. CFLs auch abgeschlossen bez. Komplement, folgt: Det. CLFs abgeschlossen bez. Schnitt. Widerspruch!
- D.h. Annahme falsch, det. CFLs nicht abgeschlossen bez. $\cup$.

Weitere Eigenschaften (2)

Satz

Der Schnitt einer (deterministisch) kontextfreien Sprachen mit einer regulären Sprache ist (deterministisch) kontextfrei.

Beweis: Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ein PDA mit Endzuständen und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, E')$ ein DFA. Konstruiere PDA mit Endzuständen:
$M'' = (Z \times Z', \Sigma, \delta'', (z_0, z'_0), \#, E \times E')$ mit

- $((z_k, z'_k), B_1 \cdots B_m) \in \delta''((z_i, z'_i), a, A)$ falls $(z_k, B_1 \cdots B_m) \in \delta(z_i, a, A)$ und $\delta'(z'_i, a) = z'_k$ und
- $((z_k, z'_i), B_1 \cdots B_m) \in \delta''((z_i, z'_i), \varepsilon, A)$ falls $(z_k, B_1 \cdots B_m) \in \delta(z_i, \varepsilon, A)$.

Es gilt:

- $L(M'') = L(M) \cap L(M')$, denn M'' simuliert M und M' gleichzeitig, und akzeptiert nur, wenn beide Automaten akzeptieren.
- M'' ist deterministisch, wenn M deterministisch ist.

Entscheidbarkeitsfragen für CFLs

- CYK-Algorithmus zeigt: Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist effizient entscheidbar.
- Viele Fragestellungen sind für CFLs unentscheidbar (z.B. das Äquivalenzproblem und das Schnittproblem)
- Wir betrachten weitere Entscheidungsprobleme (Beweise folgen für FSK, später)

Satz

Das Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken ist entscheidbar.

Satz

Das Endlichkeitsproblem für kontextfreie Sprachen ist entscheidbar.