

Äquivalenz von Kontextfreien Sprachen und von Kellerautomaten akzeptierten Sprachen

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik



Letzte Änderung der Folien: 13. Juni 2022

CFG → PDA

Ideen:

- CFG in Greibach-Normalform gegeben
- PDA simuliert Linksableitung $S \Rightarrow w$
- Da CFG in Greibach-Normalform, sieht eine Linksableitung nach i -Schritten immer so aus:

$$S \Rightarrow^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_j$$

- Start mit Eingabe w und S auf dem Keller
- Nach i Schritten, ist $a_1 \cdots a_i$ verarbeitet und $B_1 \cdots B_j$ auf dem Keller

Äquivalenz: PDAs und CFLs

- Wir zeigen, dass PDAs genau die Typ 2-Sprachen erkennen.
- Beweis in zwei Teilen:
 - 1 Konstruktion eines PDA aus CFG in Greibach-Normalform
 - 2 Konstruktion einer CFG aus einem PDA
(sogenannte **Tripelkonstruktion**)
(PDA mit Einschränkung: max. 2 Kellersymbole pro Schritt erzeugen)

TCS | 21 Äquivalenz von CFLs und PDAs | SoSe 2022

2/18

CFG → PDA (2)

Satz

Jede kontextfreie Sprache wird durch einen Kellerautomaten erkannt.

Beweis:

- Sei L eine CFL und $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$ in Greibach-Normalform.
- Sei $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ ein PDA, sodass

$$\delta(z_0, a, A) := \{(z_0, B_1 \cdots B_n) \mid (A \rightarrow aB_1 \cdots B_n) \in P\}$$

und falls $\varepsilon \in L$ setze zusätzlich $\delta(z_0, \varepsilon, S) := \{(z_0, \varepsilon)\}$.
In allen anderen Fällen sei $\delta(z_0, \varepsilon, A) = \emptyset$.

- Wir zeigen $L(M) = L$.
- Zunächst: $\varepsilon \in L$ g.d.w. $(z_0, \varepsilon, S) \vdash (z_0, \varepsilon, \varepsilon)$ und damit $\varepsilon \in L(M)$.

CFG → PDA (3)

$M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ mit $\delta(z_0, a, A) := \{(z_0, B_1 \cdots B_n) \mid (A \rightarrow aB_1 \cdots B_n) \in P\} \dots$

Beweis (Fortsetzung):

- Für die weiteren Fälle zeigen wir für alle $i \in \mathbb{N}$ (mit Induktion über i)
 $S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ mit einer Linksableitung genau dann, wenn
 $(z_0, a_1 \cdots a_i w, S) \vdash^i (z_0, w, B_1 \cdots B_m)$ für alle $w \in \Sigma^*$.
- Basis $i = 0$: gilt, denn $S \Rightarrow_G^0 S$ und $(z_0, w, S) \vdash^0 (z_0, w, S)$
- Für $i > 0$ und „ \Rightarrow “:
- Sei $S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ eine Linksableitung.
- Da G in Greibach-Normalform, kann diese geschrieben werden als
 $S \Rightarrow_G^{i-1} a_1 \cdots a_{i-1} B_x B_{j+1} \cdots B_m \Rightarrow_G a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$,
wobei $B_x \rightarrow a_i B_1 \cdots B_j \in P$ als letzte Produktion angewendet wurde.
- Induktionsannahme liefert: $S \Rightarrow_G^{i-1} a_1 \cdots a_{i-1} B_x B_{j+1} \cdots B_m$ genau dann, wenn
 $(z_0, a_1 \cdots a_{i-1} w, S) \vdash^{i-1} (z_0, w, B_x B_{j+1} \cdots B_k)$.
- Mit $w = a_i w'$, $(z_0, B_1 \cdots B_j) \in \delta(z_0, a_i, B_x)$, gilt $(z_0, a_1 \cdots a_i w', S) \vdash^i (z_0, w', B_1 \cdots B_k)$ für alle w' .

CFG → PDA (4)

$M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ mit $\delta(z_0, a, A) := \{(z_0, B_1 \cdots B_n) \mid (A \rightarrow aB_1 \cdots B_n) \in P\} \dots$

Beweis (Fortsetzung):

- Für $i > 0$ und „ \Leftarrow “:
- Sei $(z_0, a_1 \cdots a_i w, S) \vdash^i (z_0, w, B_1 \cdots B_k)$.
- Dann muss der letzte Schritt a_i gelesen haben
- D.h. die Folge lässt sich zerlegen in

$$(z_0, a_1 \cdots a_i w, S) \vdash^{i-1} (z_0, a_i w, B_x B_{j+1} \cdots B_k) \vdash (z_0, w, B_1 \cdots B_k),$$

wobei $(z_0, B_1 \cdots B_j) \in \delta(z_0, a_i, B_x)$.

- Dann muss $B_x \rightarrow a_i B_1 \cdots B_j$ eine Produktion in P sein.
- Induktionsannahme liefert: $S \Rightarrow_G^{i-1} a_1 \cdots a_{i-1} B_x B_{j+1} \cdots B_k$ und wir können obige Produktion anwenden und erhalten $S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_k$. □

Hilfssatz für PDA → CFG-Beweis

Lemma (PDAs mit Erzeugung von ≤ 2 Kellersymbolen)

Für jeden PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ gibt es einen PDA $M' = (Z, \Sigma, \Gamma', \delta', z_0, \#)$ mit $L(M) = L(M')$, sodass gilt: Wenn $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta'(z, a, A)$ (für $a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$), dann ist $k \leq 2$.

Beweis (Skizze):

Transformiere M in M' wie folgt (mit $A \in \Gamma$ und $a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$):

- $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta'(z, a, A)$, wenn $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$, $k \leq 2$.
- falls $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$ mit $k > 2$, dann
 - $(z, C_k B_k) \in \delta'(z, a, A)$, und
 - $\delta(z, \varepsilon, C_i) = \{(z, C_{i-1} B_{i-1})\}$ für alle i mit $4 \leq i \leq k$, und
 - $\delta(z, \varepsilon, C_3) = \{(z', B_1 B_2)\}$

wobei $C_3, \dots, C_k \in \Gamma'$ neue Kellersymbole sind

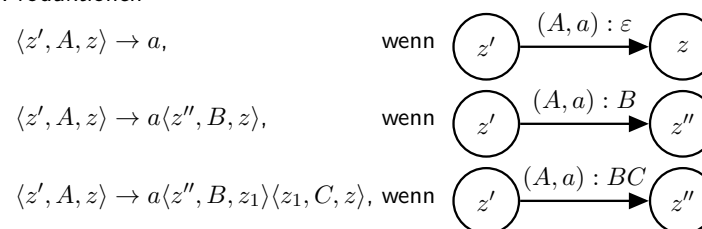
(diese werden jeweils neu erzeugt pro ersetztem Eintrag).

PDA → CFG

Ideen

- Verwende PDA mit Erzeugung von ≤ 2 Kellersymbolen
- Erzeuge Grammatik mit Tripelkonstruktion
- Variablen der Grammatik:
Tripel $\langle z', A, z \rangle$, die **alle Worte** w erzeugt, die den PDA
 - von z' mit Kellerinhalt A und Wort w
 - zu z und leeren Keller führen

- Produktionen



PDA → CFG (2)

Satz

Kellerautomaten akzeptieren kontextfreie Sprachen.

Beweis: Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ein PDA mit $k \leq 2$ für alle $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$ (und $a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$).

Konstruiere $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit S neues Symbol und

$$\begin{aligned} V &= \{S\} \cup \{\langle z_i, A, z_j \rangle \mid z_i, z_j \in Z, A \in \Gamma\} \\ P &= \{S \rightarrow \langle z_0, \#, z \rangle \mid z \in Z\} \\ &\cup \{\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \mid (z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A), a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, A \in \Gamma\} \\ &\cup \{\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \langle z'', B, z \rangle \mid (z'', B) \in \delta(z', a, A), z \in Z, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, A \in \Gamma\} \\ &\cup \{\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \langle z'', B, z_1 \rangle \langle z_1, C, z \rangle \mid (z'', BC) \in \delta(z', a, A), z, z_1 \in Z, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, A \in \Gamma\} \end{aligned}$$

Wir beweisen $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$ g.d.w. $\langle z', w, A \rangle \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

Da $S \rightarrow \langle z_0, A, z \rangle$ folgt: $w \in L(G) \iff w \in L(M)$, d. h. $L(G) = L(M)$.

PDA → CFG (3)

„ \Rightarrow “:

- Sei $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^i w$ eine Linksableitung.
- Wir verwenden Induktion über i .
- Basis $i = 1$: Sei $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G w$
 - Verwendete Produktion muss $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a$ sein
 - Dann muss $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$ gelten und damit gilt: $\langle z', a, A \rangle \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$.
- Schritt: $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G u \Rightarrow_G^{i-1} w$. mit $i - 1 > 0$
 - Wenn $u = a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$, dann kann $i - 1 > 0$ nicht gelten.
 - Wenn $u = a \langle z'', B, z \rangle$, dann $(z'', B) \in \delta(z', a, A)$ und $u = a \langle z'', B, z \rangle \Rightarrow^{i-1} aw' = w$. Dann gilt $\langle z'', B, z \rangle \Rightarrow^{i-1} w'$ und die Induktionsannahme liefert $\langle z'', w', B \rangle \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$. Mit $\langle z'', B \rangle \in \delta(z', a, A)$ zeigt dies $\langle z', w, A \rangle = \langle z', aw', A \rangle \vdash_M \langle z'', w', B \rangle \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

PDA → CFG (4)

...

- Wenn $u = a \langle z'', B, z_1 \rangle \langle z_1, C, z \rangle$, dann ist $(z'', BC) \in \delta(z', a, A)$ und $u = a \langle z'', B, z_1 \rangle \langle z_1, C, z \rangle \Rightarrow^{i-1} aw' = w$

Dann gilt auch $\langle z'', B, z_1 \rangle \langle z_1, C, z \rangle \Rightarrow^{i-1} w'$ und es gibt Linksableitungen $\langle z'', B, z_1 \rangle \Rightarrow^j w'_0$ und $\langle z_1, C, z \rangle \Rightarrow^k w'_1$ mit $j + l \leq i - 1$, $w' = w'_0 w'_1$.

Für beide können wir die Induktionsannahme anwenden und erhalten $(z'', w'_0, B) \vdash_M^* (z_1, \varepsilon, \varepsilon)$ und $(z_1, w'_1, C) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

Abändern der 1. Konfigurationsfolge: C auf den Keller & w'_1 anhängen
 $(z'', w', BC) = (z'', w'_0 w'_1, BC) \vdash_M^* (z_1, w'_1, C)$.

Anhängen der 2. Konfigurationsfolge liefert: $(z'', w', BC) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

Da $(z'', BC) \in \delta(z', a, A)$, gilt

$$\langle z', w, A \rangle = \langle z', aw', A \rangle \vdash_M \langle z'', w', BC \rangle \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon).$$

PDA → CFG (5)

„ \Leftarrow “:

- Sei $\langle z', w, A \rangle \vdash_M^i (z, \varepsilon, \varepsilon)$. Zeige $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$ mit Induktion über i
- Basis $i = 1$: Dann gilt $w = a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$ und $(z, \varepsilon) \in \delta(z', w, A)$. Damit gibt es $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \in P$ und daher $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G a$.
- Schritt: Sei $i > 1$ und daher $\langle z', aw', A \rangle \vdash_M^{i-1} (z, \varepsilon, \varepsilon)$ für $i - 1 > 0$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $\alpha = \varepsilon$, $\alpha = B$ oder $\alpha = BC$.
Wir betrachten alle drei Fälle für α einzeln:
 - $\alpha = \varepsilon$: Dieser Fall ist nicht möglich, da $i - 1 > 0$ nicht gelten kann.
 - $\alpha = B$: Dann ist $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \langle z'', B, z \rangle \in P$.
Da $\langle z'', w', B \rangle \vdash_M^{i-1} (z, \varepsilon, \varepsilon)$, liefert Induktionsannahme $\langle z'', B, z \rangle \Rightarrow_G^* w'$ und daher: $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G a \langle z'', B, z \rangle \Rightarrow_G^* aw' = w$.

PDA → CFG (6)

...

- $\alpha = BC$. Dann ist $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \langle z'', B, z_1 \rangle \langle z_1, C, z \rangle \in P$.
Schreibe $(z'', w', BC) \vdash_M^{i-1} (z, \varepsilon, \varepsilon)$ als $(z'', w'_1 w'_2, BC) \vdash_M^j (z_1, w'_2, C) \vdash_M^k (z, \varepsilon, \varepsilon)$ mit $j + k = i - 1$.
Weglassen von C und w'_2 im ersten Teil zeigt:
 $(z'', w'_1, B) \vdash_M^j (z_1, \varepsilon, \varepsilon)$,
Da $j < i$ und $k < i$ liefert Induktionsannahme
 $\langle z'', B, z_1 \rangle \Rightarrow_G^* w'_1$ und $\langle z_1, C, z \rangle \Rightarrow_G^* w'_2$.
Daher gilt
 $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G a \langle z'', B, z_1 \rangle \langle z_1, C, z \rangle \Rightarrow_G^* a w'_1 \langle z_1, C, z \rangle \Rightarrow_G^* a w'_1 w'_2 = w$.

Bemerkung

Die bisherigen Beweise zeigen auch, dass man PDAs einschränken kann auf PDAs mit genau einem Zustand:

- Sei M ein PDA.
- Transformiere M in Grammatik G mit $L(G) = L(M)$
- Transformiere G in G' in Greibach-Normalform (mit $L(G') = L(G) \setminus \varepsilon$)
- Transformiere Grammatik G' in PDA M' mit $L(M') = L(G)$
unsere Konstruktion verwendet nur einen Zustand!

Geschafft...

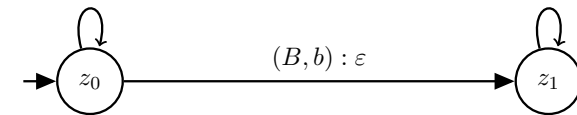
Die gezeigten Sätze zusammengefasst ergeben:

Theorem

Kellerautomaten erkennen genau die kontextfreien Sprachen.

Beispiel

$(\#, a) : B\#, (\#, \varepsilon) : \varepsilon, (B, a) : BB$ $(B, b) : \varepsilon, (\#, \varepsilon) : \varepsilon$



Der vorherige Beweis konstruiert die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$\begin{aligned}
 V &= \{S, \langle z_0, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle, \langle z_1, B, z_0 \rangle, \langle z_1, B, z_1 \rangle, \\
 &\quad \langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_1, \#, z_0 \rangle, \langle z_1, \#, z_1 \rangle\} \\
 P &= \{S \rightarrow \langle z_0, \#, z_0 \rangle, S \rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle.\} \\
 &\cup \{\langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_1, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow \varepsilon, \langle z_1, \#, z_1 \rangle \rightarrow \varepsilon\} \\
 &\cup \{\langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_0 \rangle \langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_0 \rangle \\
 &\quad \langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_0 \rangle \langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle\} \\
 &\cup \{\langle z_0, B, z_0 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_0 \rangle \langle z_0, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_0 \rangle \langle z_0, B, z_1 \rangle, \\
 &\quad \langle z_0, B, z_0 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, B, z_1 \rangle\}
 \end{aligned}$$

Beispiel (2)

Vereinfachen der Grammatik ergibt:

$$\begin{aligned} &\{S \rightarrow \langle z_0, \#, z_0 \rangle, S \rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_1, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \\ &\langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow \varepsilon, \langle z_1, \#, z_1 \rangle \rightarrow \varepsilon, \\ &\langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, B, z_1 \rangle\} \end{aligned}$$

Umbenennen, Streichen von nicht erreichbaren Variablen und Entfernen von Einheitsproduktionen ergibt

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \varepsilon \mid aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

(ist bis auf ε -Produktion in Greibach-Normalform.)

Beispiel (3)

Der vorherige Beweis konstruiert für

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \varepsilon \mid aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

den PDA $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a, S) &= \{(z_0, B)\} & \delta(z_0, b, B) &= \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, a, B) &= \{(z_0, BC)\} \\ \delta(z_0, b, C) &= \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, \varepsilon, S) &= \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, d, A) &= \emptyset \text{ sonst} \end{aligned}$$

Eine Konfigurationsfolge für die Eingabe $aaabbb$ ist

$$\begin{aligned} &(z_0, aaabbb, S) \\ &\vdash (z_0, aabbb, B) \\ &\vdash (z_0, abbb, BC) \\ &\vdash (z_0, bbb, BCC) \\ &\vdash (z_0, bb, CC) \\ &\vdash (z_0, b, C) \\ &\vdash (z_0, \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$