

Der Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus zum effizienten Entscheiden des Wortproblems für CFLs

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik



Motivation für Kontextfreie Sprachen

- Kontextfreie Sprachen sind insbesondere nützlich um Sprachen mit Klammern zu beschreiben
- Die Syntax von Programmiersprachen wird meist mit einer kontextfreien Grammatik angegeben

Beispiele:

- $G = (\{E, M, Z\}, \{+, *, (,)\} \cup \{0, \dots, 9\}, P, E)$ mit

$$P = \{E \rightarrow M \mid E + M, \\ M \rightarrow Z \mid M * Z, \\ Z \rightarrow N \mid (E), \\ N \rightarrow 1D \mid \dots \mid 9D, \\ D \rightarrow 0D \mid \dots \mid 9D \mid \varepsilon\}$$

- $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist kontextfrei: Produktionen $\{S \rightarrow \varepsilon \mid T, T \rightarrow aTb \mid ab\}$ mit S als Startsymbol erzeugen L

Satz

Die Sprache $L = \{a^l b^l c^l \mid l \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis haben wir gesehen (nur FSK)

Einleitung zum Wortproblem

- Wir wissen bereits: Das Wortproblem für Typ 1-Sprachen ist entscheidbar
- Daher ist auch das Wortproblem für Typ 2-Sprachen entscheidbar
- Aber: Der Algorithmus für Typ 1-Sprachen benötigt exponentiell viele Schritte
- Nun sehen wir einen Polynomialzeitalgorithmus
- Die wesentliche Entwurfsmethode dabei ist [dynamische Programmierung](#)

Effizientes Lösen des Wortproblems für CFLs

- Algorithmus für Typ 1-Sprachen hat exponentielle Laufzeit
- Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami für CFLs
- Veröffentlicht in den 1960er Jahren
- Kurz: CYK-Algorithmus

Idee des CYK-Algorithmus

- Eingabe:
 - CFG $G = (V, \Sigma, P, S)$ in **Chomsky-Normalform**:
Wiederholung / Bemerkung: G (mit $\varepsilon \notin L(G)$) ist in **Chomsky-Normalform**, wenn für jede Produktion $A \rightarrow w \in P$ gilt: $w = a \in \Sigma$ oder $w = BC$ mit $B, C \in V$.
Satz: Für jede CFG G mit $\varepsilon \notin L(G)$ kann sprachäquivalente Chomsky-NF berechnet werden.
 - Wort $w \in \Sigma^*$
- Ausgabe:
 - ja, wenn $w \in L(G)$
 - nein, wenn $w \notin L(G)$
- Grundidee des Algorithmus:
(Rekursiver) Test, ob Variable A ein Wort u erzeugt.
- Verwende Test zum Prüfen, ob S das Wort w erzeugt.

Idee des CYK-Algorithmus (2)

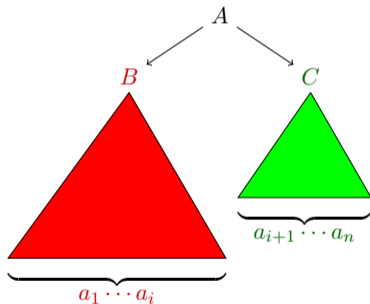
Prüfe, ob $A \in V$ ein Wort $u = a_1 \cdots a_n$ erzeugt:

- Wenn $u = a \in \Sigma$, dann prüfe ob $A \rightarrow a \in P$

Idee des CYK-Algorithmus (2)

Prüfe, ob $A \in V$ ein Wort $u = a_1 \cdots a_n$ erzeugt:

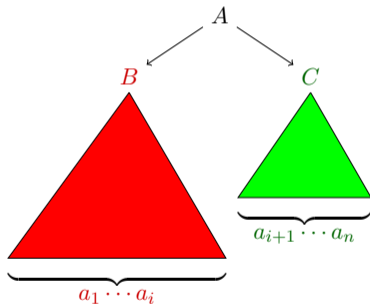
- Wenn $u = a \in \Sigma$, dann prüfe ob $A \rightarrow a \in P$
- Anderenfalls ($|u| > 1$) kann u nur erzeugt werden, wenn:
 - Es gibt Produktion $A \rightarrow BC \in P$
 - Es gibt Index $1 \leq i < n$, sodass:
 - B erzeugt $a_1 \cdots a_i$ und
 - C erzeugt $a_{i+1} \cdots a_n$



Idee des CYK-Algorithmus (2)

Prüfe, ob $A \in V$ ein Wort $u = a_1 \cdots a_n$ erzeugt:

- Wenn $u = a \in \Sigma$, dann prüfe ob $A \rightarrow a \in P$
- Anderenfalls ($|u| > 1$) kann u nur erzeugt werden, wenn:
 - Es gibt Produktion $A \rightarrow BC \in P$
 - Es gibt Index $1 \leq i < n$, sodass:
 - B erzeugt $a_1 \cdots a_i$ und
 - C erzeugt $a_{i+1} \cdots a_n$



- Daher prüfe für **alle** $A \rightarrow BC \in P$ und **alle** i mit $1 \leq i < n$ **rekursiv**, ob B das Wort $w = a_1 \cdots a_i$ und C das Wort $a_{i+1} \cdots a_n$ erzeugt.

Beispiel

Betrachte die Grammatik
mit den Produktionen:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid BA, \\ A &\rightarrow AA \mid AB \mid a, \\ B &\rightarrow BB \mid b \end{aligned}$$

und das Wort *bbbaab*.

S erzeugt *bbbaab*, denn $S \rightarrow BA$ und

- B erzeugt *bbb*, denn $B \rightarrow BB$ und
 - B erzeugt *bb*, denn $B \rightarrow BB$ und $B \rightarrow b$ und $B \rightarrow b$
 - B erzeugt *b*, denn $B \rightarrow b$
- A erzeugt *aab*, denn $A \rightarrow AB$ und
 - A erzeugt *aa*, denn $A \rightarrow AA$ und
 - A erzeugt *a*, denn $A \rightarrow a$ und
 - A erzeugt *a*, denn $A \rightarrow a$
 - B erzeugt *b*, denn $B \rightarrow b$

Beispiel

Betrachte die Grammatik mit den Produktionen:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid BA, \\ A &\rightarrow AA \mid AB \mid a, \\ B &\rightarrow BB \mid b \end{aligned}$$

und das Wort $bbbaab$.

Bevor der rekursive Algorithmus diesen richtigen Pfad findet, sucht er einige erfolglose ab, z.B. für $S \rightarrow AB$

- Prüfe, ob A erzeugt b und B erzeugt $bbab$ gilt.
- Prüfe, ob A erzeugt bb und B erzeugt bab gilt.
- Prüfe, ob A erzeugt bbb und B erzeugt ab gilt.
- Prüfe, ob A erzeugt $bbba$ und B erzeugt b gilt.

Naives Suchen wiederholt dieselben Tests, z.B. ob „ A erzeugt b “ gilt.

S erzeugt $bbbaab$, denn $S \rightarrow BA$ und

- B erzeugt bbb , denn $B \rightarrow BB$ und
 - B erzeugt bb , denn $B \rightarrow BB$ und $B \rightarrow b$ und $B \rightarrow b$
 - B erzeugt b , denn $B \rightarrow b$
- A erzeugt aab , denn $A \rightarrow AB$ und
 - A erzeugt aa , denn $A \rightarrow AA$ und
 - A erzeugt a , denn $A \rightarrow a$ und
 - A erzeugt a , denn $A \rightarrow a$
 - B erzeugt b , denn $B \rightarrow b$

Idee des CYK-Algorithmus (3)

- Effizienz: Statt Rekursion verwende **dynamische Programmierung**
- Algorithmus berechnet Menge $V(i, j) \subseteq V$, sodass

$$V(i, j) = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* a_i \cdots a_{i+j-1}\}$$

„ $V(i, j)$ enthält alle $A \in V$, die $a_i \cdots a_{i+j-1}$ (=Teilwort von u ab Position i mit Länge j) erzeugen“

- Berechnung der $V(i, j)$:
 - Starte mit $V(i, 1) = \{A \mid A \rightarrow a_i \in P\}$.
 - Berechne $V(i, j)$ mit ansteigender Länge j .

Für $j > 1$ gilt:

$$A \in V(i, j) \text{ g.d.w.} \\ A \rightarrow BC \in P \text{ und } B \in V(i, k), C \in V(i+k, j-k)$$

Berechnung: Für festes (i, j) betrachte alle k mit $k = 1, 2, \dots, j-1$

- Finaler Schritt: Prüfe, ob $S \in V(1, n)$ ist.

Algorithmus 8: CYK-Algorithmus

Eingabe: CFG $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky-Normalform und Wort $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$

Ausgabe: Ja, wenn $w \in L(G)$ und Nein, wenn $w \notin L(G)$

Beginn

für $i = 1$ bis n **tue**

└ $V(i, 1) = \{A \in V \mid A \rightarrow a_i \in P\}$

für $j = 2$ bis n **tue**

└ **für** $i = 1$ bis $n + 1 - j$ **tue**

└ $V(i, j) = \emptyset;$

└ **für** $k = 1$ bis $j - 1$ **tue**

└ $V(i, j) = V(i, j) \cup \left\{ A \in V \mid \begin{array}{l} A \rightarrow BC \in P, \\ B \in V(i, k), \\ C \in V(i + k, j - k) \end{array} \right\}$

wenn $S \in V(1, n)$ **dann**

└ return Ja

sonst

└ return Nein

Laufzeit des CYK-Algorithmus

- Drei geschachtelte Für-Schleifen
- Im Inneren wird noch über alle Produktionen aus P iteriert
- Mit $n = |w|$ und $|P| = \text{Anzahl der Iterationen}$ kann die Laufzeitkomplexität mit $\mathcal{O}(n^3 \cdot |P|)$ abgeschätzt werden.

Theorem

Das Wortproblem für kontextfreie Sprachen kann in Polynomialzeit entschieden werden.

Beispiel

Sei $w = bdddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

$V(i, j)$ -Tabelle ist zunächst leer:

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
j	1					
	2					
	3					
	4					
	5					

Beispiel (2)

Sei $w = bdddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

Füllen der $V(i, 1)$ -Einträge:

		b	b	d	d	c
		\xrightarrow{i}				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
$\downarrow j$	1					
	2					
	3					
	4					
	5					

Beispiel (2)

Sei $w = b b d d c$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

Füllen der $V(i, 1)$ -Einträge:

		b	b	d	d	c
		$\xrightarrow{\quad i \quad}$				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
$\downarrow j$	1	B				
	2					
	3					
	4					
	5					

Beispiel (2)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

Füllen der $V(i, 1)$ -Einträge:

		b	b	d	d	c
		\xrightarrow{i}				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
$\downarrow j$	1	B	B			
	2					
	3					
	4					
	5					

Beispiel (2)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

Füllen der $V(i, 1)$ -Einträge:

		b	b	d	d	c
		—————→ <i>i</i>				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
↓ <i>j</i>	1	B	B	D		
	2					
	3					
	4					
	5					

Beispiel (2)

Sei $w = b b d d c$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

Füllen der $V(i, 1)$ -Einträge:

		b	b	d	d	c
		\xrightarrow{i}				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
$\downarrow j$	1	B	B	D	D	
	2					
	3					
	4					
	5					

Beispiel (2)

Sei $w = b b d d c$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

Füllen der $V(i, 1)$ -Einträge:

		b	b	d	d	c
		\xrightarrow{i}				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
$\downarrow j$	1	B	B	D	D	C
	2					
	3					
	4					
	5					

Beispiel (3)

Sei $w = bdddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		\xrightarrow{i}				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
$\downarrow j$	1	B	B	D	D	C
	2					
	3					
	4					
	5					

3-fach Schleife:

Beispiel (3)

Sei $w = b b d d c$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
j	1	B	B	D	D	C
	2					
	3					
	4					
	5					

3-fach Schleife: $j=2, i=1, k=1$: $V(1, 2) = V(1, 2) \cup \left\{ A \left| \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(1, 1), \\ C \in V(2, 1) \end{array} \right. \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = b b d d c$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
$V(i, j)$		1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C	
2		A				
3						
4						
5						

j
 ↓

3-fach Schleife: $j=2, i=2, k=1$: $V(2, 2) = V(2, 2) \cup \left\{ A \mid \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(2, 1), \\ C \in V(3, 1) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = b b d d c$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		\xrightarrow{i}				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
j \downarrow	1	B	B	D	D	C
	2		A			
	3					
	4					
	5					

3-fach Schleife: $j=2, i=3, k=1$: $V(3, 2) = V(3, 2) \cup \left\{ A \left| \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(3, 1), \\ C \in V(4, 1) \end{array} \right. \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = b b d d c$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
j	1	B	B	D	D	C
	2		A			
	3					
	4					
	5					

3-fach Schleife: $j=2, i=4, k=1$: $V(4, 2) = V(4, 2) \cup \left\{ A \mid \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(4, 1), \\ C \in V(5, 1) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C	
2		A				
3						
4						
5						

j

↓

3-fach Schleife: $j=3, i=1, k=1$: $V(1, 3) = V(1, 3) \cup \left\{ A \mid \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(1, 1), \\ C \in V(2, 2) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = b b d d c$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		$i \rightarrow$				
$V(i, j)$		1	2	3	4	5
1		B	B	D	D	C
2			A			
3						
4						
5						

$j \downarrow$

3-fach Schleife: $j=3, i=1, k=2$: $V(1, 3) = V(1, 3) \cup \left\{ A \mid \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(1, 2), \\ C \in V(3, 1) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
$V(i, j)$		1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C	
2		A				
3						
4						
5						

j

3-fach Schleife: $j=3, i=2, k=1$: $V(2, 3) = V(2, 3) \cup \left\{ A \left| \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(2, 1), \\ C \in V(3, 2) \end{array} \right. \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
$V(i, j)$		1	2	3	4	5
	1	B	B	D	D	C
	2		A			
	3		E			
	4					
	5					

j

↓

3-fach Schleife: $j=3, i=2, k=2$: $V(2, 3) = V(2, 3) \cup \left\{ A \left| \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(2, 2), \\ C \in V(4, 1) \end{array} \right. \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = b b d d c$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
j	1	B	B	D	D	C
	2		A			
	3		E			
	4					
	5					

3-fach Schleife: $j=3, i=3, k=1$: $V(3, 3) = V(3, 3) \cup \left\{ A \mid \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(3, 1), \\ C \in V(4, 2) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = b b d d c$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
$V(i, j)$		1	2	3	4	5
	1	B	B	D	D	C
	2		A			
	3		E			
	4					
	5					

j ↓

3-fach Schleife: $j=3, i=3, k=2$: $V(3, 3) = V(3, 3) \cup \left\{ A \left| \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(3, 2), \\ C \in V(5, 1) \end{array} \right. \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C	
2		A				
3		E				
4	A					
5						

j

3-fach Schleife: $j=4, i=1, k=1: V(1, 4) = V(1, 4) \cup \left\{ A \mid \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(1, 1), \\ C \in V(2, 3) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = b b d d c$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		\xrightarrow{i}				
$V(i, j)$		1	2	3	4	5
	1	B	B	D	D	C
	2		A			
	3		E			
	4	A				
	5					

j \downarrow

3-fach Schleife: $j=4, i=1, k=2$: $V(1, 4) = V(1, 4) \cup \left\{ A \left| \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(1, 2), \\ C \in V(3, 2) \end{array} \right. \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = b b d d c$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
j	1	B	B	D	D	C
	2		A			
	3		E			
	4	A				
	5					

3-fach Schleife: $j=4, i=1, k=3$: $V(1, 4) = V(1, 4) \cup \left\{ A \mid \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(1, 3), \\ C \in V(4, 1) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C	
2		A				
3		E				
4	A					
5						

j
 ↓

3-fach Schleife: $j=4, i=2, k=1$: $V(2, 4) = V(2, 4) \cup \left\{ A \left| \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(2, 1), \\ C \in V(3, 3) \end{array} \right. \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
$V(i, j)$		1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C	
2		A				
3		E				
4	A					
5						

j
 ↓

3-fach Schleife: $j=4, i=2, k=2$: $V(2, 4) = V(2, 4) \cup \left\{ A \left| \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(2, 2), \\ C \in V(4, 2) \end{array} \right. \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C	
2		A				
3		E				
4	A					
5						

j
 ↓

3-fach Schleife: $j=4, i=2, k=3$: $V(2, 4) = V(2, 4) \cup \left\{ A \left| \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(2, 3), \\ C \in V(5, 1) \end{array} \right. \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = b b d d c$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C	
2		A				
3		E				
4	A					
5						

j
 ↓

3-fach Schleife: $j=5, i=1, k=1$: $V(1, 5) = V(1, 5) \cup \left\{ A \left| \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(1, 1), \\ C \in V(2, 4) \end{array} \right. \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = b b d d c$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C	
2		A				
3		E				
4	A					
5						

j
 ↓

3-fach Schleife: $j=5, i=1, k=2$: $V(1, 5) = V(1, 5) \cup \left\{ A \left| \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(1, 2), \\ C \in V(3, 3) \end{array} \right. \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = b b d d c$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
j	1	B	B	D	D	C
	2		A			
	3		E			
	4	A				
	5					

3-fach Schleife: $j=5, i=1, k=3$: $V(1, 5) = V(1, 5) \cup \left\{ A \left| \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(1, 3), \\ C \in V(4, 2) \end{array} \right. \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		i				
		→				
	$V(i, j)$	1	2	3	4	5
1	↓	B	B	D	D	C
2			A			
3			E			
4		A				
5		S				

3-fach Schleife: $j=5, i=1, k=4$: $V(1, 5) = V(1, 5) \cup \left\{ A \left| \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(1, 4), \\ C \in V(5, 1) \end{array} \right. \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC, A \rightarrow BE, A \rightarrow BD, E \rightarrow AD, C \rightarrow c, B \rightarrow b, D \rightarrow d\}$

		b	b	d	d	c
		$\xrightarrow{\quad i \quad}$				
$V(i, j)$		1	2	3	4	5
	1	B	B	D	D	C
	2		A			
	3		E			
	4	A				
	5	S				

j \downarrow

Da $S \in V(1, 5)$ gilt $w \in L(G)$

`http://www.cip.ifi.lmu.de/~lindebar/`