Das Pumping-Lemma für Kontextfreie Sprachen

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 31. Mai 2022

Widerlegen der Kontextfreiheit

Wir lernen eine Methode kennen zum Widerlegen der Kontextfreiheit:

- Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Es gibt weitere (allgemeinere) Formulierungen, z.B.

- Ogdens-Lemma (benannt nach William F. Ogden)
  (ist im Skript, aber kein Prüfungsstoff)
- Interchange-Lemma

Einschub: Binärbäume

Binärbaum: Baum, wobei jeder Knoten 0 oder 2 Kinder hat

Lemma

Sei B ein Binärbaum mit $\geq 2^k$ Blättern. Dann hat B einen Pfad der Länge $\geq k$.

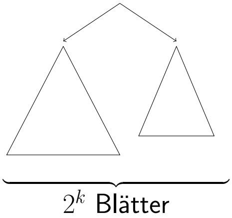
Beweis durch Induktion über k:

$k = 0$:

- Ein Baum mit $2^k = 2^0 = 1$ Blättern besteht genau aus diesem Blatt und hat einen Pfad der Länge ≥ 0.

$k > 0$:

- Einer der beiden Teilbäume unter der Wurzel hat $\geq 2^{k-1}$ Blätter.
- Per Induktionsannahme hat dieser einen Pfad der Länge $\geq k - 1$.
- Daher hat der gesamte Baum einen Pfad der Länge $\geq k$.



Pumping-Lemma für CFLs: Bemerkungen

- **Erinnerung:** Pumping-Lemma für reguläre Sprachen:
  Jede reguläre Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft.

Pumping-Lemma für CFLs: Bemerkungen

- **Erinnerung:** Pumping-Lemma für reguläre Sprachen:
  Jede reguläre Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft.
- Analog: Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen:
  Jede kontextfreie Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft für kontextfreie Sprachen

Pumping-Lemma für CFLs: Bemerkungen

- **Erinnerung:** Pumping-Lemma für reguläre Sprachen:
  Jede reguläre Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft.
- Analog: Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen:
  Jede kontextfreie Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft für kontextfreie Sprachen
- Kann vorallem zum Widerlegen benutzt werden:
  Sprache **verletzt** die Pumping-Eigenschaft für CFLs
  $\Longrightarrow$ Sprache ist **nicht kontextfrei**

Pumping-Lemma für CFLs: Bemerkungen

- **Erinnerung:** Pumping-Lemma für reguläre Sprachen:
  Jede reguläre Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft.
- Analog: Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen:
  Jede kontextfreie Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft für kontextfreie Sprachen
- Kann vorallem zum Widerlegen benutzt werden:
  Sprache **verletzt** die Pumping-Eigenschaft für CFLs
  $\Longrightarrow$ Sprache ist **nicht kontextfrei**
- Pumping-Eigenschaft bei regulären Sprachen, informell:
  Man kann Worte an einer Stelle aufpumpen und verbleibt in der Sprache
  ($uv^iw \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$)

Pumping-Lemma für CFLs: Bemerkungen

- **Erinnerung:** Pumping-Lemma für reguläre Sprachen:
  Jede reguläre Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft.
- Analog: Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen:
  Jede kontextfreie Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft für kontextfreie Sprachen
- Kann vorallem zum Widerlegen benutzt werden:
  Sprache **verletzt** die Pumping-Eigenschaft für CFLs
  $\implies$ Sprache ist **nicht kontextfrei**
- Pumping-Eigenschaft bei regulären Sprachen, informell:
  Man kann Worte an einer Stelle aufpumpen und verbleibt in der Sprache
  ($uv^iw \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$)
- Pumping-Eigenschaft bei kontextfreien Sprachen, informell:
  Man kann Worte an ***zwei*** *Stellen gleichzeitig aufpumpen und verbleibt in der Sprache*
  ($uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$)

Das Pumping-Lemma für CFLs

Lemma (Pumping-Lemma für CFLs)

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, das Mindestlänge n hat (d. h. $|z| \geq n$), als $z = uvwxy$ geschrieben werden kann, so dass gilt:

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iwx^iy \in L$.

Beweis des Pumping-Lemmas (1)

Behauptung: Für jede CFL L gibt es $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ als $z = uvwxy$ geschrieben werden kann mit

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iwx^iy \in L$

Beweis:

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$

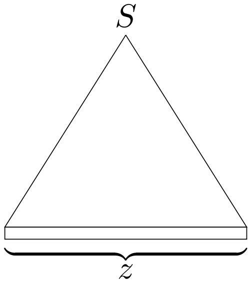
Beweis des Pumping-Lemmas (1)

Behauptung: Für jede CFL L gibt es $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ als $z = uvwxy$ geschrieben werden kann mit

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iwx^iy \in L$

Beweis:

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$
- Betrachte Ableitung und Syntaxbaum eines Wortes z mit $|z| \geq 2^{|V|} = n$



Beweis des Pumping-Lemmas (1)

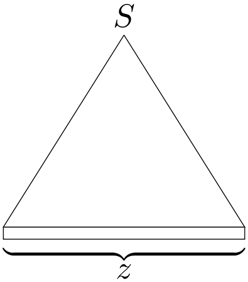
Behauptung: Für jede CFL L gibt es $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ als $z = uvwxy$ geschrieben werden kann mit

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iwx^iy \in L$

Beweis:

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$
- Betrachte Ableitung und Syntaxbaum eines Wortes z mit $|z| \geq 2^{|V|} = n$
  (wenn es keine solche Ableitung gibt, gilt das Pumping-Lemma:

  es gibt dann keine Worte $z \in L$ mit Mindestlänge n)



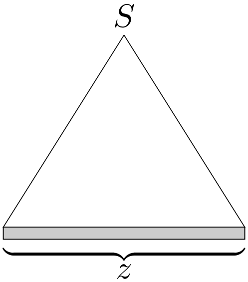
Beweis des Pumping-Lemmas (1)

Behauptung: Für jede CFL L gibt es $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ als $z = uvwxy$ geschrieben werden kann mit

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iwx^iy \in L$

Beweis:

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$
- Betrachte Ableitung und Syntaxbaum eines Wortes z mit $|z| \geq 2^{|V|} = n$ (wenn es keine solche Ableitung gibt, gilt das Pumping-Lemma: es gibt dann keine Worte $z \in L$ mit Mindestlänge n)
- Da G in Chomsky-Normalform, ist der Syntaxbaum ein binärer Baum, bis auf die letzte Schicht, die Produktionen $A \to a$ anwendet



Beweis des Pumping-Lemmas (1)

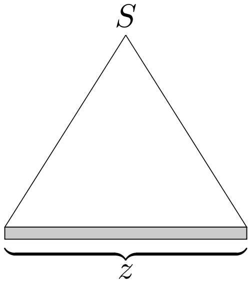
Behauptung: Für jede CFL L gibt es $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ als $z = uvwxy$ geschrieben werden kann mit

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iwx^iy \in L$

Beweis:

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$
- Betrachte Ableitung und Syntaxbaum eines Wortes z mit $|z| \geq 2^{|V|} = n$ (wenn es keine solche Ableitung gibt, gilt das Pumping-Lemma:

  es gibt dann keine Worte $z \in L$ mit Mindestlänge n)
- Da G in Chomsky-Normalform, ist der Syntaxbaum ein binärer Baum, bis auf die letzte Schicht, die Produktionen $A \to a$ anwendet
- Baum ohne letzte Schicht hat $|z| \geq 2^{|V|}$ Blätter.



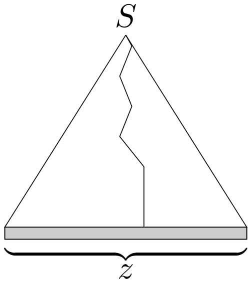
Beweis des Pumping-Lemmas (1)

Behauptung: Für jede CFL L gibt es $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ als $z = uvwxy$ geschrieben werden kann mit

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- für alle $i \geq 0$: $uv^i wx^i y \in L$

Beweis:

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$
- Betrachte Ableitung und Syntaxbaum eines Wortes z mit $|z| \geq 2^{|V|} = n$ (wenn es keine solche Ableitung gibt, gilt das Pumping-Lemma: es gibt dann keine Worte $z \in L$ mit Mindestlänge n)
- Da G in Chomsky-Normalform, ist der Syntaxbaum ein binärer Baum, bis auf die letzte Schicht, die Produktionen $A \to a$ anwendet
- Baum ohne letzte Schicht hat $|z| \geq 2^{|V|}$ Blätter.
- Daher gibt es einen Pfad von der Wurzel zum Blatt, der Länge $\geq |V|$, der aus $\geq |V| + 1$ Knoten besteht und jeder Knoten ist mit einer Variablen markiert.



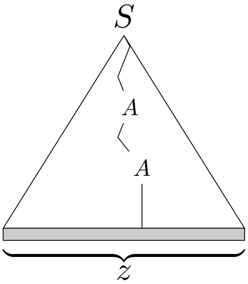
Beweis des Pumping-Lemmas (2)

Beh.: Für jede CFL L gibt es $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ als $z = uvwxy$ geschrieben werden kann mit

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iwx^iy \in L$

Beweis:

- ...
- Da es nur $|V|$ Variablen gibt, kommt mindestens eine Variable mehrfach auf diesem Pfad vor.
- Wähle die Vorkommen der Variablen so, dass das zweite Vorkommen von unten gesehen am tiefsten ist. Sei A die Variable.



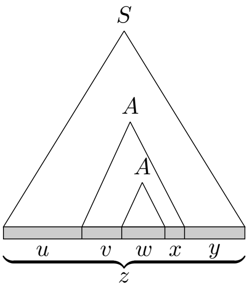
Beweis des Pumping-Lemmas (3)

Beh.: Für jede CFL L gibt es $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ als $z = uvwxy$ geschrieben werden kann mit

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iwx^iy \in L$

Beweis:

- ...
- Betrachte die Teilbäume, die jeweils A als Wurzel haben.
- Sie entsprechen Ableitungen von Teilworten von z
- Der Teilbaum mit dem unteren A als Wurzel erzeugt ein Teilwort des Teilbaums mit dem oberen A als Wurzel. D.h. $z = uvwxy$, wobei vwx vom oberen A und w vom unteren A erzeugt wird.
- Es gilt $|w| \geq 1$, da Variablen einer Grammatik in Chomsky-Normalform nur Wörter mit Länge ≥ 1 herleiten
- Das Wort vwx muss echt länger sein als w, da das obere A über dem unteren A steht. Daher folgt $|v| \geq 1$ und/oder $|x| \geq 1$ und $|vx| \geq 1$.



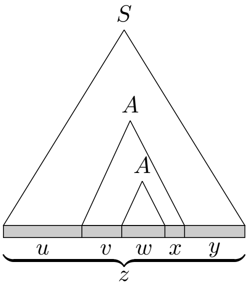
Beweis des Pumping-Lemmas (4)

Beh.: Für jede CFL L gibt es $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$
mit $|z| \geq n$ als $z = uvwxy$ geschrieben werden kann mit

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iwx^iy \in L$

Beweis:

- ...
- Da wir das tiefste Vorkommen der wiederholten Variable gewählt haben, kann der Pfad vom oberen A bis zur Blattebene nur aus $\leq |V| + 1$ Knoten bestehen und Länge $\leq |V|$ haben
- Daraus folgt: $|vwx| \leq 2^{|V|} = n$
- Aus dem Baum folgt: $A \Rightarrow^* w$ und $A \Rightarrow^* vAx$ und daher kann man auch $A \Rightarrow^* v^iwx^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ableiten
- Schließlich folgt daraus $S \Rightarrow^* uv^iwx^iy$ für alle $i \in \mathbb{N}$.



Pumping-Lemma: Illustrationen

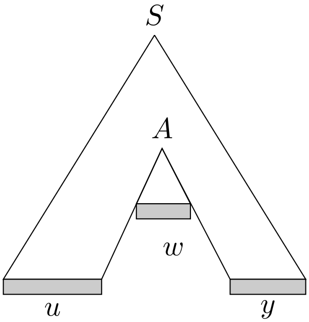


Illustration für uv^0wx^0y

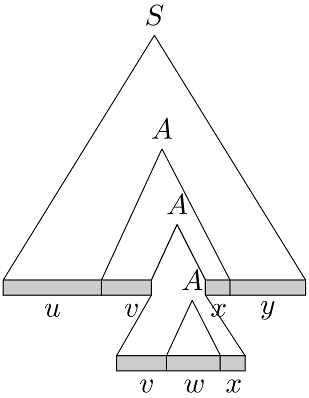


Illustration für uv^2wx^2y

Verwendung des Pumping-Lemma

- Die Pumping-Eigenschaft ist eine **notwendige** aber **keine hinreichende** Bedingung für CFLs.
- Daher kann das Pumping-Lemma **nicht** verwendet werden, um Kontextfreiheit zu zeigen.
- Aber: Es kann verwendet werden, um **Kontextfreiheit zu widerlegen**

Pumping-Lemma zum Widerlegen der Kontextfreiheit

Formulierung des Pumping-Lemmas für CFGs zum Widerlegen der Kontextfreiheit

Sei L eine formale Sprache für die gilt:

Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt es ein Wort $z \in L$, das Mindestlänge n hat (d. h. $|z| \geq n$), und für jede Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$ und $|vx| \geq 1$, gibt es ein $i \geq 0$, sodass $uv^iwx^iy \notin L$.

Dann ist L nicht kontextfrei.

Beweis:

Umformung der negierten prädikatenlogischen Formel (siehe Skript), die sich aus dem Pumping-Lemma ergibt.

Pumping-Lemma als Spiel

Sei L die formale Sprache.

1. Der **Gegner** wählt die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
2. **Wir** wählen das Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
3. Der **Gegner** wählt die Zerlegung
   $z = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$
4. **Wir** gewinnen das Spiel, wenn wir ein $i \geq 0$ angeben können, sodass $uv^iwx^iy \notin L$.

Wenn wir **für jede Wahl des Gegners** das Spiel gewinnen können,
dann haben wir gezeigt, dass L nicht kontextfrei ist.

Beispiele

Satz

Die Sprache $L = \{a^l b^l c^l \mid l \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

- Gegner wählt $n \in \mathbb{N}_{>0}$

Beispiele

Satz

Die Sprache $L = \{a^l b^l c^l \mid l \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

- Gegner wählt $n \in \mathbb{N}_{>0}$
- Wir wählen $z = a^n b^n c^n$.

Beispiele

Satz

Die Sprache $L = \{a^l b^l c^l \mid l \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

- Gegner wählt $n \in \mathbb{N}_{>0}$
- Wir wählen $z = a^n b^n c^n$.
- Gegner wählt Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$

Beispiele

Satz

Die Sprache $L = \{a^l b^l c^l \mid l \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

- Gegner wählt $n \in \mathbb{N}_{>0}$
- Wir wählen $z = a^n b^n c^n$.
- Gegner wählt Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$
- Fall 1: vwx ist von der Form $a^i b^j$, $i + j \leq n$
  Da $|vx| \geq 1$, gilt $\#_a(vx) \geq 1$ oder $\#_b(vx) \geq 1$, aber $\#_c(vx) = 0$
  Damit folgt $uv^0wx^0y \notin L$

Beispiele

Satz

Die Sprache $L = \{a^l b^l c^l \mid l \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

- Gegner wählt $n \in \mathbb{N}_{>0}$
- Wir wählen $z = a^n b^n c^n$.
- Gegner wählt Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$
- Fall 1: vwx ist von der Form $a^i b^j$, $i + j \leq n$
  Da $|vx| \geq 1$, gilt $\#_a(vx) \geq 1$ oder $\#_b(vx) \geq 1$, aber $\#_c(vx) = 0$
  Damit folgt $uv^0wx^0y \notin L$
- Fall 2: vwx ist von der Form $b^i c^j$, $i + j \leq n$
  Da $|vx| \geq 1$, gilt $\#_b(vx) \geq 1$ oder $\#_c(vx) \geq 1$, aber $\#_a(vx) = 0$
  Damit folgt $uv^0wx^0y \notin L$

Beispiele

Satz

Die Sprache $L = \{a^l b^l c^l \mid l \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

- Gegner wählt $n \in \mathbb{N}_{>0}$
- Wir wählen $z = a^n b^n c^n$.
- Gegner wählt Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$
- Fall 1: vwx ist von der Form $a^i b^j$, $i + j \leq n$
  Da $|vx| \geq 1$, gilt $\#_a(vx) \geq 1$ oder $\#_b(vx) \geq 1$, aber $\#_c(vx) = 0$
  Damit folgt $uv^0wx^0y \notin L$
- Fall 2: vwx ist von der Form $b^i c^j$, $i + j \leq n$
  Da $|vx| \geq 1$, gilt $\#_b(vx) \geq 1$ oder $\#_c(vx) \geq 1$, aber $\#_a(vx) = 0$
  Damit folgt $uv^0wx^0y \notin L$
- Andere Fälle sind nicht möglich! $\square$

Beispiele (2)

Satz

Die Sprache $L = \{a^i b^j c^i d^j \mid i, j \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

- Gegner wählt $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
- Wir wählen $z = a^n b^n c^n d^n$.
- Gegner wählt Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$
- 1.Fall: $vwx = a^i b^j$ mit $i + j \leq n$. Da $|vx| \geq 1$, gilt $\#_a(vx) + \#_b(vx) \geq 1$ und $uv^0wx^0y = uwy = a^{i'} b^{j'} c^n d^n$ und $i' < n$ und/oder $j' < n$, d.h. $uwy \notin L$.
- 2.Fall: $vwx = b^i c^j$ mit $i + j \leq n$. Da $|vx| \geq 1$, gilt $\#_b(vx) + \#_c(vx) \geq 1$ und $uv^0wx^0y = uwy = a^n b^{i'} c^{j'} d^n$ und $i' < n$ und/oder $j' < n$, d.h. $uwy \notin L$
- 3.Fall: $vwx = c^i d^j$ mit $i + j \leq n$. Da $|vx| \geq 1$, gilt $\#_c(vx) + \#_d(vx) \geq 1$ und $uv^0wx^0y = uwy = a^n b^n c^{i'} d^{j'}$ und $i' < n$ und/oder $j' < n$, d.h. $uwy \notin L$.

Unäres Alphabet

Satz

Sei L eine formale Sprache über einem unären Alphabet (d.h. $|\Sigma| = 1$). Dann ist L genau dann regulär, wenn L kontextfrei ist.

Beweis:

- Wenn L regulär ist, dann ist L auch kontextfrei.
- Rückrichtung: Siehe Skript
  (Beweis verwendet die Pumping-Eigenschaft für CFLs und konstruiert daraus eine Vereinigung von regulären Sprachen)

Beispiele

Satz

Die Sprachen

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \{a^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}\\
L_2 &= \{a^n \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}\\
L_3 &= \{a^n \mid n \text{ ist Quadratzahl}\}\\
L_4 &= \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}
$$

sind allesamt nicht kontextfrei.

Beweis: Wir haben für alle 4 Sprachen gezeigt, dass sie nicht regulär sind. Da sie alle über einem unären Alphabet definiert sind, sind sie auch nicht kontextfrei.