

Kontextfreie Sprachen: Operationen und Chomsky-Normalform

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik



Zur Erinnerung:

- Kontextfreie Sprachen (CFLs) werden von einer kontextfreien Grammatik (CFG) erzeugt
- Das sind die Typ 2-Grammatiken
- Bedingung: Alle linken Seiten der Produktionen bestehen aus genau einer Variablen, d.h. sie sind von der Form $A \rightarrow r$.

Motivation

- Kontextfreie Sprachen sind insbesondere nützlich um Sprachen mit Klammern zu beschreiben
- Die Syntax von Programmiersprachen wird meist mit einer kontextfreien Grammatik angegeben

Beispiele:

- $G = (\{E, M, Z\}, \{+, *, (,)\} \cup \{0, \dots, 9\}, P, E)$ mit

$$P = \{E \rightarrow M \mid E + M, \\ M \rightarrow Z \mid M * Z, \\ Z \rightarrow N \mid (E), \\ N \rightarrow 1D \mid \dots \mid 9D, \\ D \rightarrow 0D \mid \dots \mid 9D \mid \varepsilon\}$$

- $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist kontextfrei: Produktionen $\{S \rightarrow \varepsilon \mid T, T \rightarrow aTb \mid ab\}$ mit S als Startsymbol erzeugen L

Einfache Operationen auf CFGs

- Wir definieren Operationen auf CFGs, welche die erzeugte Sprache unverändert lassen
- Die Operationen werden danach als Hilfsmittel wiederverwendet (insbesondere bei der Berechnung von Normalformen).

Definition (links- bzw. rechts-rekursive Produktion)

Eine Produktion nennt man **links-rekursiv**, wenn sie von der Form

$$A \rightarrow Au$$

ist, und **rechts-rekursiv**, wenn sie von der Form

$$A \rightarrow uA$$

ist, wobei in beiden Fällen u eine Satzform ist.

Lemma (Elimination von Links-Rekursion)

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$, $P = P' \cup \underbrace{\{A \rightarrow Au_1 \mid \dots \mid Au_n \mid w_1 \mid \dots \mid w_m\}}_{P''}$ eine CFG mit

- P'' sind alle Produktionen in P mit A als linker Seite und
- die Satzformen w_1, \dots, w_m beginnen alle nicht mit A .

Es gilt $L(G) = L(G')$ für $G' = (V \cup \{B\}, \Sigma, P' \cup P''', S)$ mit B neue Variable und
 $P''' = \{A \rightarrow w_1 B \mid \dots \mid w_m B \mid w_1 \mid \dots \mid w_m,$
 $B \rightarrow u_1 \mid \dots \mid u_n \mid u_1 B \mid \dots \mid u_n B\}$

Beweis: Ausführlicher Beweis im Skript

Wesentliche Idee:

Ersetze Linksableitungsschritte mit G : $x_1 A x_2 \Rightarrow_G^* x_1 w_r u_{f(1)} \cdots u_{f(k)} x_2$ durch

Rechtsableitungsschritte mit G' : $x_1 A x_2 \Rightarrow_{G'}^* x_1 w_r u_{f(1)} \cdots u_{f(k)} x_2$

Beispiel

Die CFG $G = (\{A, C\}, \{b, c, d\}, \{A \rightarrow ACA \mid bb, C \rightarrow Ccc \mid d\}, A)$ hat links-rekursive Produktionen.

Entfernen der Links-Rekursion für A ergibt die CFG

$$G' = (\{A, B, C\}, \{b, c, d\}, \{A \rightarrow bbB \mid bb, B \rightarrow CA \mid CAB, C \rightarrow Ccc \mid d\}, A)$$

Anschließendes Entfernen der Links-Rekursion für C ergibt die CFG

$$G'' = (\{A, B, C, D\}, \{b, c, d\}, \\ \{A \rightarrow bbB \mid bb, B \rightarrow CA \mid CAB, C \rightarrow d \mid dD, D \rightarrow cc \mid ccD\}, A)$$

Lemma (Inlining von Produktionen)

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG und

- $A \rightarrow uBv \in P$,
- $B \rightarrow w_1 \mid \dots \mid w_n$ alle Regeln mit B als linker Seite

und sei $G' = (V, \Sigma, P \setminus \{A \rightarrow uBv\} \cup \{A \rightarrow uw_1v \mid \dots \mid uw_nv\}, S)$.

Dann erzeugen G und G' dieselbe Sprache, d. h. $L(G) = L(G')$.

Inlining von Produktionen

Lemma (Inlining von Produktionen)

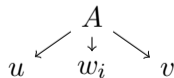
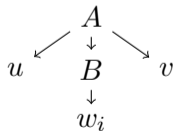
Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG und

- $A \rightarrow uBv \in P$,
- $B \rightarrow w_1 \mid \dots \mid w_n$ alle Regeln mit B als linker Seite

und sei $G' = (V, \Sigma, P \setminus \{A \rightarrow uBv\} \cup \{A \rightarrow uw_1v \mid \dots \mid uw_nv\}, S)$.

Dann erzeugen G und G' dieselbe Sprache, d. h. $L(G) = L(G')$.

Beweis: Das folgt durch Modifizieren der Syntaxbäume zur Ableitung mit G bzw. G' :



tausche alle Bau-
mabschnitte

durch

(im Syntaxbaum mit G)

(im Syntaxbaum mit G')

Sharing von Satzformen mit neuen Produktionen

Lemma (Sharing von Satzformen mit neuen Produktionen)

Sei G eine CFG mit $G = (V, \Sigma, P \cup \{A \rightarrow w_1 \cdots w_n\}, S)$.

Seien B_1, \dots, B_n neue Variablen (d. h. $V \cap \{B_1, \dots, B_n\} = \emptyset$) und sei

$G' = (V \cup \{B_1, \dots, B_n\}, \Sigma, P \cup \{A \rightarrow B_1 \cdots B_n, B_1 \rightarrow w_1, \dots, B_n \rightarrow w_n\}, S)$.

Dann gilt $L(G) = L(G')$.

Beweis:

“ \subseteq ”: Konstruiere aus $S \Rightarrow_G^* w$ Ableitung $S \Rightarrow_{G'}^* w$: Übersetze jeden Schritt $uAv \Rightarrow_G uw_1 \cdots w_nv$ in $uAv \Rightarrow_{G'} uB_1 \cdots B_nv \Rightarrow_{G'}^n uw_1 \cdots w_nv$.

“ \supseteq ”: Betrachte den Syntaxbaum für $S \Rightarrow_{G'}^* w$.

Identifiziere die Anwendungen der Regeln $A \rightarrow B_1 \cdots B_n$, $B_i \rightarrow w_i$, und modifiziere Syntaxbaum durch Anwendung der Regel $A \rightarrow w_1 \cdots w_n$.

Lese Ableitung $S \Rightarrow_G^* w$ ab.

- Normalformen von Grammatiken fordern eine spezielle Form der Produktionen
- Nützlich, wenn man Grammatiken analysiert oder Algorithmen auf Grammatiken formuliert
- Man muss dann nur diese Form (statt aller erlaubten) von Produktionen betrachten
- Wir betrachten zwei Normalformen
 - Chomsky-Normalform
 - Greibach-Normalform

Definition (Chomsky-Normalform)

Eine CFG $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $\varepsilon \notin L(G)$ ist in **Chomsky-Normalform**, wenn für jede Produktion $A \rightarrow w \in P$ gilt: $w = a \in \Sigma$ oder $w = BC$ mit $B, C \in V$.

Definition (Chomsky-Normalform)

Eine CFG $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $\varepsilon \notin L(G)$ ist in **Chomsky-Normalform**, wenn für jede Produktion $A \rightarrow w \in P$ gilt: $w = a \in \Sigma$ oder $w = BC$ mit $B, C \in V$.

Beispiel:

- Die CFG $G = (\{A\}, \{(,), [,]\}, \{A \rightarrow (A) \mid () \mid [A] \mid [] \mid AA\}, A)$ ist **nicht** in Chomsky-Normalform (nur die Produktion $A \rightarrow AA$ passt zum vorgeschriebenen Format).
- Die CFG $G' = (\{A, B, C, D, E, F, G\}, \{(,), [,]\}, P, A)$ mit

$$P = \{A \rightarrow BF \mid BC \mid DG \mid DE \mid AA, \\ B \rightarrow (, C \rightarrow), D \rightarrow [, E \rightarrow], F \rightarrow AC, G \rightarrow AE\}$$

ist in Chomsky-Normalform (und erzeugt die gleiche Sprache wie G).

Eigenschaften der Chomsky-Normalform

Sei G eine CFG in Chomsky-Normalform, dann gilt:

- Syntaxbäume zu Ableitungen mit G sind immer **Binärbäume**
- Ableitungen eines Worts $w \in L(G)$ bestehen immer genau aus $2 \cdot |w| - 1$ Ableitungsschritten.

Beispiel:

$G' = (\{A, B, C, D, E, F, G\}, \{(\cdot), [,]\}, P, A)$ mit

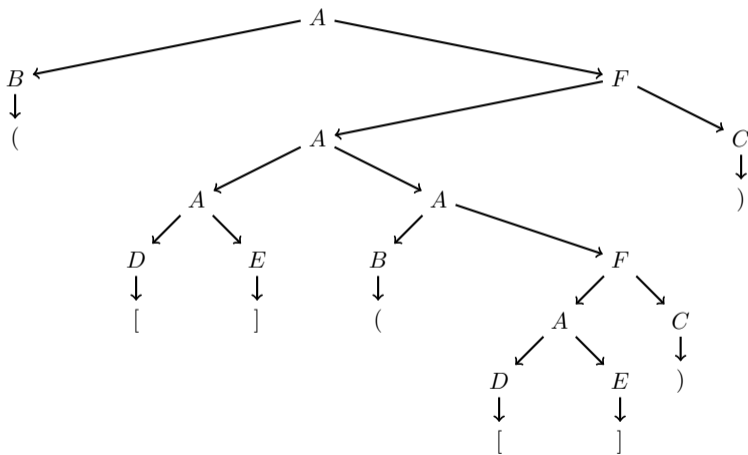
$$P = \{A \rightarrow BF \mid BC \mid DG \mid DE \mid AA, \\ B \rightarrow (\cdot, C \rightarrow), D \rightarrow [, E \rightarrow], F \rightarrow AC, G \rightarrow AE\}$$

Ableitung von $(\cdot(\cdot(\cdot)))$:

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow BF \Rightarrow (F \Rightarrow (AC \Rightarrow (AAC \Rightarrow (DEAC \Rightarrow ([EAC \\ &\Rightarrow (\cdot AC \Rightarrow (\cdot BFC \Rightarrow (\cdot (FC \Rightarrow (\cdot (ACC \Rightarrow (\cdot (DECC \\ &\Rightarrow (\cdot ([ECC \Rightarrow (\cdot (\cdot CC \Rightarrow (\cdot (\cdot)C \Rightarrow (\cdot (\cdot) \end{aligned}$$

Eigenschaften der Chomsky-Normalform (2)

Der Syntaxbaum dazu:



Theorem

Für CFGs G mit $\varepsilon \notin L(G)$ kann eine äquivalente CFG in Chomsky-Normalform berechnet werden.

Herstellen der Chomsky-Normalform

Jede CFG (mit $\varepsilon \notin L(G)$) kann in Chomsky-Normalform gebracht werden. Das Verfahren geht in mehreren Schritten vor:

- 1 Entfernen von ε -Produktionen (kennen wir bereits)
- 2 Entfernen von Einheitsproduktionen (Produktionen $A \rightarrow B$)
- 3 Sharen aller Terminale a in rechten Seiten, die nicht nur aus a bestehen durch neue Produktionen $A \rightarrow a$
- 4 Alle Produktionen $A \rightarrow B_1 \cdots B_m$ mit $m > 2$ in mehrere zerlegen:
 $A \rightarrow B_1 C_1, C_1 \rightarrow B_2 C_2, \dots, C_{m-2} \rightarrow B_{m-1} B_m$

Entfernen von Einheitsproduktionen

- Intuitiv ist klar, dass $A \rightarrow B$ entfernt werden kann:
Wenn erst $A \rightarrow B$, dann $B \rightarrow w$ angewendet wird,
kann man auch gleich $A \rightarrow w$ anwenden.
- Algorithmisch zu beachten:
 - Eliminiere in der richtigen Reihenfolge:
Wenn $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow C$, dann ist Ersetzen von
 $A \rightarrow B$ durch $A \rightarrow C$ nicht zielführend.
 - Zyklen $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ müssen vorher entfernt werden!

Algorithmus 5: Entfernen von Einheitsproduktionen

Eingabe: Eine CFG $G = (V, \Sigma, P, S)$

Beginn

Erzeuge gerichteten Graph $D = (V, E)$, mit $(A, B) \in E$ für jede Einheitsproduktion $A \rightarrow B \in P$;

solange es einen Zyklus $(A_1, A_2), \dots, (A_{n-1}, A_n), (A_n, A_1) \in E$ gibt **tue**

$P := P \setminus \{A_1 \rightarrow A_2, \dots, A_{n-1} \rightarrow A_n, A_n \rightarrow A_1\}$; /* entferne zykl. Regeln */

$P := P[A_1/A_2, \dots, A_1/A_n]$; /* ersetze alle Vorkommen von A_i durch A_1 für $i = 2, \dots, n$ */

$V := V \setminus \{A_2, A_3, \dots, A_n\}$; /* lösche A_2, \dots, A_n */

$S := S[A_1/A_2, \dots, A_1/A_n]$; /* ersetze Startsymbol durch A_1 , falls es A_i , $2 \leq i \leq n$ war */

$E := E \setminus \{(A_1, A_2), \dots, (A_{n-1}, A_n), (A_n, A_1)\}$; /* entferne Zyklus aus Graph */

$E := E[A_1/A_2, \dots, A_1/A_n]$; /* ersetze A_i durch A_1 für $i = 2, \dots, n$ in anderen Kanten */

Sortiere D topologisch und nummeriere die Variablen in V durch (und benenne entsprechend in E, P, S um),
so dass gilt: $A_i \rightarrow A_j$ impliziert $i < j$;

Sei $V = \{A_1, \dots, A_k\}$;

für $i=k$ bis 1 **tue**

wenn $A_i \rightarrow A_j \in P$ **dann**

seien $A_j \rightarrow w_1, \dots, A_j \rightarrow w_m$ alle Produktionen mit A_j als linker Seite;

$P := P \cup \{A_i \rightarrow w_1, \dots, A_i \rightarrow w_m\}$;

$P := P \setminus \{A_i \rightarrow A_j\}$;

Gib die so entstandene Grammatik als G' aus;

Satz

Algorithmus 5 berechnet bei Eingabe einer CFG G mit $\varepsilon \notin L(G)$ eine CFG G' , die keine Einheitsproduktionen hat, sodass gilt $L(G) = L(G')$. Wenn G keine ε -Produktionen hat, dann hat auch G' keine ε -Produktionen.

Beweis: Wir zeigen:

- 1 Das Entfernen eines Zyklus verändert die erzeugte Sprache nicht
- 2 Das Entfernen einer Einheitsproduktion $A_i \rightarrow A_j$ in der rückwärts-laufenden für-Schleife ändert die erzeugte Sprache nicht.
bereits gezeigt, da die Operation „Inlining von Produktionen“ korrekt.
- 3 Der Algorithmus terminiert und führt nie Einheits- oder ε -Produktionen ein.

Korrektheit von Algorithmus 5: Entfernen von Zyklen ist korrekt

Beweisskizze (ausführlicher Beweis im Skript):

- Habe $G = (V, \Sigma, P, S)$ Zyklus $A_1 \rightarrow A_2, \dots, A_{n-1} \rightarrow A_n, A_n \rightarrow A_1$
- Sei $G' = (V', \Sigma, P', S')$ die Grammatik nach Entfernen des Zyklus.
- Sei σ die Substitution $\{A_i \mapsto A_1 \mid i \in \{2, \dots, n\}\}$.
- „ $L(G) \subseteq L(G')$ “:
 - Zeige mit Induktion über n , dass für alle $w_1, w_2 \in (\Sigma \cup V)^*$ gilt:
Wenn $w_1 \Rightarrow_G^n w_2$, dann $\sigma(w_1) \Rightarrow_{G'}^* \sigma(w_2)$.
- „ $L(G') \subseteq L(G)$ “:
 - Zeige mit Induktion über n , dass für $w \in (\Sigma \cup V')^*$ und $w_0 \in \Sigma^*$ gilt:
Wenn $w \Rightarrow_{G'}^n w_0 \in \Sigma^*$, dann $w \Rightarrow_G^* w_0$.

Korrektheit von Algorithmus 5: Terminierung

Algorithmus 5 terminiert, denn

- Die Solange-Schleife terminiert, da jede Iteration die Anzahl der Zyklen strikt verkleinert.
- Die für-Schleife terminiert offensichtlich.

Es werden keine Einheitsproduktionen eingeführt:

- Da die Produktionen topologisch sortiert behandelt werden:
Wenn $A_i \rightarrow A_j$ entfernt wird, wurden **vorher** alle Einheitsproduktionen $A_j \rightarrow A_k$ entfernt. D.h. zu diesem Zeitpunkt gilt: für alle Produktionen $A_j \rightarrow w$ besteht w nicht nur aus einer Variablen.

Es werden keine ε -Produktionen eingeführt:

- offensichtlich.

Algorithmus 6: Herstellen der Chomsky-Normalform

Eingabe: CFG G mit $\varepsilon \notin L(G)$

Ausgabe: CFG G' in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L(G')$

Beginn

Entferne die ε -Produktionen in G mit Algorithmus 1 und entferne anschließend die Einheitsproduktionen mit Algorithmus 5;

Sei $G' = (V', \Sigma, P', S')$ die entstandene Grammatik;

für alle $a \in \Sigma$ **tue**

 /* Führe neue Variable A_a für a ein, und ersetze Vorkommen von a durch das Nichtterminal */

$G' := (V' \cup \{A_a\}, \Sigma, \{A \rightarrow w[A_a/a] \mid A \rightarrow w \in P' \text{ und } |w| > 1\}$
 $\cup \{A \rightarrow w \mid A \rightarrow w \in P' \text{ und } |w| = 1\} \cup \{A_a \rightarrow a\}, S)$

/* Nun sind alle Regeln von der Form $A \rightarrow a$ oder $A \rightarrow B_1 \cdots B_m$ mit $m \geq 2$ */

für alle $A \rightarrow B_1 \cdots B_m \in P'$ **mit** $m > 2$ **tue**

 Seien C_1, \dots, C_{m-2} neue Variablen;

$V' := V' \cup \{C_1, \dots, C_{m-2}\};$

 /* Ersetze in P' die Produktion $A \rightarrow B_1 \cdots B_m$ durch neue Regeln */

$P' := (P' \setminus \{A \rightarrow B_1 \cdots B_m\})$
 $\cup \{A \rightarrow B_1 C_1\} \cup \{C_i \rightarrow B_{i+1} C_{i+1} \mid \text{für } i = 1, \dots, m-3\} \cup \{C_{m-2} \rightarrow B_{m-1} B_m\};$

Theorem

Für CFGs G mit $\varepsilon \notin L(G)$ berechnet Algorithmus 6 eine äquivalente CFG in Chomsky-Normalform.

Beweis:

- Die Schritte „Entferne der ε -Produktionen und Entfernen von Einheitsproduktionen haben wir als korrekt gezeigt.
- Die Schritte „Einführen von Produktionen $A \rightarrow a$ “ und Behandlung von $A \rightarrow B_1 \cdots B_m$ sind Instanzen der korrekten Operation „Sharing von Satzformen mit neuen Variablen“
- Verifiziere, dass danach alle Produktionen die gewünschte Form haben.

Beispiel: Chomsky-Normalform berechnen

$G_0 = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P_0, S)$ mit

$$P_0 = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, A \rightarrow \varepsilon, \\ B \rightarrow 0, B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}.$$

Schritt 1: Entfernen der ε -Produktionen

$G_0 = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P_0, S)$ mit

$$P_0 = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, A \rightarrow \varepsilon, B \rightarrow 0, \\ B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}.$$

Schritt 1: Entfernen der ε -Produktionen

$G_0 = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P_0, S)$ mit

$$P_0 = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, A \rightarrow \varepsilon, B \rightarrow 0, \\ B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}.$$

- Menge W der Variablen, die ε herleiten:

$$W = \{A, C\} \text{ da } A \rightarrow \varepsilon \text{ und } C \rightarrow AAA$$

Schritt 1: Entfernen der ε -Produktionen

$G_0 = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P_0, S)$ mit

$$P_0 = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, A \rightarrow \varepsilon, B \rightarrow 0, \\ B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}.$$

- Menge W der Variablen, die ε herleiten:

$$W = \{A, C\} \text{ da } A \rightarrow \varepsilon \text{ und } C \rightarrow AAA$$

- Starte mit

$$G_1 = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P_1, S)$$

$$P_1 = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, B \rightarrow 0, \\ B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}.$$

Schritt 1: Entfernen der ε -Produktionen

$G_0 = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P_0, S)$ mit

$$P_0 = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, A \rightarrow \varepsilon, B \rightarrow 0, \\ B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}.$$

- Menge W der Variablen, die ε herleiten:

$$W = \{A, C\} \text{ da } A \rightarrow \varepsilon \text{ und } C \rightarrow AAA$$

- Starte mit

$$G_1 = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P_1, S) \\ P_1 = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, B \rightarrow 0, \\ B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}.$$

- Hinzufügen von Produktionen für Vorkommen von A und C

$$P_1 = \{S \rightarrow 1A, S \rightarrow 1, A \rightarrow AB, A \rightarrow B, A \rightarrow DA, A \rightarrow D, \\ B \rightarrow 0, B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, C \rightarrow AA, C \rightarrow A, \\ D \rightarrow 1AC, D \rightarrow 1A, D \rightarrow 1C, D \rightarrow 1\}.$$

Schritt 2: Entfernen der Einheitsproduktionen (1)

$$P_1 = \{S \rightarrow 1A, S \rightarrow 1, A \rightarrow AB, A \rightarrow B, A \rightarrow DA, A \rightarrow D, \\ B \rightarrow 0, B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, C \rightarrow AA, C \rightarrow A, \\ D \rightarrow 1AC, D \rightarrow 1A, D \rightarrow 1C, D \rightarrow 1\}.$$

Schritt 2: Entfernen der Einheitsproduktionen (1)

$$P_1 = \{S \rightarrow 1A, S \rightarrow 1, A \rightarrow AB, A \rightarrow B, A \rightarrow DA, A \rightarrow D, \\ B \rightarrow 0, B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, C \rightarrow AA, C \rightarrow A, \\ D \rightarrow 1AC, D \rightarrow 1A, D \rightarrow 1C, D \rightarrow 1\}.$$

- Der gerichtete Graph ist $D = (\{S, A, B, C, D\}, \{(A, B), (A, D), (C, A)\})$.

Schritt 2: Entfernen der Einheitsproduktionen (1)

$$P_1 = \{S \rightarrow 1A, S \rightarrow 1, A \rightarrow AB, A \rightarrow B, A \rightarrow DA, A \rightarrow D, \\ B \rightarrow 0, B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, C \rightarrow AA, C \rightarrow A, \\ D \rightarrow 1AC, D \rightarrow 1A, D \rightarrow 1C, D \rightarrow 1\}.$$

- Der gerichtete Graph ist $D = (\{S, A, B, C, D\}, \{(A, B), (A, D), (C, A)\})$.
- Es gibt keine Zyklen, wir erhalten $P_2 = P_1$

Schritt 2: Entfernen der Einheitsproduktionen (1)

$$P_1 = \{S \rightarrow 1A, S \rightarrow 1, A \rightarrow AB, A \rightarrow B, A \rightarrow DA, A \rightarrow D, \\ B \rightarrow 0, B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, C \rightarrow AA, C \rightarrow A, \\ D \rightarrow 1AC, D \rightarrow 1A, D \rightarrow 1C, D \rightarrow 1\}.$$

- Der gerichtete Graph ist $D = (\{S, A, B, C, D\}, \{(A, B), (A, D), (C, A)\})$.
- Es gibt keine Zyklen, wir erhalten $P_2 = P_1$
- Topologisches Sortieren und Umbenennen der Variablen, sodass „ $A_i \rightarrow A_j$ “ impliziert $i < j$ “ gilt, erfordert eine Umbenennung, welche die Beziehungen „ $A < B$ “, „ $A < D$ “, „ $C < A$ “ erzeugt.

Schritt 2: Entfernen der Einheitsproduktionen (1)

$$P_1 = \{S \rightarrow 1A, S \rightarrow 1, A \rightarrow AB, A \rightarrow B, A \rightarrow DA, A \rightarrow D, \\ B \rightarrow 0, B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, C \rightarrow AA, C \rightarrow A, \\ D \rightarrow 1AC, D \rightarrow 1A, D \rightarrow 1C, D \rightarrow 1\}.$$

- Der gerichtete Graph ist $D = (\{S, A, B, C, D\}, \{(A, B), (A, D), (C, A)\})$.
- Es gibt keine Zyklen, wir erhalten $P_2 = P_1$
- Topologisches Sortieren und Umbenennen der Variablen, sodass „ $A_i \rightarrow A_j$ impliziert $i < j$ “ gilt, erfordert eine Umbenennung, welche die Beziehungen „ $A < B$ “, „ $A < D$ “, „ $C < A$ “ erzeugt.
- Wir wählen Umbenennung ρ mit $\rho(C) = A_1, \rho(A) = A_2, \rho(B) = A_3, \rho(D) = A_4, \rho(S) = A_5$.

Schritt 2: Entfernen der Einheitsproduktionen (1)

$$P_1 = \{S \rightarrow 1A, S \rightarrow 1, A \rightarrow AB, A \rightarrow B, A \rightarrow DA, A \rightarrow D, \\ B \rightarrow 0, B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, C \rightarrow AA, C \rightarrow A, \\ D \rightarrow 1AC, D \rightarrow 1A, D \rightarrow 1C, D \rightarrow 1\}.$$

- Der gerichtete Graph ist $D = (\{S, A, B, C, D\}, \{(A, B), (A, D), (C, A)\})$.
- Es gibt keine Zyklen, wir erhalten $P_2 = P_1$
- Topologisches Sortieren und Umbenennen der Variablen, sodass „ $A_i \rightarrow A_j$ “ impliziert $i < j$ “ gilt, erfordert eine Umbenennung, welche die Beziehungen „ $A < B$ “, „ $A < D$ “, „ $C < A$ “ erzeugt.
- Wir wählen Umbenennung ρ mit $\rho(C) = A_1, \rho(A) = A_2, \rho(B) = A_3, \rho(D) = A_4, \rho(S) = A_5$.
- Das liefert uns $G_3 = (\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}, \Sigma, P_3, A_5)$ mit

$$P_3 = \{A_5 \rightarrow 1A_2, A_5 \rightarrow 1, A_2 \rightarrow A_2A_3, A_2 \rightarrow A_3, A_2 \rightarrow A_4A_2, \\ A_2 \rightarrow A_4, A_3 \rightarrow 0, A_3 \rightarrow 1, A_1 \rightarrow A_2A_2A_2, A_1 \rightarrow A_2A_2, \\ A_1 \rightarrow A_2, A_4 \rightarrow 1A_2A_1, A_4 \rightarrow 1A_2, A_4 \rightarrow 1A_1, A_4 \rightarrow 1\}.$$

Schritt 2: Entfernen der Einheitsproduktionen (2)

$$P_3 = \{A_5 \rightarrow 1A_2, A_5 \rightarrow 1, A_2 \rightarrow A_2A_3, A_2 \rightarrow A_3, A_2 \rightarrow A_4A_2, \\ A_2 \rightarrow A_4, A_3 \rightarrow 0, A_3 \rightarrow 1, A_1 \rightarrow A_2A_2A_2, A_1 \rightarrow A_2A_2, \\ A_1 \rightarrow A_2, A_4 \rightarrow 1A_2A_1, A_4 \rightarrow 1A_2, A_4 \rightarrow 1A_1, A_4 \rightarrow 1\}.$$

- Nun läuft die Für-Schleife für i von 5 bis 1:

Schritt 2: Entfernen der Einheitsproduktionen (2)

$$P_3 = \{A_5 \rightarrow 1A_2, A_5 \rightarrow 1, A_2 \rightarrow A_2A_3, A_2 \rightarrow A_3, A_2 \rightarrow A_4A_2, \\ A_2 \rightarrow A_4, A_3 \rightarrow 0, A_3 \rightarrow 1, A_1 \rightarrow A_2A_2A_2, A_1 \rightarrow A_2A_2, \\ A_1 \rightarrow A_2, A_4 \rightarrow 1A_2A_1, A_4 \rightarrow 1A_2, A_4 \rightarrow 1A_1, A_4 \rightarrow 1\}.$$

- Nun läuft die Für-Schleife für i von 5 bis 1:
- Für $i = 5, i = 4, i = 3$ gibt es jeweils keine Produktion der Form $A_i \rightarrow A_j$.

Schritt 2: Entfernen der Einheitsproduktionen (2)

$$P_3 = \{A_5 \rightarrow 1A_2, A_5 \rightarrow 1, A_2 \rightarrow A_2A_3, A_2 \rightarrow A_3, A_2 \rightarrow A_4A_2, \\ A_2 \rightarrow A_4, A_3 \rightarrow 0, A_3 \rightarrow 1, A_1 \rightarrow A_2A_2A_2, A_1 \rightarrow A_2A_2, \\ A_1 \rightarrow A_2, A_4 \rightarrow 1A_2A_1, A_4 \rightarrow 1A_2, A_4 \rightarrow 1A_1, A_4 \rightarrow 1\}.$$

- Nun läuft die Für-Schleife für i von 5 bis 1:
- Für $i = 5, i = 4, i = 3$ gibt es jeweils keine Produktion der Form $A_i \rightarrow A_j$.
- Für $i = 2$ wird $A_2 \rightarrow A_3$ ersetzt durch $A_2 \rightarrow 0, A_2 \rightarrow 1$, und es wird $A_2 \rightarrow A_4$ ersetzt durch $A_2 \rightarrow 1A_2A_1, A_2 \rightarrow 1A_2, A_2 \rightarrow 1A_1$ und $A_2 \rightarrow 1$. Danach ist

$$P_4 = \{A_5 \rightarrow 1A_2, A_5 \rightarrow 1, A_2 \rightarrow A_2A_3, A_2 \rightarrow 0, A_2 \rightarrow 1, A_2 \rightarrow A_4A_2, \\ A_2 \rightarrow 1A_2A_1, A_2 \rightarrow 1A_2, A_2 \rightarrow 1A_1, A_3 \rightarrow 0, A_3 \rightarrow 1, \\ A_1 \rightarrow A_2A_2A_2, A_1 \rightarrow A_2A_2, A_1 \rightarrow A_2, A_4 \rightarrow 1A_2A_1, \\ A_4 \rightarrow 1A_2, A_4 \rightarrow 1A_1, A_4 \rightarrow 1\}.$$

Schritt 2: Entfernen der Einheitsproduktionen (2)

$$P_3 = \{A_5 \rightarrow 1A_2, A_5 \rightarrow 1, A_2 \rightarrow A_2A_3, A_2 \rightarrow A_3, A_2 \rightarrow A_4A_2, \\ A_2 \rightarrow A_4, A_3 \rightarrow 0, A_3 \rightarrow 1, A_1 \rightarrow A_2A_2A_2, A_1 \rightarrow A_2A_2, \\ A_1 \rightarrow A_2, A_4 \rightarrow 1A_2A_1, A_4 \rightarrow 1A_2, A_4 \rightarrow 1A_1, A_4 \rightarrow 1\}.$$

- Nun läuft die Für-Schleife für i von 5 bis 1:
- Für $i = 5, i = 4, i = 3$ gibt es jeweils keine Produktion der Form $A_i \rightarrow A_j$.
- Für $i = 2$ wird $A_2 \rightarrow A_3$ ersetzt durch $A_2 \rightarrow 0, A_2 \rightarrow 1$, und es wird $A_2 \rightarrow A_4$ ersetzt durch $A_2 \rightarrow 1A_2A_1, A_2 \rightarrow 1A_2, A_2 \rightarrow 1A_1$ und $A_2 \rightarrow 1$. Danach ist

$$P_4 = \{A_5 \rightarrow 1A_2, A_5 \rightarrow 1, A_2 \rightarrow A_2A_3, A_2 \rightarrow 0, A_2 \rightarrow 1, A_2 \rightarrow A_4A_2, \\ A_2 \rightarrow 1A_2A_1, A_2 \rightarrow 1A_2, A_2 \rightarrow 1A_1, A_3 \rightarrow 0, A_3 \rightarrow 1, \\ A_1 \rightarrow A_2A_2A_2, A_1 \rightarrow A_2A_2, A_1 \rightarrow A_2, A_4 \rightarrow 1A_2A_1, \\ A_4 \rightarrow 1A_2, A_4 \rightarrow 1A_1, A_4 \rightarrow 1\}.$$

- Für $i = 1$ wird $A_1 \rightarrow A_2$ ersetzt durch $A_1 \rightarrow A_2A_3, A_1 \rightarrow 0, A_1 \rightarrow 1, A_1 \rightarrow A_4A_2, A_1 \rightarrow 1A_2A_1, A_1 \rightarrow 1A_2$ und $A_1 \rightarrow 1A_1$.

Schritt 2: Entfernen der Einheitsproduktionen (3)

- Daher ist die Grammatik nach Entfernen der Einheitsproduktionen:

$G_5 = (V_5, \Sigma, P_5, A_5)$ mit $V_5 = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ und

$$P_5 = \{A_5 \rightarrow 1A_2, A_5 \rightarrow 1, A_2 \rightarrow A_2A_3, A_2 \rightarrow 0, A_2 \rightarrow 1, \\ A_2 \rightarrow A_4A_2, A_2 \rightarrow 1A_2A_1, A_2 \rightarrow 1A_2, A_2 \rightarrow 1A_1, A_3 \rightarrow 0, \\ A_3 \rightarrow 1, A_1 \rightarrow A_2A_2A_2, A_1 \rightarrow A_2A_2, A_1 \rightarrow A_2A_3, A_1 \rightarrow 0, \\ A_1 \rightarrow 1, A_1 \rightarrow A_4A_2, A_1 \rightarrow 1A_2A_1, A_1 \rightarrow 1A_2, A_1 \rightarrow 1A_1, \\ A_4 \rightarrow 1A_2A_1, A_4 \rightarrow 1A_2, A_4 \rightarrow 1A_1, A_4 \rightarrow 1\}.$$

Schritt 3: Terminalsymbole durch neue Produktionen darstellen

Füge $B_0 \rightarrow 0$ und $B_1 \rightarrow 1$ hinzu und ersetze in rechten Seiten mit Wortlänge > 1 :

$$P_6 = \{B_0 \rightarrow 0, B_1 \rightarrow 1, A_5 \rightarrow B_1A_2, A_5 \rightarrow 1, A_2 \rightarrow A_2A_3, A_2 \rightarrow 0, \\ A_2 \rightarrow 1, A_2 \rightarrow A_4A_2, A_2 \rightarrow B_1A_2A_1, A_2 \rightarrow B_1A_2, \\ A_2 \rightarrow B_1A_1, A_3 \rightarrow 0, A_3 \rightarrow 1, A_1 \rightarrow A_2A_2A_2, A_1 \rightarrow A_2A_2, \\ A_1 \rightarrow A_2A_3, A_1 \rightarrow 0, A_1 \rightarrow 1, A_1 \rightarrow A_4A_2, A_1 \rightarrow B_1A_2A_1, \\ A_1 \rightarrow B_1A_2, A_1 \rightarrow B_1A_1, A_4 \rightarrow B_1A_2A_1, \\ A_4 \rightarrow B_1A_2, A_4 \rightarrow B_1A_1, A_4 \rightarrow 1\}.$$

Schritt 4: Rechte Seiten zerlegen

Zerlege rechte Seiten mit Wortlänge > 2 :

Ergibt $G_7 = (V_7, \Sigma, P_7, A_5)$, wobei

$$\begin{aligned} V_7 &= \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_0, B_1, C_1, C_2, C_3, C_4\} \\ P_7 &= \{B_0 \rightarrow 0, B_1 \rightarrow 1, A_5 \rightarrow B_1A_2, A_5 \rightarrow 1, A_2 \rightarrow A_2A_3, A_2 \rightarrow 0, \\ &A_2 \rightarrow 1, A_2 \rightarrow A_4A_2, A_2 \rightarrow B_1C_1, C_1 \rightarrow A_2A_1, \\ &A_2 \rightarrow B_1A_2, A_2 \rightarrow B_1A_1, A_3 \rightarrow 0, A_3 \rightarrow 1, A_1 \rightarrow A_2C_2, \\ &C_2 \rightarrow A_2A_2, A_1 \rightarrow A_2A_2, A_1 \rightarrow A_2A_3, A_1 \rightarrow 0, A_1 \rightarrow 1, \\ &A_1 \rightarrow A_4A_2, A_1 \rightarrow B_1C_3, C_3 \rightarrow A_2A_1, A_1 \rightarrow B_1A_2, \\ &A_1 \rightarrow B_1A_1, A_4 \rightarrow B_1C_4, C_4 \rightarrow A_2A_1, A_4 \rightarrow B_1A_2, \\ &A_4 \rightarrow B_1A_1, A_4 \rightarrow 1\}. \end{aligned}$$

Alle Schritte beendet, G_7 ist in Chomsky-Normalform