Eigenschaften regulärer Sprachen: Abschlusseigenschaften und Entscheidbarkeitsresultate

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 25. April 2022

Abschlusseigenschaften

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Vereinigung, Produkt und Kleeneschem Abschluss.

Abschlusseigenschaften

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Vereinigung, Produkt und Kleeneschem Abschluss.

Beweis:

Vereinigung, Produkt und Kleenescher Abschluss werden durch reguläre Ausdrücke erzeugt und sind daher reguläre Sprachen:

- Benutze reguläre Ausdrücke α_1, α_2 mit $L(\alpha_i) = L_i$.
- $(\alpha_1|\alpha_2)$ erzeugt $L(\alpha_1|\alpha_2) = L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2) = L_1 \cup L_2$,
- $\alpha_1\alpha_2$ erzeugt $L(\alpha_1\alpha_2) = L(\alpha_1)L(\alpha_2) = L_1L_2$ und
- $(\alpha_1)^*$ erzeugt $L(\alpha_1)^* = L_1^*$. □

Abschlusseigenschaften (2)

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Komplementbildung.

Abschlusseigenschaften (2)

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Komplementbildung.

Beweis:

- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA der L akzeptiert.
- Dann akzeptiert $\overline{M} = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z \setminus E)$ die Sprache $\overline{L}$ (d. h. das Komplement von L):
  Offensichtlich gilt $(\widehat{\delta}(z_0, w) \in E) \iff \neg(\widehat{\delta}(z_0, w) \in Z \setminus E)$
- Daher ist $\overline{L}$ regulär.

Abschlusseigenschaften (3)

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Schnitt.

Abschlusseigenschaften (3)

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Schnitt.

Beweis:

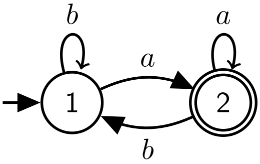
- Folgt aus $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ und da reguläre Sprachen abgeschlossen bez. Vereinigung und Komplementbildung.

Alternativ:

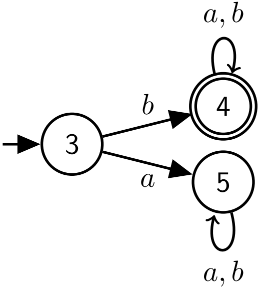
- Seien $M_1 = (Z_1, \Sigma, \delta_1, z_{01}, E_1)$ und $M_2 = (Z_2, \Sigma, \delta_2, z_{02}, E_2)$ DFAs, die $L_1 = L(M_1)$ und $L_2 = L(M_2)$ akzeptieren.
- Produktautomat von M_1 und M_2 ist der DFA $M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (z_{01}, z_{02}), E_1 \times E_2)$ mit $\delta((z, z'), a) = (\delta_1(z, a), \delta_2(z', a))$ für alle $a \in \Sigma$ und $(z, z') \in Z_1 \times Z_2$.
- M akzeptiert $L_1 \cap L_2$, denn es gilt: $\widehat{\delta}((z_{0,1}, z_{0,2}), w) \in (E_1, E_2) \iff \left(\widehat{\delta_1}(z_{0,1}, w) \in E_1 \wedge \widehat{\delta_2}(z_{0,2}, w) \in E_2\right)$.

Beispiel: Produktautomat

M1:

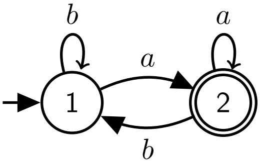


M2:

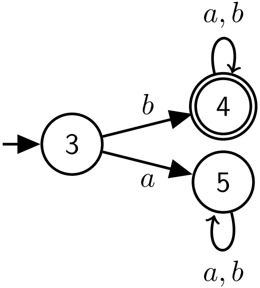


Beispiel: Produktautomat

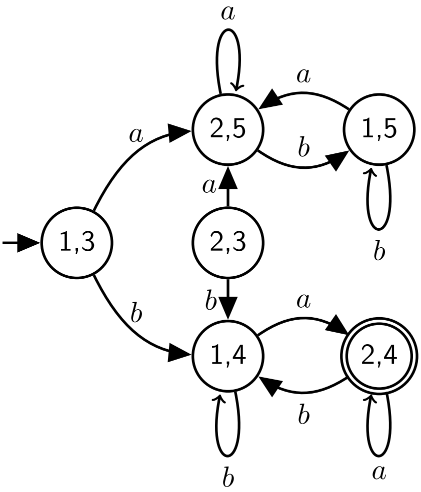
M1:



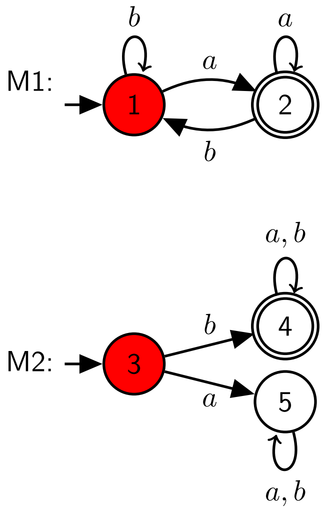
M2:



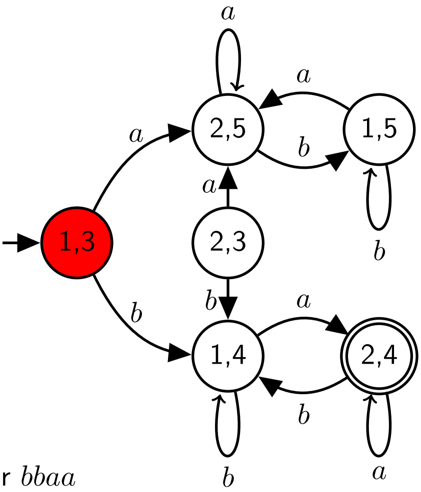
Produktautomat $M_1 \times M_2$



Beispiel: Produktautomat

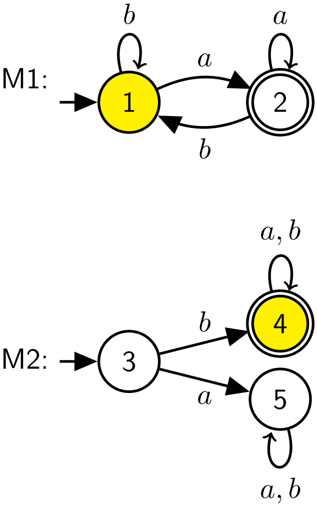


Produktautomat $M_1 \times M_2$

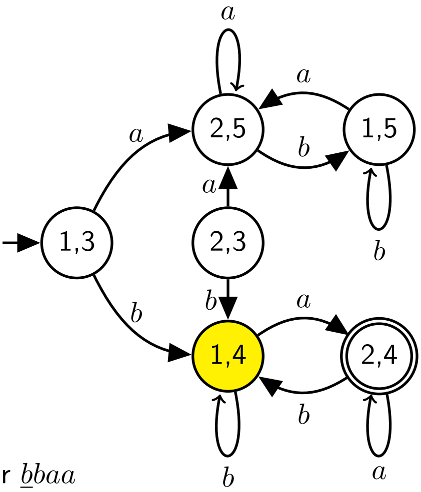


Lauf für $bbaa$

Beispiel: Produktautomat

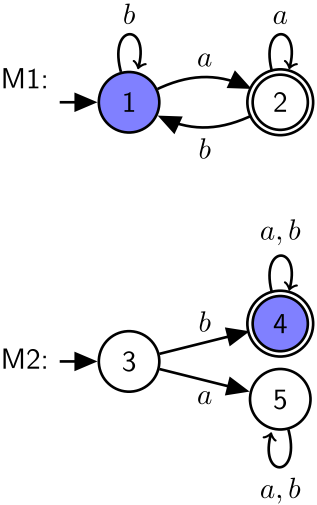


Produktautomat $M_1 \times M_2$

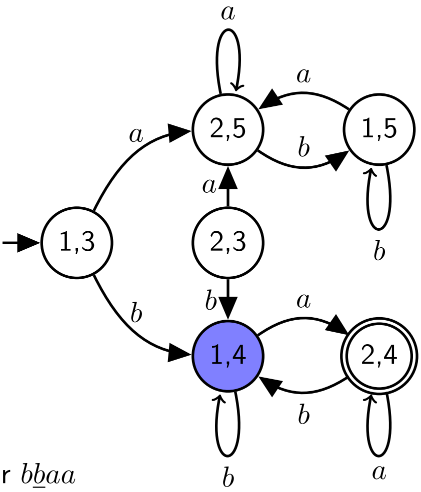


Lauf für $\underline{b}baa$

Beispiel: Produktautomat

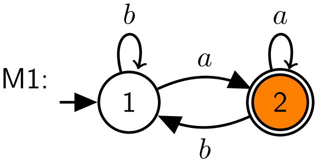


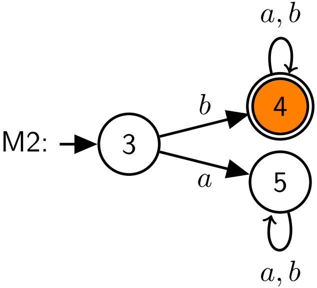
Produktautomat $M_1 \times M_2$



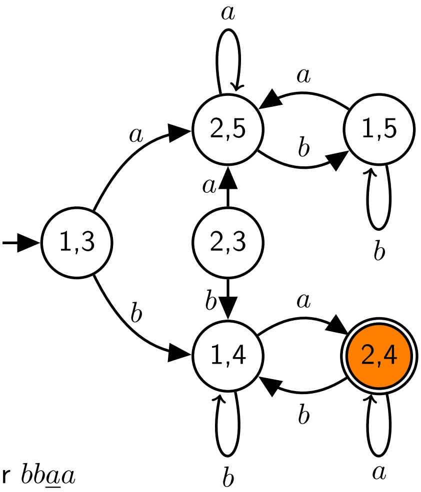
Lauf für $b\underline{b}aa$

Beispiel: Produktautomat





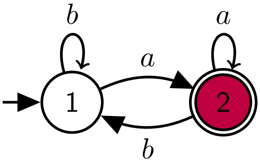
Produktautomat $M_1 \times M_2$



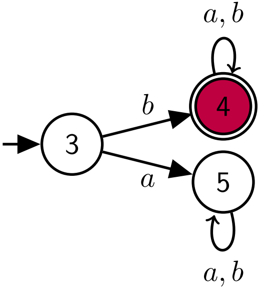
Lauf für $bb\underline{a}a$

Beispiel: Produktautomat

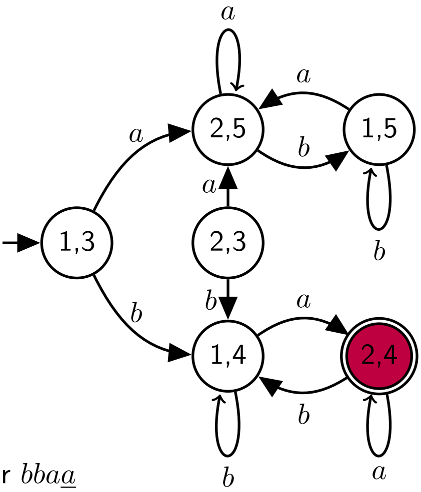
M1:



M2:

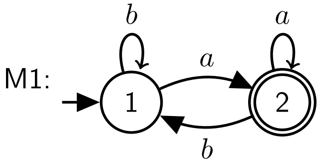


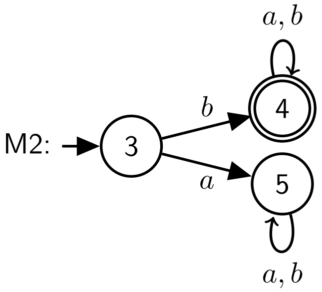
Produktautomat $M_1 \times M_2$



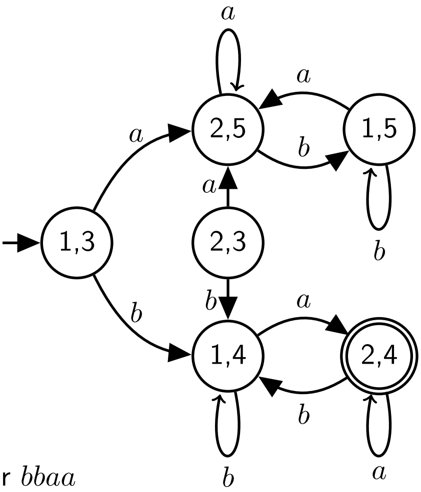
Lauf für $bba\underline{a}$

Beispiel: Produktautomat





Produktautomat $M_1 \times M_2$



Lauf für $bbaa$

Abschlusseigenschaften zusammengefasst

Theorem (Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen)

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Vereingung, Schnitt, Komplementbildung, Produkt und Kleeneschem Abschluss.

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften (1)

Satz

Die Sprache $L = \{a^n \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

Durch Widerspruch:

- Annahme L ist regulär.
- Dann ist $\overline{L}$ auch regulär.
- $\overline{L} = \{a\}^* \setminus L = \{a^n \mid n \text{ ist eine Primzahl}\}$ ist nicht regulär (bereits gezeigt)
- Widerspruch! Daher ist L nicht regulär.

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften (2)

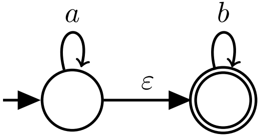
Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

Durch Widerspruch:

- Annahme: L ist regulär.
- Sprache $L' = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ ist regulär, da der folgende NFA mit ε-Übergängen L' erkennt.



- Da L und L' regulär sind, ist auch $L \cap L'$ regulär.
- $L \cap L' = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist aber nicht regulär (wie bereits gezeigt)
- Widerspruch! D.h. L ist nicht regulär.

Entscheidbarkeitsresultate: Wortproblem

- Bereits gezeigt: Das Wortproblem für Typ 1,2,3-Sprachen ist entscheidbar.
- Für DFAs ist das Wortproblem in Linearzeit in der Länge des Wortes lösbar, denn die Berechnung von $\widehat{\delta}(z_0, w)$ braucht für einen DFA nur $|w|$ Schritte.

Entscheidbarkeitsresultate: Leerheitsproblem

Satz

Das Leerheitsproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Entscheidbarkeitsresultate: Leerheitsproblem

Satz

Das Leerheitsproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Beweis:

- Sei L reguläre Sprache und sei M ein DFA mit $L(M) = L$.
- Dann gilt $L = \emptyset$ genau dann, wenn es keinen Pfad vom Startzustand zu einem Endzustand in M gibt.
- Dies kann man leicht mit einer Tiefensuche auf dem Zustandsgraph von M überprüfen.

Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen

Satz

Das Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen

Satz

Das Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Beweis:

- Sei L regulär und M ein DFA mit $L(M) = L$
- Es gilt $|L| < \infty$ g.d.w. es keinen Pfad vom Startzustand zu einem Endzustand gibt, der eine Schleife enthält.
- Prüfe dies mit einer Tiefensuche auf dem Zustandsgraph von M.

Schnittproblem für reguläre Sprachen

Satz

Das Schnittproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Schnittproblem für reguläre Sprachen

Satz

Das Schnittproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Beweis:

- Seien L_1, L_2 reguläre Sprachen.
- Seien M_1, M_2 DFAs mit $L(M_i) = L_i$.
- Berechne den Produktautomaten M mit $L(M) = L_1 \cap L_2$
- Prüfe das Leerheitsproblem für $L(M)$.

Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen

Satz

Das Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen

Satz

Das Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Beweis:

- Seien L_1, L_2 reguläre Sprachen.
- Seien M_1, M_2 DFAs mit $L(M_i) = L_i$.
- Berechne die Minimalautomaten von M_1 und M_2
- Prüfe die Minimalautomaten auf Isomorphie.

Zusammenfassung: Reguläre Sprachen

- Formalismen: Reguläre Grammatiken, DFAs, NFAs (mit oder ohne ϵ-Übergänge), reguläre Ausdrücke
- Pumping-Lemma (Pumping-Eigenschaft notwendig, nicht hinreichend!)
- Der Satz von Myhill-Nerode: L regulär g.d.w. $Index(\sim_L) < \infty$
- Nicht-Regularität nachweisen: Pumping-Lemma oder $Index(\sim_L) = \infty$
- Äquivalenzklassenautomat und Minimierung von DFAs
- Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen
- Entscheidbarkeitsresultate für reguläre Sprachen