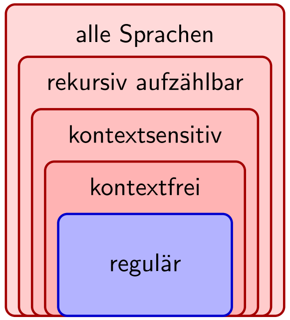
# Das Pumping-Lemma

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 16. Mai 2022

## Motivation zum Pumping-Lemma




Formalismen zur Darstellung von regulären Sprachen:

- Endliche Automaten
- Reguläre Ausdrücke
- Reguläre Grammatiken

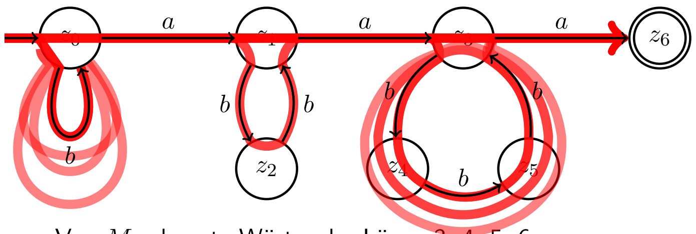
Wie zeigt man, dass eine formale Sprache **nicht regulär** ist?

$\Rightarrow$ Das Pumping-Lemma ist ein Werkzeug dafür!



## Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

Beispiel: DFA $M$:



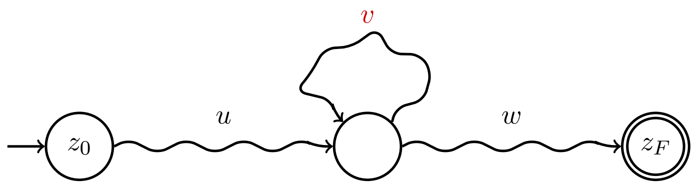

- Von $M$ erkannte Wörter der Länge $3, 4, 5, 6, \ldots$
- Beobachtung 1: Jedes Wort $z$ mit Länge $> 3$, das $M$ erkennt, **muss** mindestens eine **Schleife durchlaufen**.
- Beobachtung 2: Wenn wir die **Schleife mehrfach durchlaufen**, wird das entsprechende Wort immer noch erkannt, d.h.

Wörter in $L(M)$ mit Länge $> 3$ können wir **aufpumpen** und verbleiben in der Sprache $L(M)$



## Idee des Pumping-Lemmas: Allgemeiner

Gilt das allgemein?




- Wenn ein endlicher Automat $n$ **Zustände** hat, dann müssen akzeptierte Wörter der **Länge** $\geq n$ eine Schleife durchlaufen
- Diese Wörter kann man aufpumpen: $uvw$, $uvvw$ ,$uvvvw$, $\ldots$ Allgemein: $uv^iw$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$ liegen in der erkannten Sprache

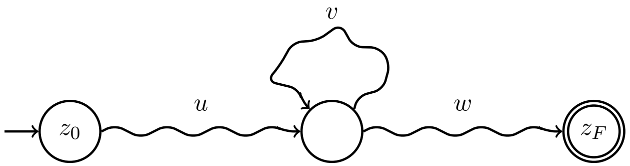
## Das Pumping-Lemma

**Lemma 4.9.1 (Pumping-Lemma)**

Jede reguläre Sprache $L$ hat die folgende Pumping-Eigenschaft:
Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge $n$ hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, so dass gilt:

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iw \in L$.

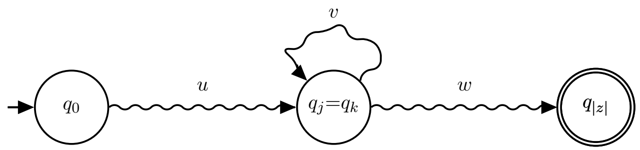
Die Zahl $n$ nennt man auch die Pumping-Konstante der Sprache $L$






## Beweis des Pumping-Lemmas (1)

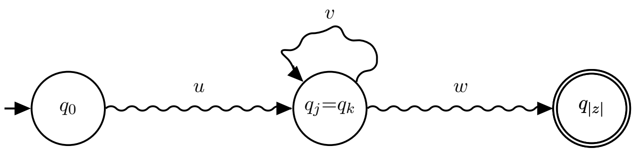
- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der $L$ akzeptiert mit $|Z| = n$.
- Jeder Lauf für ein $z \in L$ besucht $|z| + 1$ Zustände. Sei $|z| \geq n$.
  Sei $q_0, q_1, \ldots q_{|z|}$ die besuchte Folge mit $q_0 = z_0$ und $q_{|z|} \in E$.
- Da $|Z| = n$, wird spätestens nach Lesen von $n$ Zeichen ein Zustand erneut besucht
- Sei $q_k$ (mit $k \leq n$) der erste Zustand, der bereits besucht wurde:
  D.h. es gibt $j < k$, sodass $q_k = q_j$ und $k$ ist minimal, $z = uvw$ mit






## Beweis des Pumping-Lemmas (2)

...
D.h. es gibt $j < k$, sodass $q_k = q_j$ und $k$ ist minimal, $z = uvw$ mit




Wir zeigen nun die drei geforderten Eigenschaften der Zerlegung:

- Aus $j < k$ folgt $|v| \geq 1$.
- Aus $k \leq n$ folgt $|uv| \leq n$.
- Für $i = 0$: Aus $q_j = q_k$ folgt $\widehat{\delta}(q_0, u) = q_j = \widehat{\delta}(q_0, uv) = q_k$ und somit
  $\widehat{\delta}(q_0, uw) = \widehat{\delta}(q_0, uvw) = q_{|z|} \in E$, d.h. $uv^0w \in L(M)$.
  Sei $i > 0$. Aus $\widehat{\delta}(q_j, v) = q_k = q_j$ folgt $\widehat{\delta}(q_j, v^i) = q_j$ und daher
  $\widehat{\delta}(q_0, uv^iw) = \widehat{\delta}(q_k, v^iw) = \widehat{\delta}(q_j, w) = q_{|z|} \in E$. Daher gilt $uv^iw \in L(M)$. $\square$



## Endliche Sprachen

**Zur Erinnerung: Pumping-Eigenschaft**

Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge $n$ hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, so dass gilt:

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iw \in L$.

Als prädikatenlogische Formel:

$$\exists n \in \mathbb{N}_{>0}: \forall z \in L: (|z| \geq n \Rightarrow \exists u, v, w: (z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0: (uv^iw \in L)))$$

Warum erfüllen **endliche Sprachen** das Pumping-Lemma?

Wähle $n$ größer als die Länge des längsten Worts!

## Anwendung des Pumping-Lemmas

- Pumping-Lemma:
  Sprache regulär $\implies$ Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft
- Zeige, dass eine Sprache nicht regulär ist, durch Kontraposition:

> Sprache erfüllt **nicht** die Pumping-Eigenschaft
> $\implies$ Sprache ist **nicht** regulär



## Umformung der negierten Pumping-Eigenschaft

$$
\begin{aligned}
& \neg(\exists n \in \mathbb{N}_{>0}{:}\forall z \in L{:}(|z| \geq n \Rightarrow \exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}\neg(\forall z \in L{:}(|z| \geq n \Rightarrow \exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}(\neg(|z| \geq n \Rightarrow \exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}(\neg(\neg(|z| \geq n) \vee (\exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}(((|z| \geq n) \wedge \neg(\exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}(((|z| \geq n) \wedge (\forall u,v,w{:}(\neg(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}(((|z| \geq n) \wedge (\forall u,v,w{:}(\neg(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \vee \neg(\forall i \geq 0{:}uv^iw \in L))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}(((|z| \geq n) \wedge (\forall u,v,w{:}((z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \Rightarrow \neg(\forall i \geq 0{:}uv^iw \in L))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}(((|z| \geq n) \wedge (\forall u,v,w{:}((z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \Rightarrow \exists i \geq 0{:}uv^iw \notin L)))))
\end{aligned}
$$

**Formale Sprache $L$ erfüllt nicht die Pumping-Eigenschaft:**

Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt es ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$,
sodass für jede Zerlegung $z = uvw$ mit

- $|uv| \leq n$ und
- $|v| \geq 1$

ein $i \geq 0$ existiert mit $uv^iw \notin L$.



## Anwendung des Pumping-Lemmas

**Satz**

Die Sprache $L = \{a^jb^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Wir zeigen, dass $L$ die Pumping-Eigenschaft nicht erfüllt und schließen mit dem Pumping-Lemma, dass $L$ nicht regulär ist:

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig. Wir wählen $z \in L$:
  $z = a^nb^n$ (damit ist auch $|z| \geq n$ erfüllt).
- Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von $z$,
  sodass $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
- Dann ist $u = a^r, v = a^s$ mit $r + s \leq n$, $s > 0$ und $w = a^tb^n$ mit $r + s + t = n$.
  Daher können wir z.B. $i = 2$ wählen und erhalten
  $uv^iw = uv^2w = a^ra^sa^sa^tb^n = a^{n+s}b^n \notin L$,da $s > 0$. □



## Beweise Nicht-Regularität als Spiel

Sei $L$ die formale Sprache.

1. Der **Gegner** wählt die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
2. **Wir** wählen das Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
3. Der **Gegner** wählt Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
4. **Wir** gewinnen das Spiel, wenn wir ein $i \geq 0$ angeben können, sodass $uv^iw \notin L$.

Wenn wir das Spiel **für alle Wahlmöglichkeiten des Gegners** gewinnen, dann haben wir die Nichtregularität von $L$ nachgewiesen.

## Beispiel

**Satz**

Die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Wir zeigen, dass wir das eben eingeführte Spiel stets gewinnen:

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wir wählen $z \in L$ als $z = a^p$ mit $p$ ist die nächste Primzahl, die größer gleich $n$ ist.
3. Der Gegner wählt Zerlegung $u = a^r$, $v = a^s$, $w = a^t$ mit $uvw = a^p$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ (und damit $s \geq 1$).
4. Wir wählen $i = p + 1$. Dann ist $uv^iw \notin L$, denn $uv^iw = a^r(a^s)^{p+1}a^t = a^{r+s\cdot(p+1)+t} = a^{r+s\cdot p+s+t} = a^{s\cdot p+p} = a^{p\cdot(s+1)}$ und für $s \geq 1$ folgt, dass $p \cdot (s + 1)$ keine Primzahl sein kann. $\square$



## Beispiel

**Satz**

Die Sprache $L = \{a^n \mid n \text{ ist Quadratzahl}\}$ ist nicht regulär.

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wir wählen $z = a^{n^2} \in L$.
3. Sei $z = uvw$ vom Gegner zerlegt, sodass $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
4. Wir wählen $i = 2$, d.h. wir betrachten $uv^2w = a^k$.
   - $1 + n^2 \leq k$ (denn $|v| \geq 1$)
   - $k \leq n^2 + n$ (denn $|uv| \leq n$ und daher $|v| \leq n$).

   Dann kann $k$ jedoch keine Quadratzahl sein, denn $n^2 + n = (n+1) \cdot n < (n+1)^2$.
   Daher gilt $uv^2w \notin L$.
   Das Pumping-Lemma zeigt somit, dass $L$ nicht regulär ist. $\square$



## Beispiel

**Satz**

Die Sprache $L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$ das Wort $z = a^{2^n}$.
- Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| = k \geq 1$.
- Dann ist $1 \leq k \leq n$ und $uv^2w = a^{2^n+k}$ und $2^n + k \neq 2^l$ da $2^n + k < 2^{n+1} = 2^n + 2^n$ denn $k \leq n < 2^n$.
  Daher ist $uv^2w \notin L$.

Mit dem Pumping-Lemma folgt, dass $L$ nicht regulär ist. $\square$



## Beispiel

**Satz**

Die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ist Palindrom}\}$ ist nicht regulär.

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
- Wir wählen $z = a^nba^n \in L$ als Wort mit Mindestlänge $n$.
- Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
- Dann ist $uv^0w = a^kba^n$ mit $k = n - |v| < n$ kein Palindrom.

Mit dem Pumping-Lemma folgt, dass $L$ nicht regulär ist. $\square$

## Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

**Lemma**

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft erfüllen aber nicht regulär sind. Die Sprache $L = \{a^k b^l c^l \mid k, l \in \mathbb{N}\} \cup \{b, c\}^*$ ist eine solche Sprache.

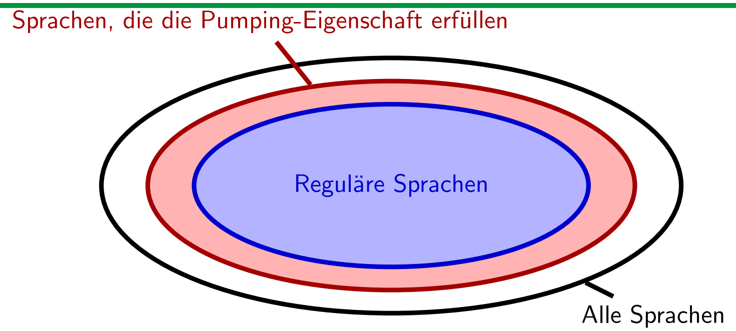
Beweis, dass $L$ die Pumping-Eigenschaft erfüllt:

- Sei $n \geq 1$ beliebig.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$
- Wenn $z \in \{b, c\}^*$, zerlege $z = uvw$ mit $u = \varepsilon$,$v$ das erste Symbol von $z$ und $w$ der $n-1$-Zeichen lange Suffix von $z$. Offensichtlich gilt $|v| \geq 1$, $|uv| \leq n$ und $uv^i w \in \{b, c\}^* \subseteq L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
- Wenn $z$ von der Form $a^k b^l c^l$ ist und $z \notin \{b, c\}^*$, dann muss $k > 0$ gelten und wir zerlegen $z = uvw$ mit $u = \varepsilon$, $v = a$, $w = a^{k-1} b^l c^l$. Da $|v| = 1, |uv| \leq n$ und $uv^i w = a^{k+i-1} b^l c^l \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$, erfüllt $L$ die Eigenschaften des Pumping-Lemmas.

Beweis, dass $L$ nicht regulär ist folgt **später!**



## Mengendiagramm




**Wichtige Konsequenz**

**Das Pumping-Lemma kann <u>nicht</u> verwendet werden, um zu zeigen, dass eine Sprache regulär ist.**



## Zusammenfassung Pumping-Lemma

- Das Pumping-Lemma formuliert **eine notwendige Bedingung** für **reguläre** Sprachen:

  Sehr informell:

  *Wörter einer regulären Sprache können aufgepumpt werden, wenn sie lang genug sind.*

- Anwendung:

  $L$ erfüllt die **Pumping-Eigenschaft nicht** $\implies$ $L$ **nicht regulär**

- Das Pumping-Lemma gibt **keine hinreichende Bedingung** für reguläre Sprachen, d.h. Regularität kann **nicht** mit dem Pumping-Lemma gezeigt werden.
- Nicht-Regularität widerlegen funktioniert nicht in jedem Fall mit dem Pumping-Lemma!