LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Formale Sprachen und Komplexität
Theoretische Informatik für Medieninformatiker
Sommersemester 2022

Der Satz von Kleene

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 17. Mai 2022

Wiederholung: Reguläre Ausdrücke

Definition (Regulärer Ausdruck)

Sei Σ ein Alphabet. Ein regulärer Ausdruck über Σ ist induktiv definiert:

- $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck
- ε ist ein regulärer Ausdruck
- a mit $a \in \Sigma$ ist ein regulärer Ausdruck
- Wenn α_1 und α_2 reguläre Ausdrücke sind, dann auch $\alpha_1\alpha_2$
- Wenn α_1 und α_2 reguläre Ausdrücke sind, dann auch $(\alpha_1|\alpha_2)$
- Wenn α regulärer Ausdruck ist, dann auch $(\alpha)^*$

Erzeugte Sprache

Die von einem regulären Ausdruck α erzeugte Sprache $L(\alpha)$ ist induktiv über dessen Struktur definiert:

$$\begin{aligned}
L(\emptyset) &:= \emptyset \\
L(\varepsilon) &:= \{\varepsilon\} \\
L(a) &:= \{a\} \text{ für } a \in \Sigma \\
L(\alpha_1\alpha_2) &:= L(\alpha_1)L(\alpha_2) \\
&= \{uv \mid u \in L(\alpha_1), v \in L(\alpha_2)\} \\
L(\alpha_1|\alpha_2) &:= L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2) \\
L((\alpha)^*) &:= L(\alpha)^*
\end{aligned}$$

Zum Auffrischen: Beispiele

Geben Sie reguläre Ausdrücke an, welche die folgenden Sprachen erzeugen:

- $L_1 = \{$alle Wörter über $\{a,b\}$, die das Teilwort $abba$ enthalten$\}$

$$(a|b)^*abba(a|b)^*$$

- $L_2 = \{$alle Wörter über $\{a,b\}$, die das Teilwort aba mindestens 2 Mal enthalten$\}$

$$\big((a|b)^*aba(a|b)^*aba(a|b)^* \mid (a|b)^*ababa(a|b)^*\big)$$

- $L_3 = \{$alle Wörter über $\{a,b\}$, die das Teilwort aaa *nicht* enthalten$\}$

$$(b|ab|aab)^*(\varepsilon|a|aa)$$

Satz von Kleene

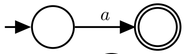
Theorem 4.7.4 (Satz von Kleene)

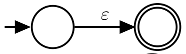
Reguläre Ausdrücke erzeugen genau die regulären Sprachen.

Beweis in zwei Teilen:

1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.
2. Für jede reguläre Sprache gibt es einen regulären Ausdruck, der sie erzeugt.

Beweis: Satz von Kleene (1)

1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.
Beweis:
- Wir konstruieren für regulären Ausdruck α einen NFA M_α mit ε-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, sodass $L(M_\alpha) = L(\alpha)$.
- Induktion über die Struktur von α
- Basisfälle:
  - Für $\alpha = a \in \Sigma$ konstruiere 

  - Für $\alpha = \varepsilon$ konstruiere 

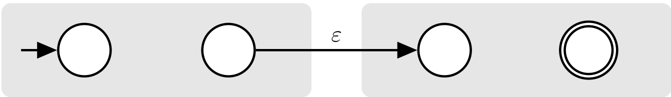
  - Für $\alpha = \emptyset$ konstruiere 

  In allen Fällen ist $L(\alpha) = L(M_\alpha)$ offensichtlich

Beweis: Satz von Kleene (2)

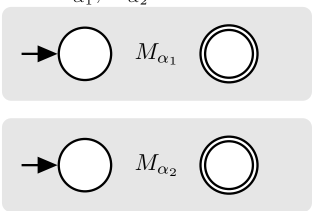
- Induktionsschritt: Betrachte den Aufbau von α (3 Fälle)
  - Für $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, liefert die I.H. $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}$.

Konstruiere daraus M_α:

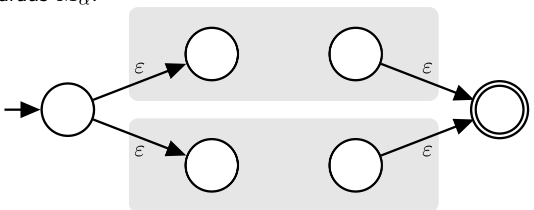


Beweis: Satz von Kleene (3)

- Für $\alpha = (\alpha_1|\alpha_2)$ liefert die I.H. $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}$:

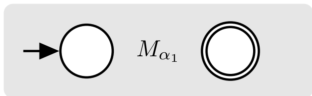


Konstruiere daraus M_α:

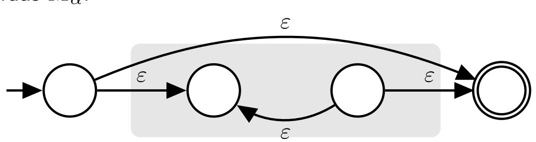


Beweis: Satz von Kleene (4)

- Für $\alpha = (\alpha_1)^*$ liefert die I.H. M_{α_1}



Konstruiere daraus M_α:

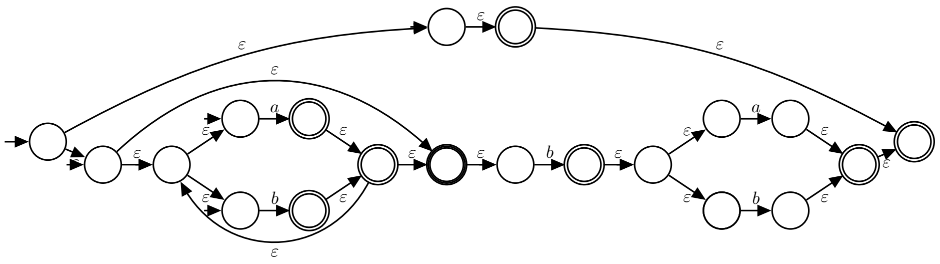


Einschub, Beispiel: Regulärer Ausdruck → NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:



Beweis: Satz von Kleene (5)

2. Für jede reg. Sprache L gibt es einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$

Beweis:

- Sei DFA $M = (\{z_1, \ldots, z_n\}, \Sigma, \delta, z_1, E)$ mit $L(M) = L$ gegeben.
- Für $w \in \Sigma^*$ und z_i, z_j mit $\widehat{\delta}(z_i, w) = z_j$ sei $visit_i(w) = q_1, \ldots, q_m$ die Folge der besuchten Zustände (wobei $q_1 = z_i$ und $q_m = z_j$). ,
- Wir definieren:

$$L_{i,j}^k = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \widehat{\delta}(z_i, w) = z_j \text{ und } visit_i(w) = q_1, \ldots, q_m, \\ \text{sodass für } 1 < l < m\text{: wenn } q_l = z_p \text{ dann } p \leq k \end{array} \right\}$$

$L_{i,j}^k$ enthält die Wörter, die M von Zustand z_i zu Zustand z_j führen ohne dabei Zwischenzustände mit Index größer als k zu benutzen.

- Mit Induktion über k zeigen wir:

Es gibt reguläre Ausdrücke $\alpha_{i,j}^k$ mit $L(\alpha_{i,j}^k) = L_{i,j}^k$.

Beweis: Satz von Kleene (6)

Zur Erinnerung: $L_{i,j}^k$ enthält die Wörter, die M von Zustand z_i zu Zustand z_j führen ohne dabei Zwischenzustände mit Index größer als k zu benutzen.

Basis: $k = 0$

- Wenn $i \neq j$, dann ist $L_{i,j}^0 = \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_j\}$.

  Falls $L_{i,j}^0 = \{a_1, \ldots, a_q\}$, dann gilt $L(\alpha_{i,j}^0) = L_{i,j}^0$ für $\alpha_{i,j}^0 = (a_1|\ldots|a_q)$.

  Falls $L_{i,j}^0 = \emptyset$, dann gilt $L(\alpha_{i,j}^0) = L_{i,j}^0$ mit $\alpha_{i,j}^0 = \emptyset$.
- Wenn $i = j$, dann ist $L_{i,i}^0 = \{\varepsilon\} \cup \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_i\}$.

  Sei $L_{i,i}^0 = \{\varepsilon, a_1, \ldots, a_q\}$.

  Dann gilt $L(\alpha_{i,i}^0) = L_{i,i}^0$ für $\alpha_{i,i}^0 = (\varepsilon|a_1|\ldots|a_q)$.

Beweis: Satz von Kleene (7)

Zur Erinnerung: $L_{i,j}^k$ enthält die Wörter, die M von Zustand z_i zu Zustand z_j führen ohne dabei Zwischenzustände mit Index größer als k zu benutzen.

Induktionsschritt: $k \to k+1$

$$L_{i,j}^{k+1} = L_{i,j}^k \cup L_{i,k+1}^k (L_{k+1,k+1}^k)^* L_{k+1,j}^k,$$

denn entweder läuft M ohne Zustand z_{k+1} zu besuchen, oder der Lauf kann in 3 Teile gespalten werden:

1. Lauf von z_i bis zum ersten Besuch des Zustands z_{k+1} (abgedeckt durch $L_{i,k+1}^k$)
2. Mehrmaliges, zyklisches Besuchen von $k+1$ (beliebig oft) (abgedeckt durch $L_{k+1,k+1}^k$)
3. Letztmaliges Verlassen von z_{k+1} und Lauf bis zu z_j (abgedeckt durch $L_{k+1,j}^k$)

Daher gilt $\alpha_{i,j}^{k+1} = (\alpha_{i,j}^k | \alpha_{i,k+1}^k (\alpha_{k+1,k+1}^k)^* \alpha_{k+1,j}^k)$ und $L(\alpha_{i,j}^{k+1}) = L_{i,j}^{k+1}$.

Beweis: Satz von Kleene (8)

Zur Erinnerung: $L_{i,j}^k$ enthält die Wörter, die M von Zustand z_i zu Zustand z_j führen ohne dabei Zwischenzustände mit Index größer als k zu benutzen.

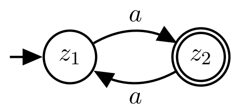
Damit haben wir bewiesen:
Es gibt reguläre Ausdrücke $\alpha_{i,j}^k$ mit $L(\alpha_{i,j}^k) = L_{i,j}^k$

Jetzt müssen wir noch zeigen,dass es einen regulären Ausdruck gibt, der $L(M)$ erzeugt.

Sei die Menge der Endzustände $E = \{z_{i_1}, \ldots, z_{i_r}\}$.

Dann gilt $L(\alpha_{1,i_1}^n | \alpha_{1,i_2}^n | \ldots | \alpha_{1,i_r}^n) = \bigcup_{z_i \in E} L_{1,i}^n = L(M)$ □

Beispiel: DFA → regulärer Ausdruck



Regulärer Ausdruck dazu:

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,2}^2 &= (\alpha_{1,2}^1 | \alpha_{1,2}^1 (\alpha_{2,2}^1)^* \alpha_{2,2}^1) \\
&= ((a|\varepsilon(\varepsilon)^*a) \,|\, (a|\varepsilon(\varepsilon)^*a)\,(\varepsilon|a(\varepsilon)^*a)^*\,(\varepsilon|a(\varepsilon)^*a)) \\
&= (a|a(aa)^*) \text{ (durch Vereinfachung)}
\end{aligned}$$

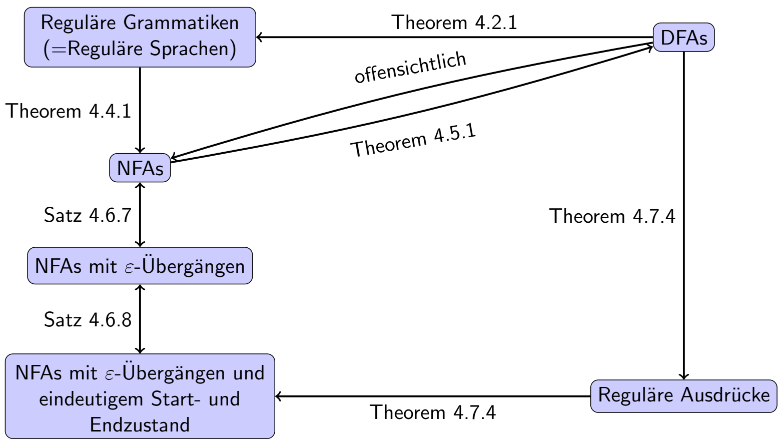
denn

$$\alpha_{1,1}^0 = \varepsilon \qquad \alpha_{2,2}^0 = \varepsilon \qquad \alpha_{1,2}^0 = a \qquad \alpha_{2,1}^0 = a$$

$$\alpha_{1,2}^1 = (\alpha_{1,2}^0 | \alpha_{1,1}^0 (\alpha_{1,1}^0)^* \alpha_{1,2}^0) = (a|\varepsilon(\varepsilon)^*a)$$

$$\alpha_{2,2}^1 = (\alpha_{2,2}^0 | \alpha_{2,1}^0 (\alpha_{1,1}^0)^* \alpha_{1,2}^0) = (\varepsilon|a(\varepsilon)^*a)$$

Zusammenfassung: Formalismen für reguläre Sprachen



Kanten → zeigen Kodierungen