Nichtdeterministische Endliche Automaten und ε-Übergänge

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 10. Mai 2022

Wiederholung: NFA

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (nondeterministic finite automaton, NFA) ist ein 5-Tupel $(Z, \Sigma, \delta, S, E)$ wobei

- Z ist eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet mit $(Z \cap \Sigma) = \emptyset$,
- $S \subseteq Z$ ist die Menge der Startzustände,
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände und
- $\delta : Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$ ist die Zustandsüberführungsfunktion

Wiederholung: DFAs & NFAs sind Formalismen für Typ 3-Sprachen

Theorem 4.5.4

DFAs und NFAs erkennen genau die regulären Sprachen.

Beachte: Determinisierung von NFA mit Potenzmengenkonstruktion

Größe des DFAs vs NFAs (1)

- Sei M ein NFA mit n Zuständen.
- Der durch die Potenzmengenkonstruktion erstellte DFA hat 2^n Zustände!
- D.h. der Platz explodiert uns!
- Frage: Geht es besser (unsere Kodierung ist zu einfach) oder nicht?
- Das folgende Lemma zeigt, dass es nicht wirklich besser geht

Größe des DFAs vs NFAs (2)

Lemma

Sei $L_n = \{uav \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^{n-1}\}$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
(Sprache aller Wörter aus $\{a,b\}^*$, die an n-letzter Stelle ein a haben).

- Es gibt NFA M_n mit $L(M_n) = L_n$ und M_n hat $n+1$ Zustände.
- Jeder DFA M'_n mit $L(M'_n) = L_n$, hat mindestens 2^n Zustände.

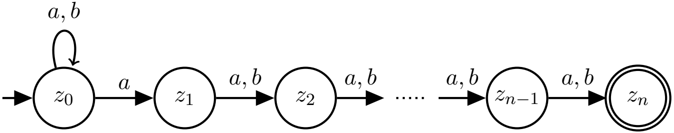
Größe des DFAs vs NFAs (2)

Lemma

Sei $L_n = \{uav \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^{n-1}\}$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
(Sprache aller Wörter aus $\{a,b\}^*$, die an n-letzter Stelle ein a haben).

- Es gibt NFA M_n mit $L(M_n) = L_n$ und M_n hat $n+1$ Zustände.
- Jeder DFA M'_n mit $L(M'_n) = L_n$, hat mindestens 2^n Zustände.

Beweis (Teil 1): Sei M_n der folgende NFA:



$L(M_n) = L_n$, denn:

- zum Akzeptieren müssen $z_0, z_1, \ldots z_n$ nacheinander durchlaufen werden, was genau mit Wörtern av mit $v \in \{a,b\}^{n-1}$ möglich ist
- In z_0 kann zuvor jedes $u \in \{a,b\}^*$ gelesen werden (Verbleib in z_0).

Größe des DFAs vs NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a,b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L_n = \{uav \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$

Größe des DFAs vs NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a,b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L_n = \{uav \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$
- Menge $W = \{a,b\}^n$ enthält 2^n Worte der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w \neq w' \in W$ geben mit $\widehat{\delta}(z_0, w) = \widehat{\delta}(z_0, w') = z_i$

Größe des DFAs vs NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a,b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L_n = \{uav \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$
- Menge $W = \{a,b\}^n$ enthält 2^n Worte der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w \neq w' \in W$ geben mit $\widehat{\delta}(z_0, w) = \widehat{\delta}(z_0, w') = z_i$
- Sei j die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

Größe des DFAs vs NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L_n = \{uav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$
- Menge $W = \{a, b\}^n$ enthält 2^n Worte der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w \neq w' \in W$ geben mit $\widehat{\delta}(z_0, w) = \widehat{\delta}(z_0, w') = z_i$
- Sei j die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

  Falls $j = 1$, dann ist o.B.d.A. $w = au \in L_n$ aber $w' = bu' \notin L_n$ und $z_i \in E$ und $z_i \notin E$ müsste gleichzeitig gelten. **Widerspruch!**

Größe des DFAs vs NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L_n = \{uav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$
- Menge $W = \{a, b\}^n$ enthält 2^n Worte der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w \neq w' \in W$ geben mit $\widehat{\delta}(z_0, w) = \widehat{\delta}(z_0, w') = z_i$
- Sei j die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

  Falls $j = 1$, dann ist o.B.d.A. $w = au \in L_n$ aber $w' = bu' \notin L_n$ und $z_i \in E$ und $z_i \notin E$ müsste gleichzeitig gelten. **Widerspruch!**

  Falls $j > 1$: O.B.d.A. $w = uav$ und $w' = ubv'$ mit $|v| = |v'| = n - j$

Größe des DFAs vs NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a,b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L_n = \{uav \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$
- Menge $W = \{a,b\}^n$ enthält 2^n Worte der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w \neq w' \in W$ geben mit $\widehat{\delta}(z_0, w) = \widehat{\delta}(z_0, w') = z_i$
- Sei j die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

  Falls $j = 1$, dann ist o.B.d.A. $w = au \in L_n$ aber $w' = bu' \notin L_n$ und $z_i \in E$ und $z_i \notin E$ müsste gleichzeitig gelten. **Widerspruch!**

  Falls $j > 1$: O.B.d.A. $w = uav$ und $w' = ubv'$ mit $|v| = |v'| = n - j$

  Sei $\begin{aligned} w_0 &= wb^{j-1} = uavb^{j-1} \\ w_0' &= w'b^{j-1} = ubv'b^{j-1} \end{aligned}$

  Dann muss gelten $\widehat{\delta}(w_0) = \widehat{\delta}(w_0')$, da $\widehat{\delta}(uav) = z_i = \widehat{\delta}(ubv')$.

  Aber $w_0 \in L_n$ und $w_0' \notin L_n$, **Widerspruch!** $\square$

NFAs mit ε-Übergängen

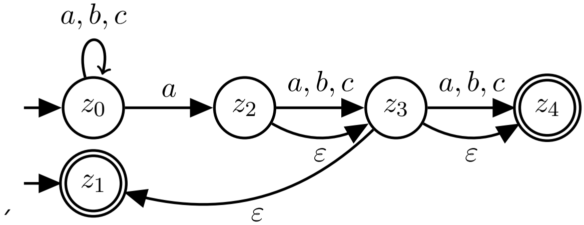
- ε-Übergänge erlauben Zustandswechsel ohne Lesen eines Zeichens (es wird sozusagen das leere Wort ε gelesen)
- Ausdruckskraft ändert sich mit ε-Übergängen nicht
- ε-Übergänge machen manche Konstruktionen einfacher.

Definition (NFA mit ε-Übergängen)

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat mit ε-Übergängen (NFA mit ε-Übergängen) ist ein Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ wobei

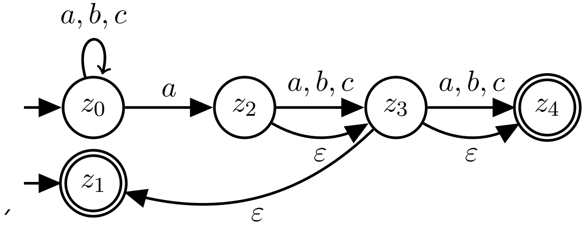
- Z ist eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet mit $(Z \cap \Sigma) = \emptyset$,
- $S \subseteq Z$ ist die Menge der Startzustände,
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände und
- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Z)$ ist die Zustandsüberführungsfunktion

Beispiel: NFA mit ε-Übergängen



Akzeptierte Sprache: ?

Beispiel: NFA mit ε-Übergängen



Akzeptierte Sprache:

alle Worte aus $\{a, b, c\}^*$, die an letzter, vorletzter, oder drittletzter Postion ein a haben, und das leere Wort

ε-Hülle

Definition (ε-Hülle)

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen. Die ε-Hülle $clos_\varepsilon(z)$ eines Zustands $z \in Z$ ist induktiv definiert als die kleinste Menge von Zuständen, welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. $z \in clos_\varepsilon(z)$.
2. Wenn $z' \in clos_\varepsilon(z)$ und $z'' \in \delta(z', \varepsilon)$, dann ist auch $z'' \in clos_\varepsilon(z)$.

Für eine Zustandsmenge $X \subseteq Z$ definieren wir $clos_\varepsilon(X) := \bigcup_{z \in X} clos_\varepsilon(z)$.

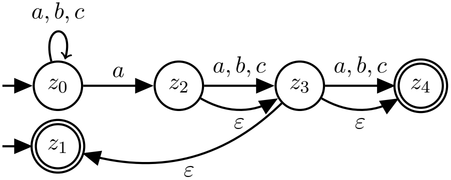
Die ε-Hülle fügt für eine Zustandsmenge alle durch ε-Übergänge erreichbaren Zustände hinzu.

ε-Hülle (2)

Die ε-Hülle für eine Zustandsmenge $X \subseteq Z$ kann auch berechnet werden durch:

$$clos_\varepsilon(X) := \begin{cases} X, & \text{wenn } \bigcup_{z \in X} \delta(z, \varepsilon) \subseteq X \\ clos_\varepsilon(X \cup \bigcup_{z \in X} \delta(z, \varepsilon)), & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel



$$
\begin{aligned}
clos_\varepsilon(z_0) &= \{z_0\}\\
clos_\varepsilon(z_1) &= \{z_1\}\\
clos_\varepsilon(z_4) &= \{z_4\}\\
clos_\varepsilon(z_3) &= \{z_1, z_3, z_4\}\\
clos_\varepsilon(z_2) &= \{z_1, z_2, z_3, z_4\}
\end{aligned}
$$

NFA mit ε-Übergängen: Akzeptierte Sprache

Akzeptierte Sprache eines NFA mit ε-Übergängen

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.
Wir definieren $\widetilde{\delta} : (\mathcal{P}(Z) \times \Sigma^*) \to \mathcal{P}(Z)$ induktiv durch:

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}(X, \varepsilon) &:= X \\ \widetilde{\delta}(X, aw) &:= \bigcup_{z \in X} \widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(\delta(z, a)), w) \text{ für alle } X \subseteq Z \end{aligned}$$

Die von M akzeptierte Sprache ist

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(S), w) \cap E \neq \emptyset\}$$

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (1)

Satz 4.6.7

NFAs mit ε-Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (1)

Satz 4.6.7

NFAs mit ε-Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Beweis „$\Leftarrow$“:

- Jede reguläre Sprache wird von einem „normalen“ NFA akzeptiert.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (1)

Satz 4.6.7

NFAs mit ε-Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Beweis „$\Leftarrow$“:

- Jede reguläre Sprache wird von einem „normalen“ NFA akzeptiert.
- Transformiere diesen NFA in einen NFA mit ε-Übergängen:

  Setze $\delta(z, \varepsilon) = \emptyset$ für alle Zustände z

  Offensichtlich ist die akzeptierte Sprache diesselbe.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (1)

Satz 4.6.7

NFAs mit ε-Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Beweis „$\Leftarrow$“:

- Jede reguläre Sprache wird von einem „normalen“ NFA akzeptiert.
- Transformiere diesen NFA in einen NFA mit ε-Übergängen:

  Setze $\delta(z, \varepsilon) = \emptyset$ für alle Zustände z

  Offensichtlich ist die akzeptierte Sprache diesselbe.
- Daher wird jede reguläre Sprache von einem NFA mit ε-Übergängen akzeptiert.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

Beweis „$\Rightarrow$“: Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

Beweis „$\Rightarrow$“: Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.

- Konstruiere NFA M' mit $L(M) = L(M')$. Dann ist $L(M)$ regulär.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

Beweis „$\Rightarrow$“: Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.

- Konstruiere NFA M' mit $L(M) = L(M')$. Dann ist $L(M)$ regulär.
- $M' = (Z, \Sigma, \delta', S', E)$ mit $S' = clos_\varepsilon(S)$, $\delta'(z, a) = clos_\varepsilon(\delta(z, a))$.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

Beweis „$\Rightarrow$“: Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.

- Konstruiere NFA M' mit $L(M) = L(M')$. Dann ist $L(M)$ regulär.
- $M' = (Z, \Sigma, \delta', S', E)$ mit $S' = clos_\varepsilon(S)$, $\delta'(z,a) = clos_\varepsilon(\delta(z,a))$.

$L(M) = L(M')$:

- Wir zeigen $\widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(X), w) = \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(X), w)$ für alle $X \subseteq Z$ und $w \in \Sigma^*$. Wir verwenden Induktion über die Wortlänge $|w|$.
- Basis: $w = \varepsilon$. Dann gilt $\widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(X), \varepsilon) = clos_\varepsilon(X) = \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(X), \varepsilon)$
- Schritt: Sei $w = au$ mit $a \in \Sigma$. Wir formen um:

$$\widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(X), au) \overset{\text{Def. } \widetilde{\delta}}{=} \bigcup_{z \in clos_\varepsilon(X)} \widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(\delta(z,a)), u) \overset{\text{I.H.}}{=} \bigcup_{z \in clos_\varepsilon(X)} \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(\delta(z,a)), u)$$

$$\overset{\text{Def. } \delta'}{=} \bigcup_{z \in clos_\varepsilon(X)} \widehat{\delta'}(\delta'(z,a), u) \overset{\text{Def. } \widehat{\delta}}{=} \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(X), au)$$