Deterministische Endliche Automaten

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

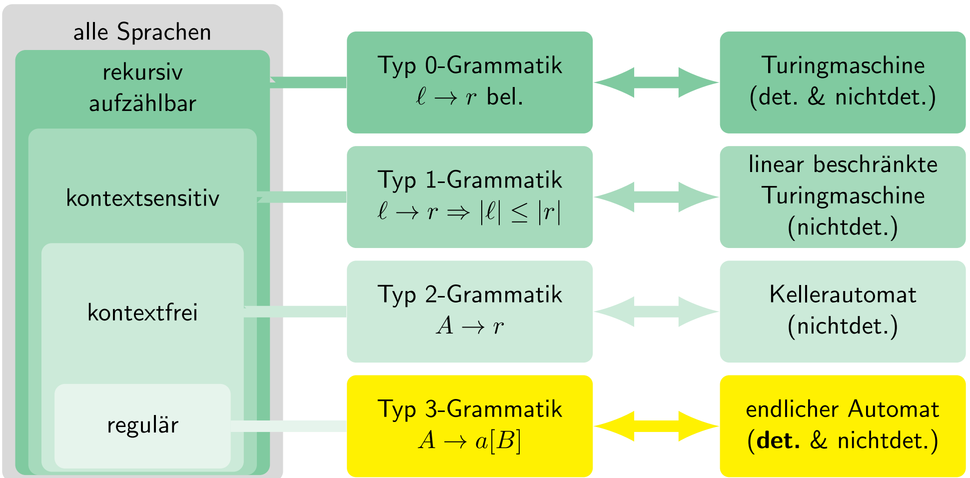
Letzte Änderung der Folien: 3. Mai 2022

Motivation

- Formalismen, um Sprachen zu repräsentieren:
  - Grammatiken: Sie erzeugen Wörter einer formale Sprache.
  - Maschinenmodelle: Sie erkennen Wörter einer formalen Sprache.
- Welcher Formalismus „besser“ ist, hängt oft von der konkreten Fragestellung ab.

Wichtige Fragestellung: Welche Maschine akzeptiert welche Sprachklasse?

Ausblick: Grammatiken & Maschinenmodelle für die Chomsky-Hierarchie



Reguläre Sprachen

Wiederholung:

- Eine Sprache heißt **regulär** (bzw. vom Typ 3), wenn sie von einer Typ 3-Grammatik erzeugt wird.
- Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist vom Typ 3 (bzw. regulär), wenn alle Produktionen von der Form

$$A \to a \text{ oder } A \to aB$$

mit $A, B \in V$ und $a \in \Sigma$ sind.

Deterministische endliche Automaten

Die informelle Kurzfassung:

- Endliche Automaten lesen zeichenweise ein Eingabewort
- wechseln dabei den Zustand (eindeutig)
- Nur endlich viele Zustände
- Starten im Startzustand
- Nach Lesen der Eingabe: Akzeptieren oder Verwerfen
- Akzeptieren = in einem Endzustand
- Verwerfen = in keinem Endzustand
- Akzeptierte Sprache = alle Wörter, für die der Automat akzeptiert

DFA: Definition

Definition (Deterministischer Endlicher Automat, DFA)

Ein deterministischer endlicher Automat (deterministic finite automaton, DFA) ist ein 5-Tupel

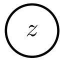
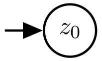
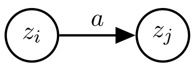
$$M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$$

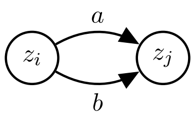
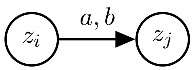
wobei

- Z ist eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet mit $(Z \cap \Sigma) = \emptyset$,
- $\delta : Z \times \Sigma \to Z$ ist die Zustandsüberführungsfunktion (oder Überführungsfunktion),
- $z_0 \in Z$ ist der Startzustand und
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände (oder auch akzeptierende Zustände).

Zustandsgraph eines DFA

Für DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$

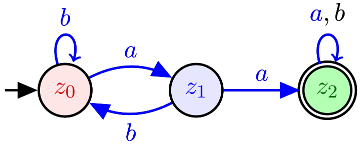
- Für $z \in Z$ gibt es Knoten 
- Startzustand $z_0 \in Z$: eingehender Pfeil ,
- Endzustände $z \in E$: doppelte Kreise ,
- Übergänge $\delta(z_i, a) = z_j$ als Kante 

  und statt  zeichnen wir .

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{array}{ll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, b) = z_0 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Akzeptierte Spraches eines DFA

Definition (Akzeptierte Sprache eines DFA)

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA.
Wir definieren die Funktion $\widehat{\delta} : Z \times \Sigma^* \to Z$ durch

$$\widehat{\delta}(z, \varepsilon) := z \quad \text{und} \quad \widehat{\delta}(z, aw) := \widehat{\delta}(\delta(z, a), w)$$

Die von M **akzeptierte Sprache** ist

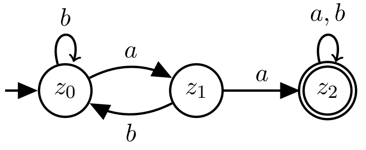
$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(z_0, w) \in E\}.$$

$\widehat{\delta}$ wendet δ solange an, bis das Eingabewort abgearbeitet ist

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

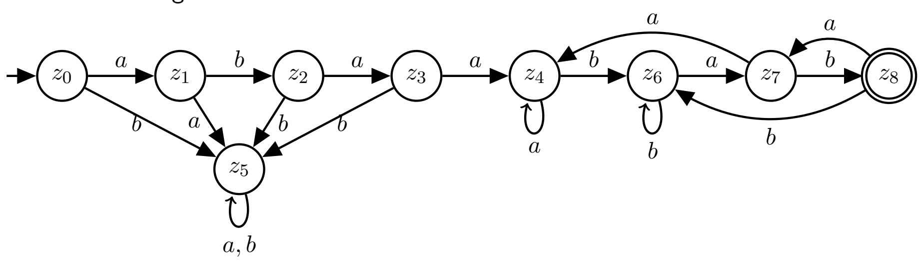
$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



$$L(M) = \{uaav \mid uv \in \{a, b\}^*\}$$

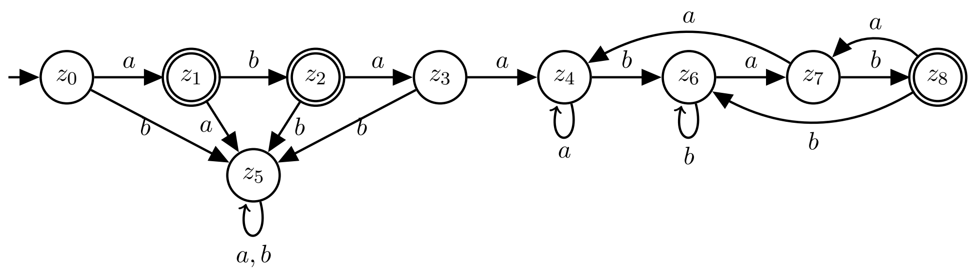
Beispiel: DFA konstruieren

Konstruiere DFA über $\Sigma = \{a, b\}$, der alle Worte akzeptiert,
die mit $abaa$ beginnen und mit bab enden:



Beispiel: DFA konstruieren (2)

Zusätzlich die Wörter a und ab akzeptieren



Lauf

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $w \in \Sigma^*$ mit $|w| = n$.

Die Folge von Zuständen $q_0, \dots, q_n$ mit $q_0 = z_0$ und $q_i = \delta(q_{i-1}, w[i])$

bezeichnet man als **Lauf** von M für Wort w.

Für einen solchen Lauf schreiben wir auch:

$$q_0 \xrightarrow{w[1]} q_1 \xrightarrow{w[2]} \cdots \xrightarrow{w[n-1]} q_{n-1} \xrightarrow{w[n]} q_n$$

Beispiele für Läufe

$M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_0\})$ mit

δ	a	b
z_0	z_1	z_0
z_1	z_2	z_1
z_2	z_0	z_2

Lauf für Wort $abbaaabba$:

$$z_0 \xrightarrow{a} z_1 \xrightarrow{b} z_1 \xrightarrow{b} z_1 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{a} z_0 \xrightarrow{a} z_1 \xrightarrow{b} z_1 \xrightarrow{b} z_1 \xrightarrow{a} z_2$$

Lauf für Wort $bbababa$:

$$z_0 \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{a} z_1 \xrightarrow{b} z_1 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{b} z_2 \xrightarrow{a} z_0$$