Chomsky-Grammatiken: Abschlusseigenschaften, Entscheidungsprobleme

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 3. Mai 2022

Wiederholung: Definition einer Grammatik

Definition (Grammatik)

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

- V ist eine endliche Menge von Variablen
  (alternativ Nichtterminale, Nichtterminalsymbole)
- Σ (mit $V \cap \Sigma = \emptyset$) ist ein Alphabet von Zeichen
  (alternativ Terminale, Terminalsymbole)
- P ist eine endliche Menge von Produktionen von der Form $\ell \to r$ wobei $\ell \in (V \cup \Sigma)^+$ und $r \in (V \cup \Sigma)^*$
  (alternativ Regeln)
- $S \in V$ ist das Startsymbol
  (alternativ Startvariable)

Oft genügt es, P alleine zu notieren
(wenn klar ist, was Variablen, Zeichen und Startsymbol sind)

Wiederholung: Die Chomsky-Hierarchie

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

G ist vom Typ 0

G ist automatisch vom Typ 0.

G ist vom Typ 1 (kontextsensitive Grammatik), wenn ...

für alle $(\ell \to r) \in P$: $|\ell| \leq |r|$.

G ist vom Typ 2 (kontextfreie Grammatik), wenn ...

G ist vom Typ 1 und für alle $(\ell \to r) \in P$ gilt: $\ell = A \in V$

G ist vom Typ 3 (reguläre Grammatik), wenn ...

G ist vom Typ 2 und für alle $(A \to r) \in P$ gilt: $r = a$ oder $r = aA'$ für $a \in \Sigma, A' \in V$
(die rechten Seiten sind Worte aus $(\Sigma \cup (\Sigma V))$)

Kontextfrei vs. kontextsensitiv

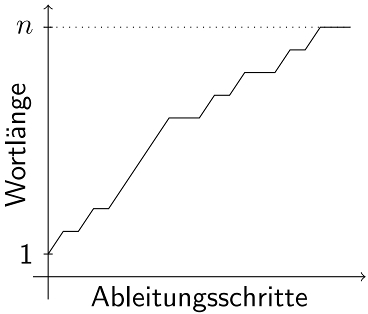
- Kontextfreie Produktionen $A \to r$ sind immer auf ein Vorkommen von A anwendbar.
- Kontextsensitive Produktionen können solche Ersetzungen

  auf einen Kontext einschränken

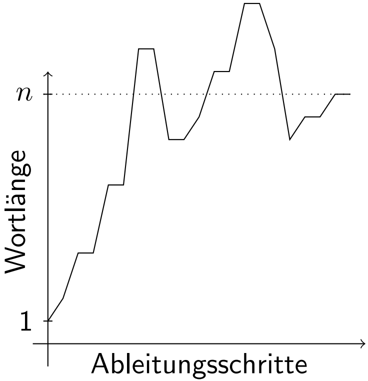
  und erlauben Regeln $uAv \to urv$, die die Ersetzung von A durch r nur erlauben, wenn A durch u und v umrahmt ist.

Typ 0 vs. Typ 1

Ableitung eines Wortes der Länge n



mit Typ 1-Grammatik



mit Typ 0-Grammatik

Syntaxbäume

Definition (Syntaxbaum)

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Typ 2-Grammatik und

$$S \Rightarrow w_0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$$

eine Ableitung von $w_n \in \Sigma^*$.

Der **Syntaxbaum** zur Ableitung wird wie folgt erstellt:

- Die Wurzel des Baums ist mit S markiert.
- Wenn $w_i \Rightarrow w_{i+1}$, $w_i = uAv$ und $w_{i+1} = urv$ (Produktion $A \to r$ verwendet), dann erzeuge im Syntaxbaum $|r|$ viele Knoten als Kinder des mit A markierten Knotens. Markiere die Kinder mit den Symbolen aus r (in der Reihenfolge von links nach rechts).

Die Blätter sind daher genau mit dem Wort w_n markiert.

Syntaxbäume bei Typ 3-Grammatiken

Sind immer Listenartig:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
S \arrow[d] \arrow[dr] & & & & & \\
a_1 & A_1 \arrow[d] \arrow[dr] & & & & \\
& a_2 & A_2 \arrow[d] \arrow[dr] & & & \\
& & a_3 & A_3 \arrow[dr, dotted, no head] & & \\
& & & & A_{n-1} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
& & & & a_n & A_n \arrow[d] \\
& & & & & a_{n+1}
\end{tikzcd}
$$

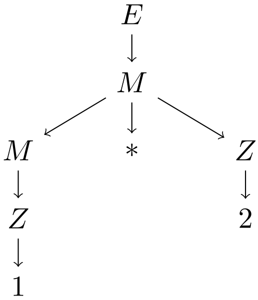
Beispiel

$$G = (\{E, M, Z\}, \{+, *, 1, 2, (,)\}, P, E) \text{ mit}$$
$$P = \{E \to M,\ \ E \to E + M,\ \ M \to Z,\ \ M \to M * Z,$$
$$Z \to 1,\ \ Z \to 2,\ \ Z \to (E)\}$$

Beide Ableitungen:

- $E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow 1 * Z \Rightarrow 1 * 2$ und
- $E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow M * 2 \Rightarrow Z * 2 \Rightarrow 1 * 2$

haben **denselben** Syntaxbaum.



Links- und Rechtsableitungen

- **Linksableitung**: Ersetze immer das linkeste Nichtterminal der Satzform.
- **Rechtsableitung**: Ersetze immer das rechteste Nichtterminal der Satzform.

Beispiele:

$$\begin{aligned} E &\Rightarrow E + M \\ &\Rightarrow M + M \\ &\Rightarrow M * Z + M \\ &\Rightarrow Z * Z + M \\ &\Rightarrow 1 * Z + M \\ &\Rightarrow 1 * 2 + M \\ &\Rightarrow 1 * 2 + Z \\ &\Rightarrow 1 * 2 + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &\Rightarrow E + M \\ &\Rightarrow E + Z \\ &\Rightarrow E + 3 \\ &\Rightarrow M + 3 \\ &\Rightarrow M * Z + 3 \\ &\Rightarrow M * 2 + 3 \\ &\Rightarrow Z * 2 + 3 \\ &\Rightarrow 1 * 2 + 3 \end{aligned}$$

Links- und Rechtsableitungen (2)

Satz

Sei G eine Typ 2-Grammatik und $w \in L(G)$. Dann gibt es eine Linksableitung (und eine Rechtsableitung) von w.

Beweis:

- Da $w \in L(G)$, gibt es irgendeine Ableitung von w.
- Konstruiere Syntaxbaum zu dieser Ableitung.
- Lese Links- bzw. Rechtsableitung am Syntaxbaum ab.

Wiederholung: ε-Regel für Typ 1,2,3-Grammatiken

- Das leere Wort ε kann bisher nicht für Typ 1,2,3 Grammatiken erzeugt werden:

  Produktion $S \to \varepsilon$ erfüllt die Typ 1-Bedingung $|S| \leq |\varepsilon|$ nicht.

Wiederholung: ε-Regel für Typ 1,2,3-Grammatiken

- Das leere Wort ε kann bisher nicht für Typ 1,2,3 Grammatiken erzeugt werden:

  Produktion $S \to \varepsilon$ erfüllt die Typ 1-Bedingung $|S| \leq |\varepsilon|$ nicht. Daher Sonderregel:

ε-Regel für Typ 1-Grammatiken

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ 1 darf eine Produktion $(S \to \varepsilon) \in P$ enthalten, vorausgesetzt, dass keine rechte Seite einer Produktion in P, die Variable S enthält.

Sonderregel erlaubt nicht:

$$G = (\{S\}, \{a\}, \{S \to \varepsilon, S \to aSa\}, S)$$

Sonderregel erlaubt:

$$G = (\{S', S\}, \{a\}, \{S' \to \varepsilon, S' \to aSa, S' \to aa, S \to aSa, S \to aa\}, S')$$

Wiederholung: ε-Regel für Typ 2,3-Grammatiken

ε-Produktionen für Typ 2- und Typ 3-Grammatiken

In Grammatiken des Typs 2 und des Typs 3 erlauben wir Produktionen der Form $A \to \varepsilon$ (sogenannte ε-Produktionen).

Grund:

Man kann diese Grammatiken umformen, sodass sie ihren Typ behalten und die obige stärkere Bedingung erfüllen

Backus-Naur-Form

Erweiterte Backus-Naur-Form (EBNF)

Für Typ 2-Grammatiken erlauben wir abkürzende Schreibweise für die Menge der Produktionen P:

1. Statt $A \to w_1, A \to w_2, \ldots A \to w_n$ schreiben wir auch $A \to w_1 \mid w_2 \mid \ldots \mid w_n$
2. Die Schreibweise $A \to u[v]w$ steht für die beiden Produktionen $A \to uvw$ und $A \to uw$ (d. h. $[v]$ meint, dass v optional ist).
3. Die Schreibweise $A \to u\{v\}w$ steht für $A \to uw$ oder $A \to uBw$ mit $B \to v \mid vB$ (d. h. $\{v\}$ meint, dass v beliebig oft wiederholt werden kann).

Grammatiken, die diese Notation verwenden, nennen wir auch Grammatiken in erweiterter Backus-Naur-Form (EBNF)

Chomsky-Hierarchie: Teilmengenbeziehungen

Aus der Definition der Typ i-Sprachen folgt:

$$\text{Typ 3-Sprachen} \subseteq \text{Typ 2-Sprachen} \subseteq \text{Typ 1-Sprachen} \subseteq \text{Typ 0-Sprachen}$$

Chomsky-Hierarchie: Teilmengenbeziehungen

Aus der Definition der Typ i-Sprachen folgt:

$$\text{Typ 3-Sprachen} \subseteq \text{Typ 2-Sprachen} \subseteq \text{Typ 1-Sprachen} \subseteq \text{Typ 0-Sprachen}$$

Es gilt sogar:

$$\text{Typ 3-Sprachen} \subset \text{Typ 2-Sprachen} \subset \text{Typ 1-Sprachen} \subset \text{Typ 0-Sprachen}$$

Chomsky-Hierarchie: Teilmengenbeziehungen

Aus der Definition der Typ i-Sprachen folgt:

$$\text{Typ 3-Sprachen} \subseteq \text{Typ 2-Sprachen} \subseteq \text{Typ 1-Sprachen} \subseteq \text{Typ 0-Sprachen}$$

Es gilt sogar:

$$\text{Typ 3-Sprachen} \subset \text{Typ 2-Sprachen} \subset \text{Typ 1-Sprachen} \subset \text{Typ 0-Sprachen}$$

Trennende Beispiele sind (Beweise folgen im Laufe der Vorlesung):

- $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist von Typ 2, aber nicht von Typ 3
- $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist von Typ 1, aber nicht von Typ 2.
- $H = \{w\$x \mid \text{Turingmaschine } M_w \text{ hält für Eingabe } x\}$
  (das sogenannte Halteproblem) ist von Typ 0, aber nicht von Typ 1.

Beachte: Es gibt auch Sprachen, die nicht Typ 0 sind:
Das Komplement von H ist eine solche Sprache.

Abgeschlossenheit von Sprachen

Eine Klasse $\mathcal{L}$ von Sprachen (d.h. eine Menge von Mengen) heißt abgeschlossen bezüglich

- Vereinigung g.d.w. aus $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ folgt stets $(L_1 \cup L_2) \in \mathcal{L}$,
- Schnittbildung g.d.w. aus $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ folgt stets $(L_1 \cap L_2) \in \mathcal{L}$,
- Komplementbildung g.d.w. aus $L \in \mathcal{L}$ folgt stets $\overline{L} \in \mathcal{L}$ und
- Produktbildung g.d.w. aus $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ folgt stets $(L_1 L_2) \in \mathcal{L}$.

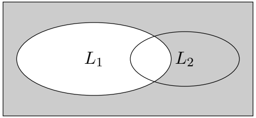
Wir werden im Laufe der Vorlesung untersuchen, ob die Typ i-Sprachen abgeschlossen bezüglich obiger Operationen sind

Abgeschlossenheit: Eigenschaften

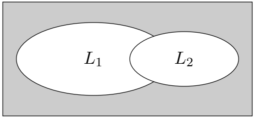
Satz

Sei die Klasse von Sprachen $\mathcal{L}$ abgeschlossen bez. Komplementbildung. Dann ist $\mathcal{L}$ abgeschlossen bez. Schnittbildung genau dann, wenn $\mathcal{L}$ abgeschlossen bez. Vereinigung ist.

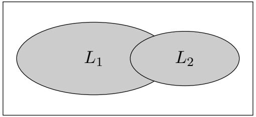
Das gilt, da: $L_1 \cup L_2 = \overline{\overline{L_1} \cap \overline{L_2}}$ und $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$



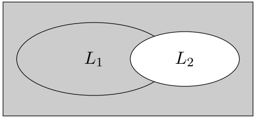
$\overline{L_1}$



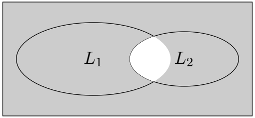
$\overline{L_1} \cap \overline{L_2}$



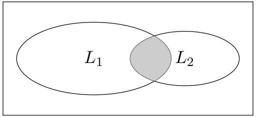
$\overline{\overline{L_1} \cap \overline{L_2}}$



$\overline{L_2}$



$\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$



$\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

Entscheidbarkeit

Entscheidbarkeit

Eine Sprache heißt **entscheidbar**, wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe der Grammatik G und einem Wort w in endlicher Zeit feststellt, ob $w \in L(G)$ gilt oder nicht.

Man spricht auch von der Entscheidbarkeit des Wortproblems!

Entscheidbarkeit

Entscheidbarkeit

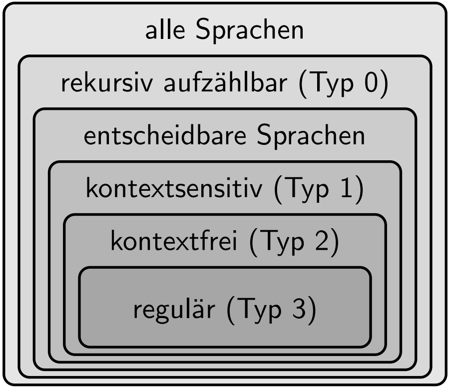
Eine Sprache heißt **entscheidbar**, wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe der Grammatik G und einem Wort w in endlicher Zeit feststellt, ob $w \in L(G)$ gilt oder nicht.

Man spricht auch von der Entscheidbarkeit des Wortproblems!

Eigenschaften der Typ i-Sprachen:

- Alle Typ 1, 2, 3-Sprachen sind **entscheidbar**.
- Es gibt Typ 0-Sprachen, die **nicht entscheidbar** sind.
- Alle Typ 0-Sprachen sind semi-entscheidbar (rekursiv aufzählbar):
  Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe der Grammatik G und einem Wort $w \in G$ in endlicher Zeit feststellt, dass $w \in L(G)$ gilt, und bei einem Wort $w \notin G$ entweder feststellt, dass $w \notin L(G)$ gilt, **oder nicht-terminiert.**

Übersicht über die Sprachen



- Die Menge der Typ 0-Grammatiken ist abzählbar (jede Grammatik hat eine endliche Beschreibung, d.h. Grammatiken können der Größe nach aufgezählt werden)
- Menge aller Sprachen $= \mathcal{P}(\Sigma^*)$ ist überabzählbar!

Weitere Entscheidungsprobleme

Leerheitsproblem

Das Leerheitsproblem für Sprachen vom Typ i ist die Frage, ob für eine Typ i-Grammatik G, die Gleichheit $L(G) = \emptyset$ gilt.

Endlichkeitsproblem

Das Endlichkeitsproblem für Sprachen vom Typ i ist die Frage, ob für eine Typ i-Grammatik G die Ungleichheit $|L| < \infty$ gilt.

Schnittproblem

Das Schnittproblem für Sprachen vom Typ i ist die Frage, ob für Typ i-Grammatiken G_1, G_2 gilt: $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$.

Äquivalenzproblem

Das Äquivalenzproblem für Sprachen vom Typ i ist, die Frage, ob Typ i-Grammatiken G_1, G_2 gilt: $L(G_1) = L(G_2)$.

Typ i-Sprachen aus praktischer Sicht

Aus informatischer Sicht:

- Typ 2- und Typ 3-Sprachen sind wichtig im Rahmen des Compilerbau (lexikalische bzw. syntaktische Analyse)
- Viele Fragestellungen sind jedoch kontextsensitiv oder Typ 0.
- Praktisches Vorgehen: Typ 2-Sprache plus Nebenbedingungen, z.B. Syntax als kontextfreie Grammatik aber noch Nebenbedingungen, dass alle Variablen deklariert wurden usw.