# FSK & TIMI
# Begrüßung, Organisatorisches, Inhaltsübersicht und Grundlagen

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 26. April 2022

# Personen

- **Dozent:**
  Prof. Dr. David Sabel
  Email: david.sabel@ifi.lmu.de
- **Wissenschaftliche Mitarbeiter:innen:**
  Sarah Vaupel
  Stephan Barth
- **Tutor:inn:en und Korrektor:inn:en:**
  Charlotte Gerhaher
  David Mosbach
  Elisabeth Lempa
  Elisabeth Schwertfellner
  Lea Korn
  Luca Maio
  Lukas Bartl
  Michael Fink Amores
  Simon Rossmair
  Thomas Grill

# Zielgruppe der Veranstaltung (Hörerkreis)

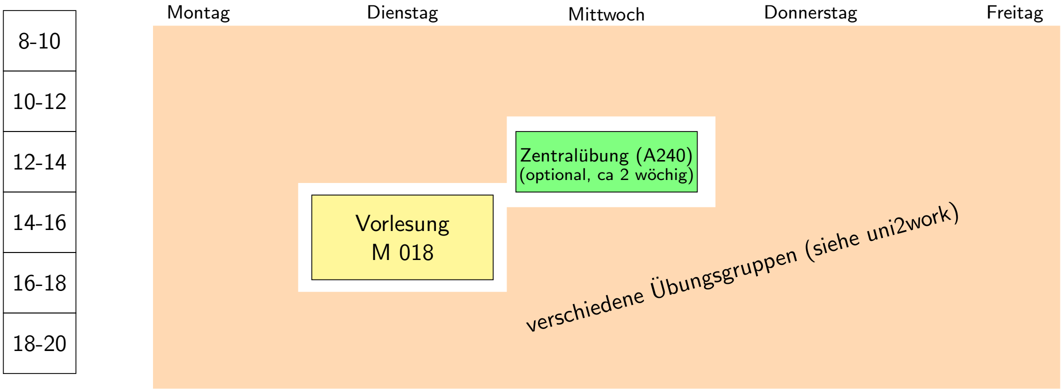
**Formale Sprachen und Komplexität [FSK]:**

- Studierende der Informatik
- Studierende der Bioinformatik
- Studierende im Lehramt
- Studierende im Nebenfach Informatik

**Theoretische Informatik für Medieninformatiker [TIMI]:**

- Studierende der Medieninformatik

# Struktur der Veranstaltung




- **Vorlesung:** FSK: 3V, TIMI 2V (integriert, Plan auf Webseite)
- **Digitale Alternative**: ScreenCasts aus dem SoSe 2021
- **Zentralübung:** Zusatzangebot, Fragestunde & Beispiele (Plan auf Webseite) **Raum A 240**
- **Übungen:** präsenz oder online; Besprechung der Hausaufgaben; FSK: 2Ü, TIMI: 1Ü

# Webseiten

**Webseiten zu den Veranstaltungen:**

**www.tcs.ifi.lmu.de/lehre/ss-2022/fsk** und **www.tcs.ifi.lmu.de/lehre/ss-2022/timi**

**Anmeldung im Uni2Work:**

- **uni2work.ifi.lmu.de/course/S22/IfI/FSK**
- **uni2work.ifi.lmu.de/course/S22/IfI/TIMI**

Anmeldung ist **notwendig** für:

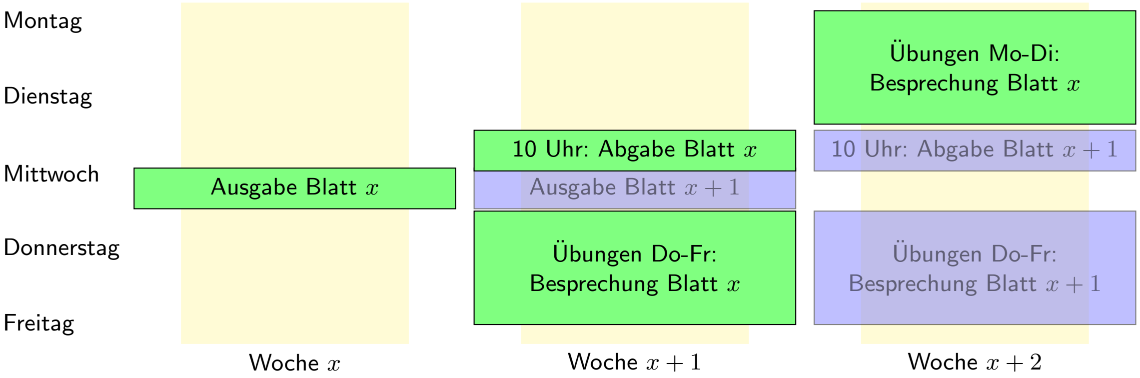
- Zugriff auf Material, Abgabe & Korrektur der Hausaufgaben
- Anmeldung zu den Übungsterminen
- Anmeldung zur Prüfung (noch nicht online)

**Zulip-Chat**

- Server-Adresse: **chat.ifi.lmu.de**
- Stream: **TCS-22S-FSK-TIMI**

Fragen und Kommentare am besten dort stellen.

# Hausaufgaben




- Übungen diese Woche ab Donnerstag: Kennenlernen+Besprechung Blatt 0 (ohne Abgabe)
- Ausgabe, Abgabe und Korrektur elektronisch über Uni2Work
- Prüfungsbonus für erfolgreiches Bearbeiten der Aufgaben

# Korrektur und Bonuspunkte

- Ausgewählte Hausaufgaben werden bepunktet
- Für jede Lösung zu einer bepunkteten Aufgabe gibt es 0 oder 1 oder 2 Punkte

**Bonusregelung (gilt für Prüfung und Nachholprüfung im SoSe 2022):**

100% der erreichbaren Übungspunkte entsprechen 10% der Prüfungspunkte

$$\textbf{Prüfungsbonus} = \frac{\text{erreichte Übungpunkte}}{\text{maximale Übungspunkte}} \cdot 0{,}1 \cdot \text{maximale Prüfungspunkte}$$

**wenn** die Prüfung bestanden ist (Bonuspunkte helfen nicht zum Bestehen)

Die Prüfung ist auf jeden Fall bestanden,
wenn 50% der Prüfungspunkte erreicht wurden.

# Prüfungen

- **Plan (beantragt, noch nicht bestätigt):**
  Erstklausur am 17.08.2022 und Nachklausur am 21.09.2022
- Anmeldung zur Prüfung wird noch freigeschaltet
- Bonuspunkte gelten für Prüfung und Nachprüfung
- Teilnahme an der Nachholprüfung auch ohne Teilnahme an der Prüfung möglich

# Material

- Vorlesungsfolien
- Skript zur Vorlesung (wird nach und nach bereit gestellt):
  Markierungen mit $\star$ für nicht-TIMI-relevante Teile
- ScreenCasts zur Vorlesung (aus SoSe 2021)
- Lehrbuch: Uwe Schöning, Theoretische Informatik – Kurz gefasst
- Hausaufgaben (Übungsblätter im Uni2Work)

# Literatur

**Wesentliche Quellen:**

- Vorlesungsskript
- Uwe Schöning: Theoretische Informatik - kurz gefasst, 5. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, 2008 (ältere Auflagen sind auch in Ordnung)
  *Teile sind u.U. zu kurz gefasst*

**Weitere Literatur:**

- Alexander Asteroth und Christel Baier: Theoretische Informatik, Pearson Studium 2002.
  *Gutes Buch, Aufbau in anderer Reihenfolge, Zugriff über UB*
- John E. Hopcroft, Rajeev Motwani und Jeffrey D. Ullman: Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation, 3. Auflage, 2006
  *Der Klassiker, umfangreich (Erstauflage 1979!)*
- Ingo Wegener: Theoretische Informatik - eine algorithmenorientierte Einführung, 3.Auflage, Teubner Verlag, 2005.
  *Gutes Buch, andere Reihenfolge, Algorithmen stehen im Vordergrund, Zugriff über UB*

# Inhaltsübersicht über die Veranstaltung

# Inhalte der Veranstaltung

Drei große wesentliche Themen der **Theoretischen Informatik**:

1. Formale Sprachen und Automatentheorie
   *Wie stellt man Entscheidungsprobleme formal dar?*

2. Berechenbarkeitstheorie
   *Welche Probleme kann man algorithmisch*
   *(bzw. mit dem Computer) überhaupt lösen?*

3. Komplexitätstheorie
   *Welche Probleme kann man in annehmbarer Zeit lösen?*

# Inhalte: Formale Sprachen und Automatentheorie

- Chomsky-Grammatiken und Chomsky-Hierarchie
- Das Wortproblem und weitere Entscheidungsprobleme
- Reguläre Sprachen: reguläre Grammatiken, deterministische endliche Automaten, nichtdeterministische endliche Automaten, $\varepsilon$-Übergänge, reguläre Ausdrücke, Äquivalenz der Formalismen, Pumpinglemma, Satz von Myhill-Nerode, Minimalautomaten, Abschlusseigenschaften
- Kontextfreie Sprachen: kontextfreie Grammatiken, Chomsky-Normalform, Greibach-Normalform, Pumpinglemma, Ogden's Lemma, Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, Kellerautomaten, Abschlusseigenschaften
- Kontextsensitive Sprachen und Typ 0-Sprachen: kontextsensitive Grammatiken, Kuroda-Normalform, Turingmaschinen, Linear bounded automata (LBA), LBA-Probleme

TIMI: Zum Teil nur Auswahl der Inhalte / oberflächlichere Behandlung !

# Inhalte: Berechenbarkeitstheorie

- Intuitive Berechenbarkeit, Churchsche These
- Turing-Berechenbarkeit, Varianten von Turingmaschinen (z.B. Mehrbandmaschinen)
- LOOP-, WHILE-, GOTO-Berechenbarkeit: LOOP-Programme WHILE-Programme, GOTO-Programme, Äquivalenz zu Turingmaschinen
- Primitiv-rekursive Funktionen, Ackermannfunktion, mu-Rekursion
- Halteproblem, Unentscheidbarkeit
- Rekursiv aufzählbar
- Reduktionen
- Postsches Korrespondenzproblem

TIMI: Zum Teil nur Auswahl der Inhalte / oberflächlichere Behandlung !

# Inhalte: Komplexitätstheorie

- Zeitkomplexität
- Klassen P und NP
- NP-Härte, NP-Vollständigkeit
- polynomielle Reduktionen
- das SAT-Problem
- Satz von Cook
- weitere NP-vollständige Probleme (z.B. 3-SAT, Clique, Vertex Cover, Subset Sum, Knapsack, Directed Hamilition Circuit, Hamilition Circuit,. . . )

TIMI: Zum Teil nur Auswahl der Inhalte / oberflächlichere Behandlung !

# Grundlagen: Worte und Formale Sprachen

# Worte

**Alphabet**

Ein Alphabet $\Sigma$ ist eine endliche nicht-leere Menge von Zeichen (oder Symbolen).

Z.B. $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$

**Wort**

Ein Wort $w$ über $\Sigma$ ist eine endliche Folge von Zeichen aus $\Sigma$.

Beispiele:

- $bade$ ist ein Wort über $\{a, b, c, d, e\}$
- $baden$ ist kein Wort über $\{a, b, c, d, e\}$

# Weitere Notationen zu Worten

- Das leere Wort wird als $\varepsilon$ notiert.
- Für $w = a_1 \cdots a_n$ ist $|w| = n$ die Länge des Wortes
- Für $1 \leq i \leq |w|$ ist $w[i]$ das Zeichen an $i$. Position in $w$.
- Für $a \in \Sigma$ und $w$ ein Wort über $\Sigma$ sei $\#_a(w) \in \mathbb{N}$ die Anzahl an Vorkommen des Zeichens $a$ im Wort $w$

Beispiele:

- Es gilt $|\varepsilon| = 0$ und $\#_a(\varepsilon) = 0$ für alle $a \in \Sigma$.
- Für $\Sigma = \{a, b, c\}$ ist
  - $|abbccc| = 6$
  - $|aabbbccc| = 8$
  - $\#_a(abbccc) = 1$
  - $\#_c(aabbbccc) = 3$
- Für $w = abbbcd$ ist $w[1] = a$, $w[5] = c$ und $w[7]$ undefiniert.

# Konkatenation und Kleene-Stern

**Konkatenation**

Das Wort $uv$ (alternativ $u \circ v$) entsteht, indem Wort $v$ hinten an Wort $u$ angehängt wird.

$\Sigma^*$ bezeichnet die Menge aller Wörter über $\Sigma$:

**Definition von $\Sigma^i, \Sigma^*, \Sigma^+$**

Sei $\Sigma$ ein Alphabet, dann definieren wir:

$$\begin{array}{rcl} \Sigma^0 & := & \{\varepsilon\} \\ \Sigma^i & := & \{aw \mid a \in \Sigma, w \in \Sigma^{i-1}\} \text{ für } i > 0 \\ \Sigma^* & := & \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma^i \\ \Sigma^+ & := & \bigcup_{i \in \mathbb{N}_{>0}} \Sigma^i \end{array}$$

Beachte: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $\mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, \ldots\}$

# Beispiele

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

Dann ist

$\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$
$\Sigma^1 = \Sigma = \{a, b\}$
$\Sigma^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$
$\Sigma^3 = \{\mathsf{x}w \mid \mathsf{x} \in \{a, b\}, w \in \Sigma^2\} = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$
$\ldots$

und

$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, aaaa, \ldots\}$

# Beispiele

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

Dann ist

$\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$
$\Sigma^1 = \Sigma = \{a, b\}$
$\Sigma^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$
$\Sigma^3 = \{\mathsf{x}w \mid \mathsf{x} \in \{a, b\}, w \in \Sigma^2\} = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$
$\ldots$
und
$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, aaaa, \ldots\}$

# Beispiele

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

Dann ist

$\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$
$\Sigma^1 = \Sigma = \{a, b\}$
$\Sigma^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$
$\Sigma^3 = \{\mathsf{x}w \mid \mathsf{x} \in \{a, b\}, w \in \Sigma^2\} = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$
$\ldots$

und

$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, aaaa, \ldots\}$

# Beispiele

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

Dann ist

$$\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$$
$$\Sigma^1 = \Sigma = \{a, b\}$$
$$\Sigma^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$$
$$\Sigma^3 = \{\mathsf{x}w \mid \mathsf{x} \in \{a, b\}, w \in \Sigma^2\} = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$$

$\ldots$

und

$$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, aaaa, \ldots\}$$

# Beispiele

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

Dann ist

$$\begin{aligned}
\Sigma^0 &= \{\varepsilon\} \\
\Sigma^1 &= \Sigma = \{a, b\} \\
\Sigma^2 &= \{aa, ab, ba, bb\} \\
\Sigma^3 &= \{\mathsf{x}w \mid \mathsf{x} \in \{a, b\}, w \in \Sigma^2\} = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}
\end{aligned}$$

$\ldots$

und

$$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, aaaa, \ldots\}$$

# Beispiele

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

Dann ist

$$\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$$
$$\Sigma^1 = \Sigma = \{a, b\}$$
$$\Sigma^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$$
$$\Sigma^3 = \{\mathsf{x}w \mid \mathsf{x} \in \{a, b\}, w \in \Sigma^2\} = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$$

$\ldots$

und

$$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, aaaa, \ldots\}$$

# Weitere Notationen und Begriffe

Sei $w$ ein Wort über $\Sigma$

- $w^m$ entsteht aus $m$-maligen Konkatenieren von $w$, d.h.

$$w^0 = \varepsilon \text{ und } w^m = ww^{m-1} \text{ für } m > 0$$

- $\overline{w}$ ist das rückwärts gelesene Wort $w$, d.h.

$$\overline{\varepsilon} = \varepsilon \text{ und für } w = a_1 \cdots a_n \text{ ist } \overline{w} = a_n a_{n-1} \cdots a_1$$

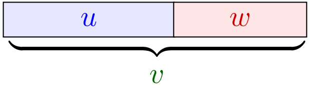
- $w$ ist ein Palindrom g.d.w. $w = \overline{w}$

Beispiele für Palindrome: anna, reliefpfeiler, lagerregal, annasusanna

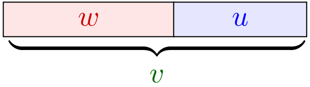
# Sprechweisen: Präfix, Suffix, Teilwort

Seien $u, v$ Wörter über einem Alphabet $\Sigma$.

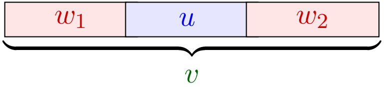
- $u$ ist ein **Präfix** von $v$, wenn es ein Wort $w$ gibt mit $uw = v$.




- $u$ ist ein **Suffix** von $v$, wenn es ein Wort $w$ gibt mit $wu = v$.




- $u$ ist ein **Teilwort** von $v$, wenn es Wörter $w_1, w_2$ gibt mit $w_1 u w_2 = v$.




Beispiel: Sei $w = ababbaba$

- $aba$ ist ein Präfix, Suffix und Teilwort von $w$
- $ababb$ ist ein Präfix (und Teilwort) von $w$, aber kein Suffix von $w$
- $bab$ ist Teilwort von $w$, aber weder ein Präfix noch ein Suffix

# Formale Sprache

**Formale Sprache**

Eine (formale) Sprache $L$ über dem Alphabet $\Sigma$ ist eine Teilmenge von $\Sigma^*$ d.h. $L \subseteq \Sigma^*$

Beachte: Wir verwenden $L$ für „language“.

# Formale Sprache

**Formale Sprache**

Eine (formale) Sprache $L$ über dem Alphabet $\Sigma$ ist eine Teilmenge von $\Sigma^*$ d.h. $L \subseteq \Sigma^*$

Beachte: Wir verwenden $L$ für „language“.

**Operationen auf formalen Sprachen**

Seien $L$, $L_1$, $L_2$ formale Sprachen über $\Sigma$

- Vereinigung: $L_1 \cup L_2 := \{w \mid w \in L_1 \text{ oder } w \in L_2\}$
- Schnitt: $L_1 \cap L_2 := \{w \mid w \in L_1 \text{ und } w \in L_2\}$
- Komplement zu $L$: $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$
- Produkt: $L_1 L_2 = L_1 \circ L_2 = \{uv \mid u \in L_1 \text{ und } v \in L_2\}$

# Beispiele

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L_1 = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ $L_2 = \{b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

- $L_1 \cup L_2 =$ ?
- $L_1 \cap L_2 =$ ?
- $\overline{L_1} =$ ?
- $L_1 L_2 =$ ?
- $L_2 L_1 =$ ?
- $L_1 L_1 =$ ?

# Beispiele

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L_1 = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ $L_2 = \{b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

- $L_1 \cup L_2 =$ Sprache aller Wörter, die nur aus $a$'s oder nur aus $b$'s bestehen
- $L_1 \cap L_2 =$ ?
- $\overline{L_1} =$ ?
- $L_1 L_2 =$ ?
- $L_2 L_1 =$ ?
- $L_1 L_1 =$ ?

# Beispiele

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L_1 = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ $L_2 = \{b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

- $L_1 \cup L_2 =$ Sprache aller Wörter, die nur aus $a$'s oder nur aus $b$'s bestehen
- $L_1 \cap L_2 = \{\varepsilon\}$
- $\overline{L_1} =$ ?
- $L_1 L_2 =$ ?
- $L_2 L_1 =$ ?
- $L_1 L_1 =$ ?

# Beispiele

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L_1 = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ $L_2 = \{b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

- $L_1 \cup L_2 =$ Sprache aller Wörter, die nur aus $a$'s oder nur aus $b$'s bestehen
- $L_1 \cap L_2 = \{\varepsilon\}$
- $\overline{L_1} =$ Sprache der Worte, die mindestens ein $b$ enthalten
- $L_1 L_2 =$ ?
- $L_2 L_1 =$ ?
- $L_1 L_1 =$ ?

# Beispiele

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L_1 = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ $L_2 = \{b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

- $L_1 \cup L_2 =$ Sprache aller Wörter, die nur aus $a$'s oder nur aus $b$'s bestehen
- $L_1 \cap L_2 = \{\varepsilon\}$
- $\overline{L_1} =$ Sprache der Worte, die mindestens ein $b$ enthalten
- $L_1 L_2 = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 L_1 =$ ?
- $L_1 L_1 =$ ?

# Beispiele

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L_1 = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ $L_2 = \{b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

- $L_1 \cup L_2 =$ Sprache aller Wörter, die nur aus $a$'s oder nur aus $b$'s bestehen
- $L_1 \cap L_2 = \{\varepsilon\}$
- $\overline{L_1} =$ Sprache der Worte, die mindestens ein $b$ enthalten
- $L_1L_2 = \{a^ib^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$
- $L_2L_1 = \{b^ia^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$
- $L_1L_1 =$ ?

# Beispiele

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L_1 = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ $L_2 = \{b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

- $L_1 \cup L_2 =$ Sprache aller Wörter, die nur aus $a$'s oder nur aus $b$'s bestehen
- $L_1 \cap L_2 = \{\varepsilon\}$
- $\overline{L_1} =$ Sprache der Worte, die mindestens ein $b$ enthalten
- $L_1 L_2 = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 L_1 = \{b^i a^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$
- $L_1 L_1 = L_1$

Für $L_1 = \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$ und $L_2 = \{7, 8, 9, 10, J, D, K, A\}$ stellt $L_1 L_2$ eine Repräsentation der Spielkarten eines Skatblatts dar.

# Kleenescher Abschluss

Sei $L$ eine Sprache. Dann ist:

$$L^0 := \{\varepsilon\} \qquad\qquad L^* := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} L^i$$

$$L^i := L \circ L^{i-1} \text{ für } i > 0 \qquad\qquad L^+ := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_{>0}} L^i$$

Die Sprache $L^*$ nennt man auch den Kleeneschen Abschluss von $L$
benannt nach Stephen Cole Kleene (1909-1994).

# Kleenescher Abschluss

Sei $L$ eine Sprache. Dann ist:

$$L^0 := \{\varepsilon\} \qquad L^* := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} L^i$$

$$L^i := L \circ L^{i-1} \text{ für } i > 0 \qquad L^+ := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_{>0}} L^i$$

Die Sprache $L^*$ nennt man auch den Kleeneschen Abschluss von $L$ benannt nach Stephen Cole Kleene (1909-1994).

Beispiel: $L = \{ab, ac\}$

- $L^0 = \{\varepsilon\}$
- $L^1 = L \circ L^0 = L = \{ab, ac\}$
- $L^2 = \{abab, abac, acab, acac\}$
- $L^3 = \{ababab, ababac, abacab, abacac, acabab, acabac, acacab, acacac\}$
- $L^* = \{\varepsilon\} \cup \{ax_1ax_2 \cdots ax_i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, x_j \in \{b, c\}, j = 1, \ldots, i\}$.

# Kleenescher Abschluss

Sei $L$ eine Sprache. Dann ist:

$$L^0 := \{\varepsilon\} \qquad L^* := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} L^i$$

$$L^i := L \circ L^{i-1} \text{ für } i > 0 \qquad L^+ := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_{>0}} L^i$$

Die Sprache $L^*$ nennt man auch den Kleeneschen Abschluss von $L$ benannt nach Stephen Cole Kleene (1909-1994).

Beispiel: $L = \{ab, ac\}$

- $L^0 = \{\varepsilon\}$
- $L^1 = L \circ L^0 = L = \{ab, ac\}$
- $L^2 = \{abab, abac, acab, acac\}$
- $L^3 = \{ababab, ababac, abacab, abacac, acabab, acabac, acacab, acacac\}$
- $L^* = \{\varepsilon\} \cup \{ax_1ax_2 \cdots ax_i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, x_j \in \{b, c\}, j = 1, \ldots, i\}$.

# Kleenescher Abschluss

Sei $L$ eine Sprache. Dann ist:

$$L^0 := \{\varepsilon\} \qquad L^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i$$

$$L^i := L \circ L^{i-1} \text{ für } i > 0 \qquad L^+ := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_{>0}} L^i$$

Die Sprache $L^*$ nennt man auch den Kleeneschen Abschluss von $L$ benannt nach Stephen Cole Kleene (1909-1994).

Beispiel: $L = \{ab, ac\}$

- $L^0 = \{\varepsilon\}$
- $L^1 = L \circ L^0 = L = \{ab, ac\}$
- $L^2 = \{abab, abac, acab, acac\}$
- $L^3 = \{ababab, ababac, abacab, abacac, acabab, acabac, acacab, acacac\}$
- $L^* = \{\varepsilon\} \cup \{ax_1ax_2 \cdots ax_i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, x_j \in \{b, c\}, j = 1, \ldots, i\}$.

# Kleenescher Abschluss

Sei $L$ eine Sprache. Dann ist:

$$L^0 := \{\varepsilon\} \qquad L^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i$$

$$L^i := L \circ L^{i-1} \text{ für } i > 0 \qquad L^+ := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_{>0}} L^i$$

Die Sprache $L^*$ nennt man auch den Kleeneschen Abschluss von $L$ benannt nach Stephen Cole Kleene (1909-1994).

Beispiel: $L = \{ab, ac\}$

- $L^0 = \{\varepsilon\}$
- $L^1 = L \circ L^0 = L = \{ab, ac\}$
- $L^2 = \{abab, abac, acab, acac\}$
- $L^3 = \{ababab, ababac, abacab, abacac, acabab, acabac, acacab, acacac\}$
- $L^* = \{\varepsilon\} \cup \{ax_1 ax_2 \cdots ax_i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, x_j \in \{b, c\}, j = 1, \ldots, i\}$.

# Kleenescher Abschluss

Sei $L$ eine Sprache. Dann ist:

$$L^0 := \{\varepsilon\} \qquad\qquad L^* := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} L^i$$

$$L^i := L \circ L^{i-1} \text{ für } i > 0 \qquad\qquad L^+ := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_{>0}} L^i$$

Die Sprache $L^*$ nennt man auch den Kleeneschen Abschluss von $L$ benannt nach Stephen Cole Kleene (1909-1994).

Beispiel: $L = \{ab, ac\}$

- $L^0 = \{\varepsilon\}$
- $L^1 = L \circ L^0 = L = \{ab, ac\}$
- $L^2 = \{abab, abac, acab, acac\}$
- $L^3 = \{ababab, ababac, abacab, abacac, acabab, acabac, acacab, acacac\}$
- $L^* = \{\varepsilon\} \cup \{ax_1ax_2\cdots ax_i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, x_j \in \{b, c\}, j = 1, \ldots, i\}$.

# Kleenescher Abschluss

Sei $L$ eine Sprache. Dann ist:

$$L^0 := \{\varepsilon\} \qquad L^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i$$

$$L^i := L \circ L^{i-1} \text{ für } i > 0 \qquad L^+ := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_{>0}} L^i$$

Die Sprache $L^*$ nennt man auch den Kleeneschen Abschluss von $L$ benannt nach Stephen Cole Kleene (1909-1994).

Beispiel: $L = \{ab, ac\}$

- $L^0 = \{\varepsilon\}$
- $L^1 = L \circ L^0 = L = \{ab, ac\}$
- $L^2 = \{abab, abac, acab, acac\}$
- $L^3 = \{ababab, ababac, abacab, abacac, acabab, acabac, acacab, acacac\}$
- $L^* = \{\varepsilon\} \cup \{ax_1ax_2 \cdots ax_i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, x_j \in \{b, c\}, j = 1, \ldots, i\}$.

# Weitere Beispiele

$$((\{\varepsilon, 1\} \circ \{0, \dots, 9\}) \cup (\{2\} \circ \{0, 1, 2, 3\})) \circ \{:\} \circ \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \circ \{0, \dots, 9\}$$

Beschriebene Sprache = ?

$$\{0\} \cup (\{1, \dots, 9\} \circ \{0, \dots, 9\}^*)$$

Beschriebene Sprache = ?

# Weitere Beispiele

$$((\{\varepsilon, 1\} \circ \{0, \dots, 9\}) \cup (\{2\} \circ \{0, 1, 2, 3\})) \circ \{:\} \circ \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \circ \{0, \dots, 9\}$$

Beschriebene Sprache = Sprache aller gültigen Uhrzeiten

$$\{0\} \cup (\{1, \dots, 9\} \circ \{0, \dots, 9\}^*)$$

Beschriebene Sprache = ?

# Weitere Beispiele

$$((\{\varepsilon, 1\} \circ \{0, \dots, 9\}) \cup (\{2\} \circ \{0, 1, 2, 3\})) \circ \{:\} \circ \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \circ \{0, \dots, 9\}$$

Beschriebene Sprache $=$ Sprache aller gültigen Uhrzeiten

$$\{0\} \cup (\{1, \dots, 9\} \circ \{0, \dots, 9\}^*)$$

Beschriebene Sprache $=$ Sprache aller natürlichen Zahlen