GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

www.uni-frankfurt.de

Einführung in die Methoden der Künstlichen Intelligenz

Evolutionäre Algorithmen

PD Dr. David Sabel

SoSe 2014

Stand der Folien: 29. Mai 2023

Evolutionäre / Genetische Algorithmen

- **Anwendungsbereich:** Optimierung von Objekten mit komplexer Beschreibung
- **Objekte:** Üblicherweise kodiert als Bitfolgen mit fester Länge
- **Bewertungsfunktion** für die Objekte
- **Datenstruktur**: (Multi-)Menge von Objekten
- Arbeitsweise: Erzeuge aus Multimenge neue Multimenge
- entspricht daher paralleler Suche
- Stoppe wenn optimales Objekt in der Menge

Evolutionäre / Genetische Algorithmen (2)

Üblicherweise:

> Probleme mit sehr vielen Zuständen,
> daher unmöglich alle Zustände zu durchsuchen

Idee daher: Simulation der Evolution von Lebewesen

- gute Eigenschaften setzen sich durch
- andere sterben aus

Beispiel

Ziel: Züchte Schweine mit besonders großen Ohren

Beispiel

Ziel: Züchte Schweine mit besonders großen Ohren

Wiederhole bis Ohren groß genug

- Wähle Schweine aus aktueller Zucht mit den größten Ohren
- Paare diese Schweine

Beispiel

Ziel: Züchte Schweine mit besonders großen Ohren

Wiederhole bis Ohren groß genug

- Wähle Schweine aus aktueller Zucht mit den größten Ohren
- Paare diese Schweine

Hoffnung dabei: Eigenschaft „große Ohren“ setzt sich durch

Umsetzung für Evolutionäre Algorithmen

Eingaben

- Anfangspopulation:
  - Multimenge von Individuen (Chromosomen(-satz))
  - Ein Individuum: Bitstring
  - Teilfolge: Gen
- Fitnessfunktion (Bewertung für Individuen)

Algorithmus:

- Erzeuge iterativ nächste Generationen
- Mittels genetischer Operationen (Selektion, Mutation, Rekombination,...)
- höhere Fitness = mehr Nachkommen
- Erzeugung zufällig (mit Wahrscheinlichkeiten)

Ausgabe: Optimales Individuum

bzw. Individuum mit bester Fitness in Generation n

Genetische Operationen

Wahl der Anfangspopulation

- Möglichst breit (verschieden)
- Normalerweise: Zufällig

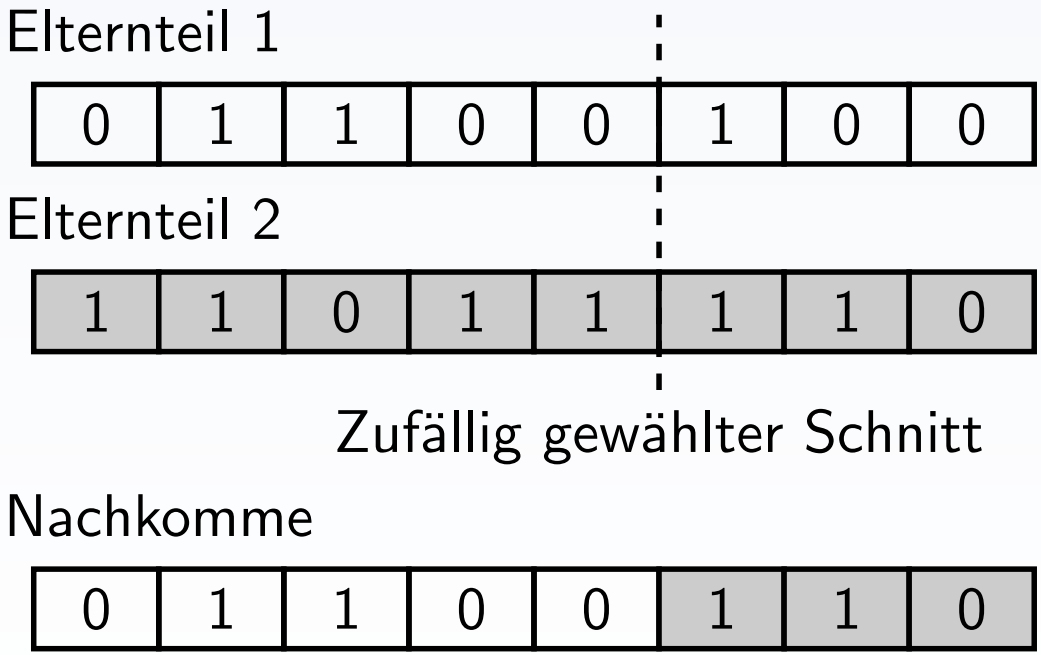
Selektion:

- Auswahl von Individuen aus Generation n für die Erzeugung von Generation $n + 1$
- Höhere Fitness $=$ höhere Auswahlwahrscheinlichkeit

Genetische Operationen (2)

Rekombination (Crossover)

- Wähle zwei Eltern mit Selektion aus
- Wähle zufällige Schnittstelle
- Erzeuge Nachfahren durch Zusammensetzen



Genetische Operationen (3)

Mutation

- verändere zufällig ausgewählte Bits in den Chromosomen ($0 \rightarrow 1$ bzw. $1 \rightarrow 0$)
- i.A. mit geringer Wahrscheinlichkeit

Aussterben

- Wenn Population zu groß
- schlechtestes oder zufälliges Individuum stirbt aus

Ende der Evolution: Wenn vermutlich das Optimum erreicht

Genetischer Algorithmus (vereinfacht)

Algorithmus **Genetische Suche**

Eingabe: Anfangspopulation, Fitnessfunktion ϕ, K die Populationsgröße

Datenstrukturen: S, S' : Mengen von Individuen

Algorithmus:

$S :=$ Anfangspopulation;
`while` (K enthält kein Individuum mit maximalem ϕ) `do`:
  $S' := \emptyset$
  `for` $i := 1$ `to` K `do`:
    Wähle zufällig (mit ϕ gewichtet) zwei Individuen A und B aus S;
    Erzeuge Nachkomme C aus A und B durch Rekombination;
    $C' :=$ Mutation (geringe Wahrscheinlichkeit) von C;
    $S' := S' \cup \{C'\}$;
  `end for`
  $S := S'$
`end while`
Gebe Individuum mit maximaler Fitness aus

Genetisch vs. Evolutionär

Genetischer Algorithmus

- Bitfolgen
- Selektion, Rekombination, Mutation: alle möglichen Bitfolgen

Evolutionärer Algorithmus

- auch allgemeinere Folgen (z.B. ganze Zahlen)
- Beschränkung auf bestimmte Bitfolgen
- angepasste Operationen (z.B. nur Permutationen als Nachfolger)

Adjustiere Parameter

- Erzeugung der initialen Population und Kriterien zum Beenden
- Mutationswahrscheinlichkeit: wieviel Bits werden geflippt?, welche Bits?
- Crossover-Wahrscheinlichkeit: an welcher Stelle wird zerschnitten? Welche Individuen dürfen Nachkommen zeugen?
- Abhängigkeit der Anzahl der Nachkommen von der Fitness
- Größe der Population

Vom Problem zum Algorithmus

Notwendig:

- Finden einer geeigneten Repräsentation der Zustände
- Fitnessfunktion finden
- Finden geeigneter genetischer Operatoren (auf der Repräsentation).

Probleme: lokale Maxima (Bergsteigereffekt)

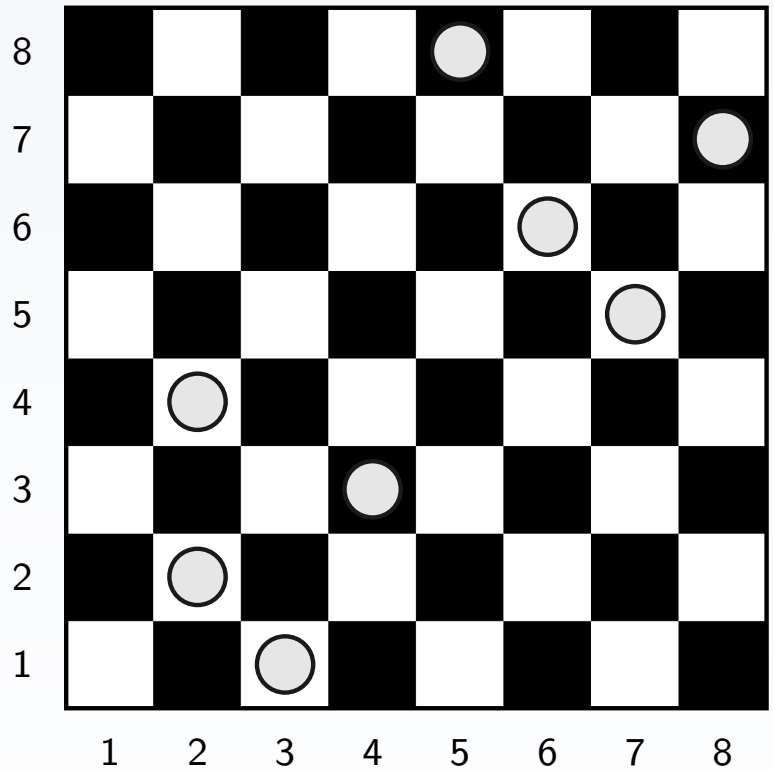
Ermitteln der Selektionswahrscheinlichkeit

Alternativen:

1. Proportional zur Fitness.
   - Optimierung sehr sensibel für genauen Wert und der Steigung der Fitness
   - Plateaus / Optima: sehr flach, keine bevorzugte Auswahl
2. Proportional zur Reihenfolge innerhalb der Population.
   - z.B. bestes Individuum 2-3 fach wahrscheinlicher als schlechtestes Individuum.
   - Fitness-Funktion kann etwas ungenauer sein
   - Auswahl hängt nicht vom genauen Wert ab.
3. Proportional zu einer normierten Fitness
   - z.B. Fitness $-c$, wobei c minimale Fitness

Beispiel: n-Damen

- Kodierung: Folge von n Zahlen im Bereich 1,. . . ,n
- i. Zahl: Position von Dame in Zeile i



Kodiert: [3,2,4,2,7,6,8,5]

Beispiel: n-Damen (2)

Fitness:

- Fitness: Anzahl nicht bedrohender Damenpaare
- schlechtester Wert: 0, jede Dame bedroht jede andere
- bester Wert: $\left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right) = \frac{n*(n-1)}{2}$

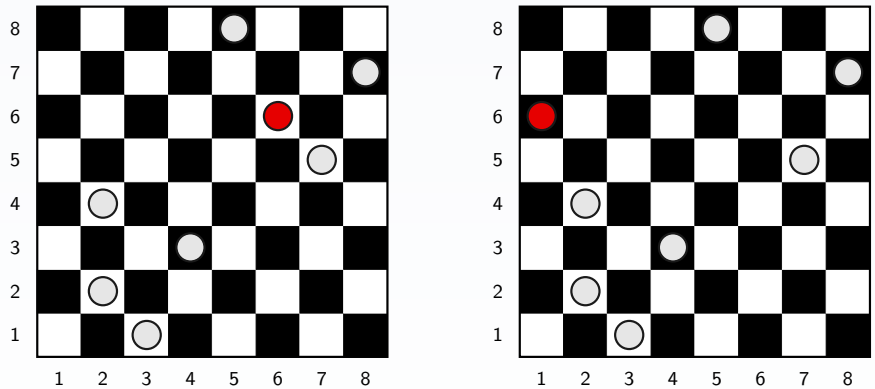
Beispiel: n-Damen (2)

Fitness:

- Fitness: Anzahl nicht bedrohender Damenpaare
- schlechtester Wert: 0, jede Dame bedroht jede andere
- bester Wert: $\binom{n}{2} = \frac{n*(n-1)}{2}$

Mutation:

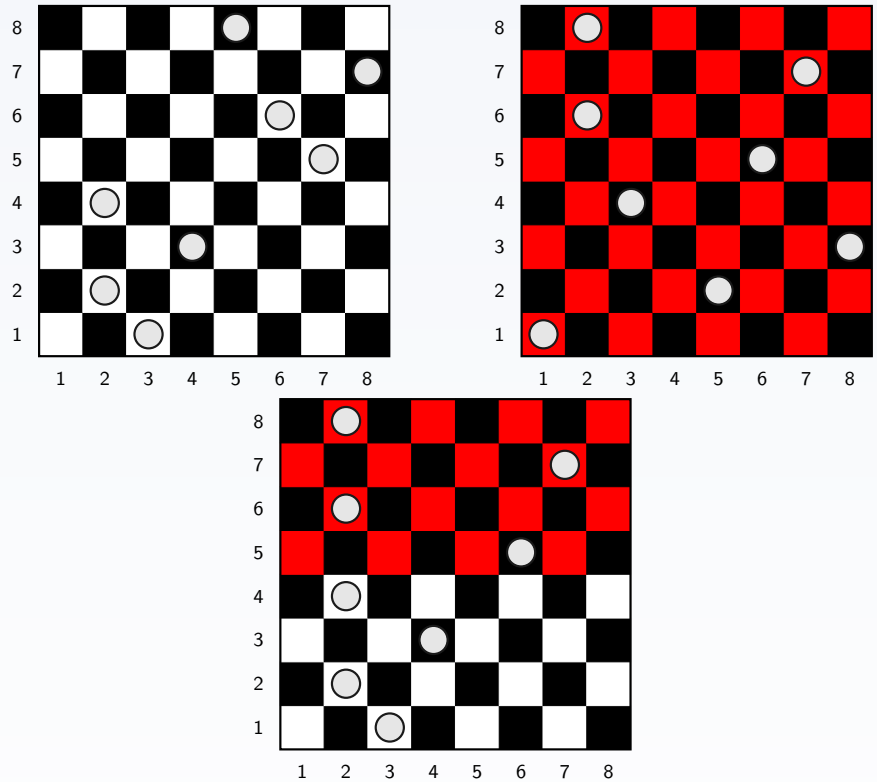
- Ändere einen Wert zufällig auf Wert aus $\{1, \ldots, n\}$
- entspricht: bewege Dame in einer Zeile auf anderen Platz



[3,2,4,2,7,6,8,5] → [3,2,4,2,7,1,8,5]

Beispiel: n-Damen (3)

Rekombination:



[3,2,4,2,7,6,8,5] und [1,5,8,3,6,2,7,2] mit Schnitt in der Mitte ergibt [3,2,4,2,6,2,7,2]

n-Damen: Bessere Kodierung

Da man schon mehr weiß:

- Erlaube nur Bitfolgen, die Permutationen von [1,...,n] sind
- Rekombination erscheint dann eher sinnlos
  (fast immer erhält man einen ungültigen Zustand)
  Abhilfen:
  - sofortiges Aussterben
  - Zufälliges Reparieren
  - Rekombination nicht durchführen
- Mutation: Tausche zwei Elemente

Beachte: Reine Mutationsveränderungen sind analog zu Bergsteigen und Best-First-Suche.

Beispiel mit 5 Damen

Anfangspopulation	$\{[3,2,1,4,5]\}$
Fitness	$\varphi([3,2,1,4,5]) = 4$
Mutationen	$[3,2,1,4,5] \to [5,2,1,4,3]$;
	$[3,2,1,4,5] \to [3,4,1,2,5]$
2.Generation:	
Population	$\{[5,2,1,4,3],[3,4,1,2,5]\}$
Bewertung	$\varphi([5,2,1,4,3]) = 6$, $\varphi([3,4,1,2,5]) = 6$
Mutationen	$[3,4,1,2,5] \to [3,4,1,5,2]$,
	$[5,2,1,4,3] \to [5,2,4,1,3]$
3.Generation:	
Population	$\{[5,2,1,4,3],[3,4,1,2,5],[2,4,1,3,5],[5,2,4,1,3]\}$
Bewertung	$\varphi([3,4,1,5,2]) = 8$, $\varphi([5,2,4,1,3]) = 10$

Optimum erreicht!

Die Kodierung $[5,2,4,1,3]$ ist eine Lösung.

Bemerkungen zu evolutionären Algorithmen

Wesentliche Unterschiede zu Standardsuchverfahren:

- Evol. Alg. benutzen Codierungen der Lösungen
- Evol. Alg. benutzen eine Suche, die parallel ist und auf einer Menge von Lösungen basiert.
- Evol. Alg. benutzen nur die Zielfunktion zum Optimieren
- Evol. Alg. benutzen probabilistische Übergangsregeln.
  Der Suchraum wird durchkämmt mit stochastischen Methoden

Bemerkungen zu evolutionären Algorithmen (2)

- Gute Kodierung erfordert annähernde Stetigkeit:
  fast stetiger Zusammenhang zwischen Bitfolge und Fitnessfunktion, d.h.
  Flippen von Bits ändert die Fitness nur wenig
- Optimale Lösung sollten durch Herantasten auffindbar sein (nicht versteckte einzelne Punkte)
- Rekombination scheint nur dann sinvoll, wenn es einen Zusammenhang von Teilfolgen (Genen) gibt, und dieser in Fitnessfunktion ablesbar ist.
- D.h. es muss „gute Gene“ geben.

Baustein-Hypothese (Goldberg, 1989)

(als Begründung für Crossover)

Genetische Algorithmen verwenden einfache Chromosomenbausteine und sammeln und mischen diese um die eigene Fitness zu optimieren.
Hypothese: das Zusammenmischen vieler guter (kleiner) Bausteine ergibt das fitteste Individuum

Parameter einer Implementierung

- Üblicherweise jede Menge einstellbarer Parameter
- Welche Operatoren werden verwendet? (Mutation, Crossover, ...)
- Welche Wahrscheinlichkeiten werden in den Operatoren verwendet? Mutationswahrscheinlichkeit, ...
- Welcher Zusammenhang soll zwischen Fitnessfunktion und Selektionswahrscheinlichkeit bestehen?
- Wie groß ist die Population? Je größer, desto breiter ist die Suche angelegt, allerdings dauert es dann auch länger.
- Werden Individuen ersetzt oder dürfen sie weiterleben?
- Gibt es Kopien von Individuen in der Population?
- ...

Statistische Analyse

Annahme:

- Nur Klonen, keine Rekombination, keine Mutation

Frage: Wie wächst die Häufigkeit einzelner Gene von Generation zu Generation?

Statistische Analyse (2)

- Darstellung eines Gens in der Schema-Theorie:
  $G = [* \ * \ * \ * \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ * \ * \ * \ *]$.
- $1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1$ mit seiner Position ist das Gen
- V die Gesamtpopulation
- S die Menge mit Gen G
- Annahme: Fitness jedes Individuums in S: a
- Annahme: Fitness jedes Individuums in $V \setminus S$: b

Statistische Analyse (3)

Erwartungswert der Anzahl der Nachkommen aus der Menge S?
Annahme: nächste Generation wird durch $|V|$-maliges Ziehen aus der Menge V (mit Zurücklegen) berechnet.
Wahrscheinlichkeit: Gewichtung mit der Fitness

- Wahrscheinlichkeit ein Individuum aus S zu ziehen:
  $p(S) = \frac{a*|S|}{a*|S|+b*(|V|-|S|)}$
- Wahrscheinlichkeit ein Individuum aus $V \setminus S$ zu ziehen:
  $p(V \setminus S) = \frac{b*(|V|-|S|)}{a*|S|+b*(|V|-|S|)}$
- Erwartungswert für Größe des neuen S: $p(S) * |V|$
- Wachstum, wenn $p(S) * |V| > S$
- relativer Anteil: $rel(S) = \frac{|S|}{|V|}$

Statistische Analyse (4)

Mit Generationen

- $S(t)$: S in Generation t
- $rel(S(t))$: rel. Anteil von S in Generation t

Rekursionsgleichung für $rel(S(t))$:

$$rel(S(t+1)) = \frac{p(S(t)) * |V|}{|V|} = p(S(t)) = \frac{a * |S(t)|}{a * |S(t)| + b * (|V| - |S(t)|)}$$

$$= \frac{a * |S(t)|}{a * |S(t)| + b * (|V| - |S(t)|)} * \frac{\frac{1}{|V|}}{\frac{1}{|V|}} = \frac{\frac{a*|S(t)|}{|V|}}{\frac{a*|S(t)|+b*(|V|-|S(t)|)}{|V|}}$$

$$= \frac{a * \frac{|S(t)|}{|V|}}{a * \frac{|S(t)|}{|V|} + b * (\frac{|V|}{|V|} - \frac{|S(t)|}{|V|})} = \frac{a * rel(S(t))}{a * rel(S(t)) + b * (1 - rel(S(t)))}$$

Statistische Analyse (5)

$$rel(S(t+1)) = \frac{a * rel(S(t))}{a * rel(S(t)) + b * (1 - rel(S(t)))}$$

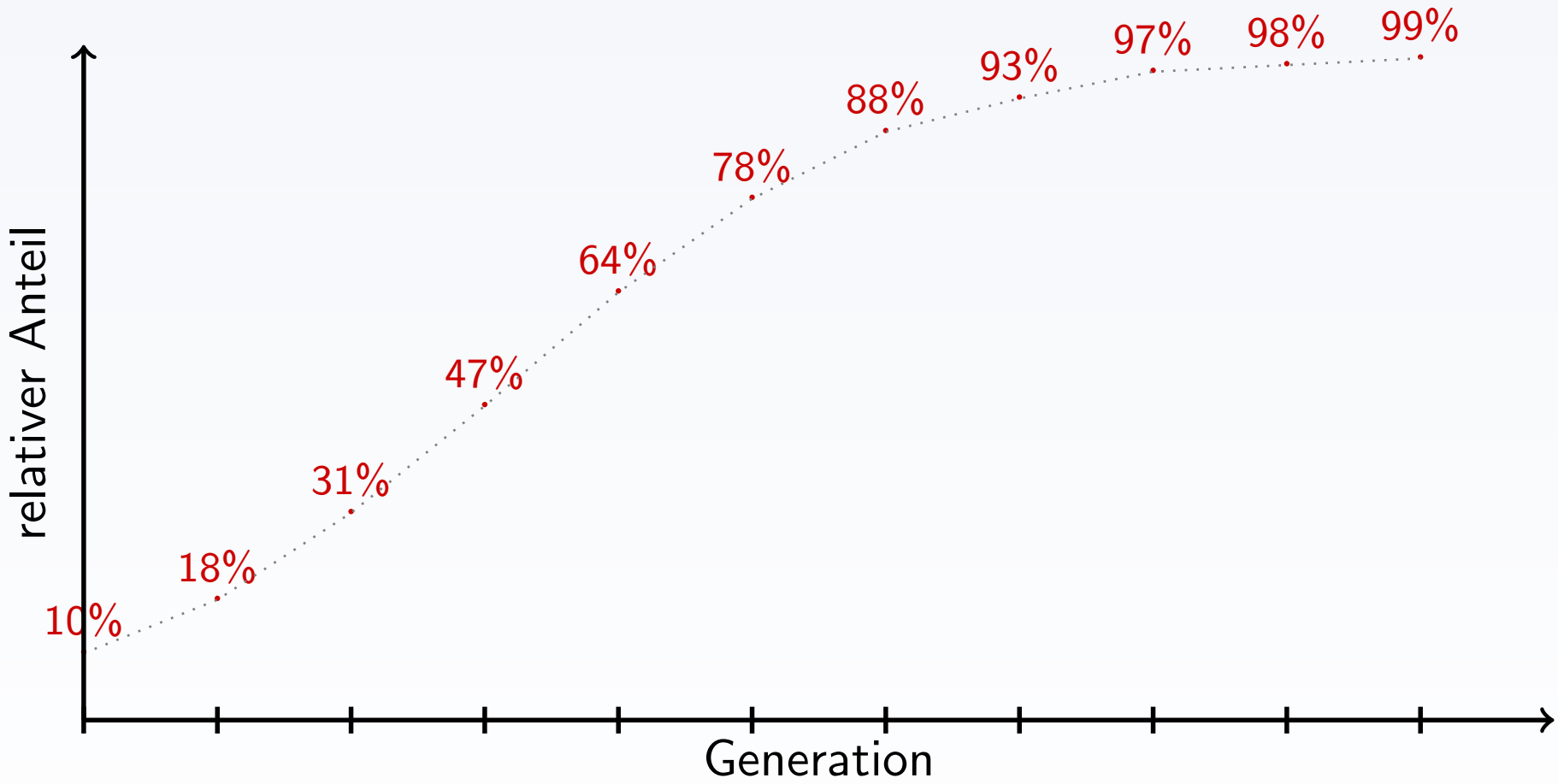
Beispiel: Wenn $a = 2b$ ergibt das

$$rel(S(t+1)) = \frac{2 * b * rel(S(t))}{2 * b * rel(S(t)) + b * (1 - rel(S(t)))} = \frac{2 * rel(S(t))}{rel(S(t)) + 1}$$

Mit $rel((S(1)) = 0.1$:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$rel(S(t))$	$0,1$	$0,18$	$0,31$	$0,47$	$0,64$	$0,78$	$0,88$	$0,93$	$0,97$	$0,98$	$0,99$

Bild dazu



Anwendungsbereiche

Evolutionäre Algorithmen für Optimierungen von komplexen Problemstellungen, die

- keinen einfachen Lösungs- oder Optimierungsalgorithmus haben,
- bei denen man relativ leicht sagen kann, wie gut diese Lösungen sind
- die nicht in Echt-Zeit lösbar sein müssen, d.h. man hat ausreichend (Rechen-)Zeit um zu optimieren.
- bei denen man aus einer (bzw. zwei) (Fast-)Lösungen neue Lösungen generieren kann.
- wenn man die Problemstellung leicht mit weiteren Parametern versehen will, und trotzdem noch optimieren können will.

Weitere Anwendungsbeispiele

SAT-Solving

- Gegeben: Aussagenlogische Formeln in KNF
- $\underbrace{(l_{1,1} \vee l_{1,2} \ldots l_{1,n_1})}_{\text{Klausel}} \wedge \ldots \wedge \underbrace{(l_{m,1} \vee l_{m,2} \ldots l_{m,n_m})}_{\text{Klausel}}$
- Modell: Jede Klausel muss erfüllt sein

Kodierung als evolutionärer Algorithmus:

- Individuum: [0,1,...] Belegung der Variablen (geordnet) = Interpretation
- Fitness: Anzahl der erfüllten Klauseln (zwischen 0 und m)
- Mutation: Flippe Belegung einer Variablen
- Rekombination: Zerschneide zwei Interpretationen zu einer neuen

Weitere Anwendungsbeispiele (2)

Handlungsreisenden-Problem

- n Städte mit Verbindungen
- Finde kürzestet Tour, die alle Städte einmal besucht

Evolutionäre Algorithmen

- Viele Kodierungen und Operatoren
- Z.B. Individuum: Folge aller Städte (Permutation)
- Fitnessfunktion: Weglänge (negativ)
- Mutation: Muss Permutation erhalten, daher z.B. tauschen
- Rekombination: Muss Reparaturmechansimus haben
- Ein vorgeschlagener Operator ist z.B. das partielle Invertieren: Invertiere Teiltour

Weitere Anwendungsbeispiele (3)

Verteil- und Planungsprobleme

- Verteilen von Studenten auf Übungsgruppen
  Programm von Björn Weber (ehemaliger Student)
- usw.

Alte Übungsaufgabe

Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

- Zu einer Lehrveranstaltung finden m Übungsgruppen statt.
- Es gibt n Studierende, die auf die Übungsgruppen verteilt werden sollen.
- Maximal k Studierende dürfen an jeder Übungsgruppe teilnehmen.
- Jeder Studierende gibt eine Liste seiner Wünsche ab, indem er alle m Gruppen in eine Reihenfolge bringt (d.h. eine Permutation der Zahlen von 1 bis m). Die erste Zahl hat dabei die größte Priorität.

Kodieren Sie das Optimierungsproblem als Problem eines Evolutionären Algorithmus, indem Sie

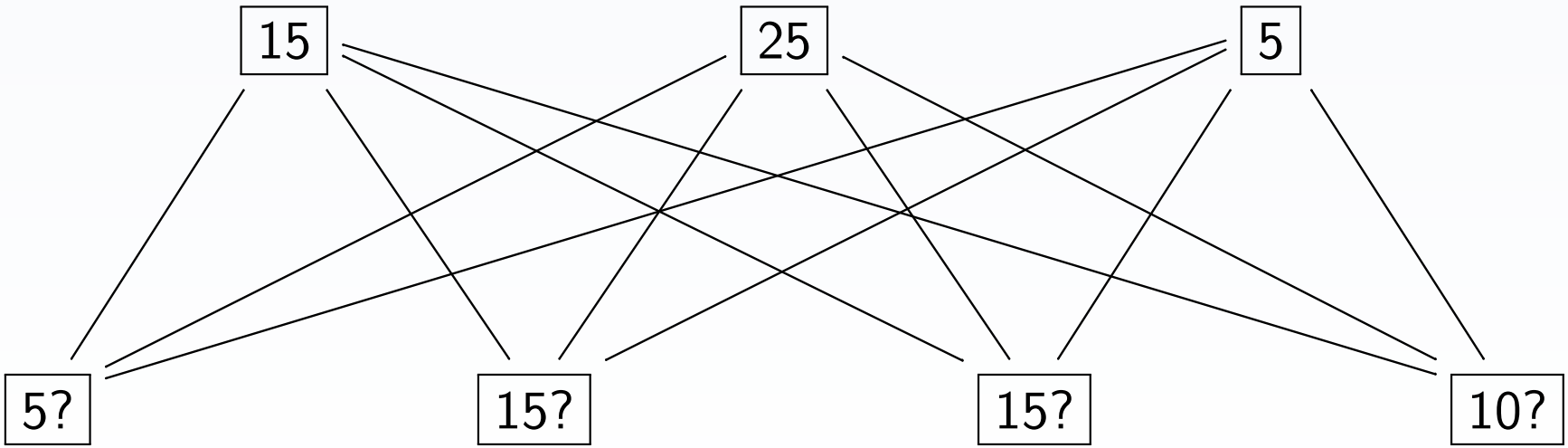
- die Beschreibung eines Individuums (Chromosomensatzes), und
- die Fitnessfunktion

angeben.

Beispiel: Transportproblem (Michalewicz (1992))

- 3 Warenlager: L_1, L_2, L_3
- 4 Zielpunkten $Z_1, \ldots, Z_4$.
- Kosten für den Transport von Waren von L_i nach Z_i pro Einheit.

Lagerbestand			Warenwünsche			
L_1	L_2	L_3	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
15	25	5	5	15	15	10



Beispiel (2)

Die Kosten pro Einheit sind:

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
L_1	10	0	20	11
L_2	12	7	9	20
L_3	0	14	16	18

Eine optimale Lösung ist:

	5	15	15	10
15	0	5	0	10
25	0	10	15	0
5	5	0	0	0

Die Kosten sind:

$5 * 0 + 10 * 11 + 10 * 7 + 15 * 9 + 5 * 0 = 315$

Beispiel (3)

Kodierung als evolut. Algorithmus
Zwei Varianten:

1. Lösungsmatrix als Individuum.
2. Individuum: Matrix wie Lösungsmatrix aber Prioritäten 1,2,3,... als Einträge.

Fitness: Kosten (negativ)

1. exakte Kodierung, aber viele verschiedene Individuen, ungültige Individuen!
2. alle Kodierungen gültig, Permutationen der Zahlen 1 bis 12

Mutation und Crossover:

1. verschiebe eine Wareneinheit auf eine andere Fuhre. Kann ungültig sein. Crossover fast immer ungültig
2. Austausch von 2 Prioritäten, Crossover: braucht Reparatur
   Inversion: invertiere die Reihenfolge der Prioritäten:

Schlussbemerkungen

Programme:

- Es gibt fertige generische Implementierungen mit
- Eingabe der Kodierung, Fitness
- und Parametereinstellungen

Schlussbemerkungen (2)

Evolutionäre Algorithmen

- für komplexe nicht gut verstande Probleme
- Wahl der Fitnessfunktion bestimmt die Güte

Wenn man das Problem besser versteht:

- kann man mit spezialisierter Suche / Verfahren meistens die evolutionären Algorithmen schlagen
- da man mehr Wissen hat...