GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

www.uni-frankfurt.de

Einführung in die Methoden der Künstlichen Intelligenz

Suchverfahren / Uninformierte Suche

PD Dr. David Sabel

SoSe 2014

Stand der Folien: 29. Mai 2023

Motivation für Suchverfahren

Beispiele:

- Spiele: Suche nach dem besten Zug
- Logik: Suche nach einer Herleitung einer Aussage
- Agenten: Suche nach der optimalen nächsten Aktion
- Planen: Suche nach einer Folge von Aktionen eines intelligenten Agenten.
- Optimierung: Suche eines Maximums einer mehrstelligen Funktion auf den reellen Zahlen

Repräsentation eines Suchproblems

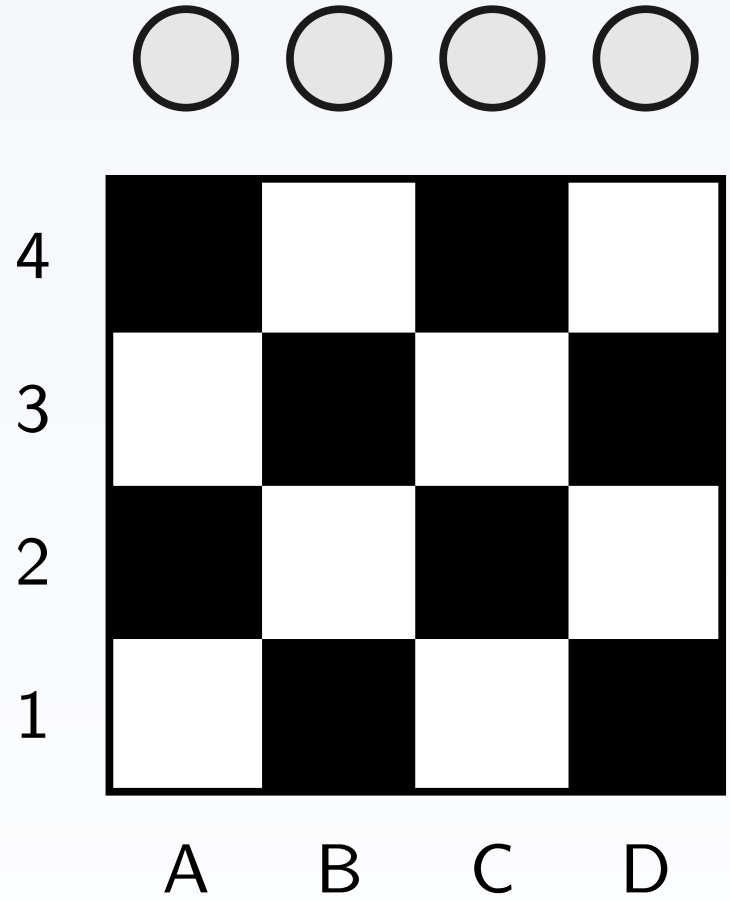
- Anfangssituationen
- Nachfolgerfunktion
- Ein Test auf Zielsituation

Normalerweise nicht gegeben: Der gesamte Suchgraph!

Beispiele:

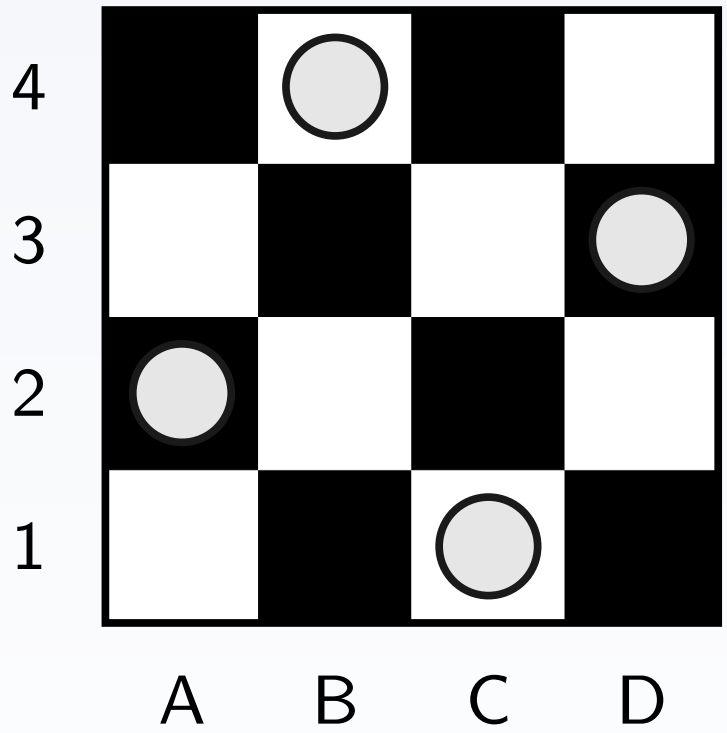
- **Schach**
  - Anfangssituation: Eine Stellung im Spiel
  - Nachfolgerfunktion: Mögliche Züge
  - Zielsituation: Wenn man gewonnen hat
  - Gesucht: Zug der zum Gewinn führt
- **Deduktionssystem**
  - Anfangssituation: Zu beweisende Aussage A, Menge von Axiomen und bewiesenen Sätzen
  - Nachfolgerfunktion: Deduktionsregeln
  - Zielsituation: Beweis
  - Gesucht: Beweis für A
- **Planen**
  - Anfangssituation: Formale Beschreibung des intessierenden Bereichs z.B. Fahrplan, Start- und Zielort,
  - Nachfolgerfunktion: Zugverbindungen usw.
  - Gesucht: Plan, der Reise ermöglicht

Beispiel: n Damen



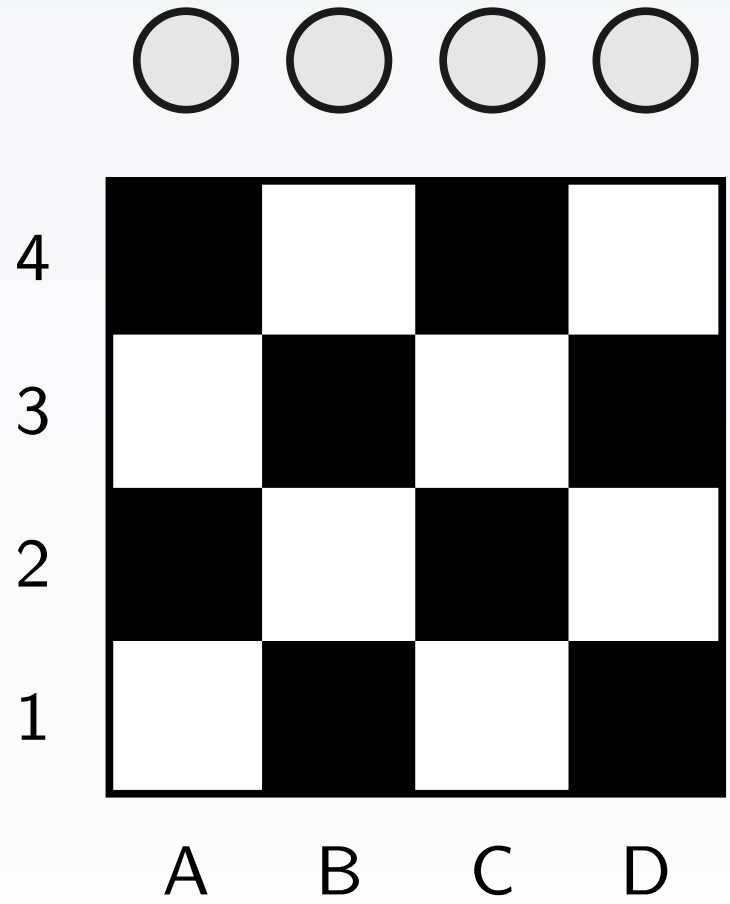
Platziere auf $n \times n$ Schachbrett n Damen,
so dass keine die andere bedroht

Beispiel: n Damen, mögliche Lösung



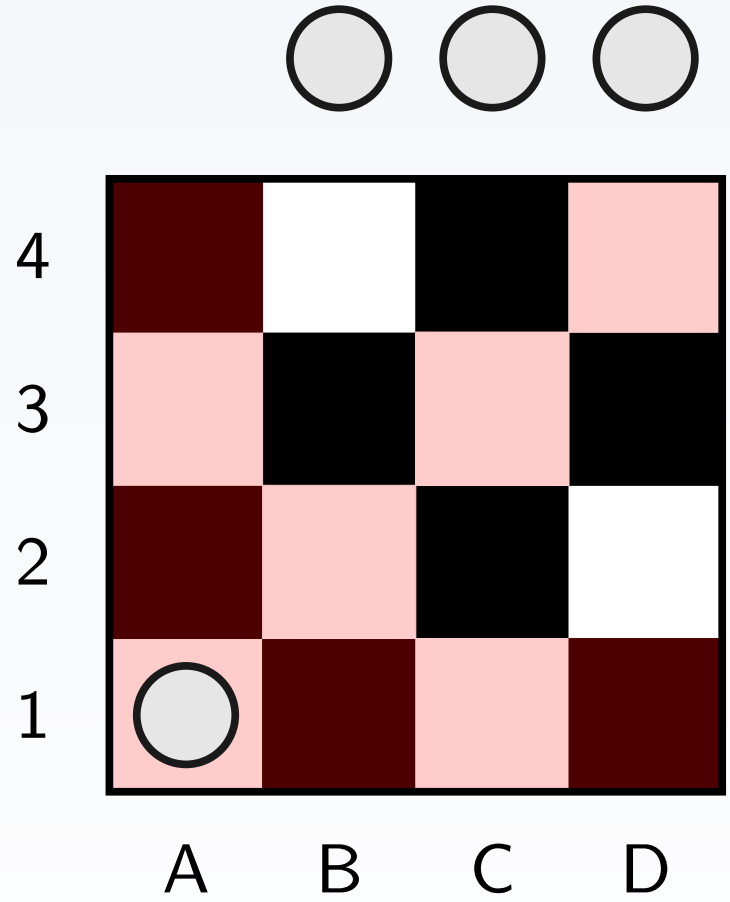
Platziere auf $n \times n$ Schachbrett n Damen,
so dass keine die andere bedroht

Beispiel: n Damen, mögliche Suche



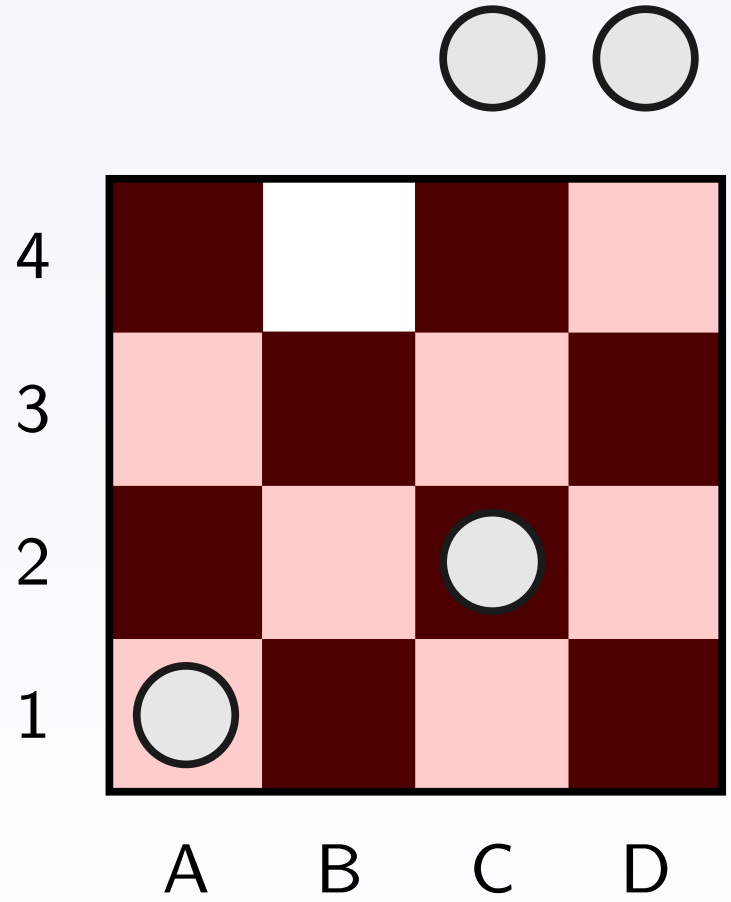
Platziere die Damen zeilenweise nacheinander,
und backtracke bei Konflikt.

Beispiel: n Damen, mögliche Suche



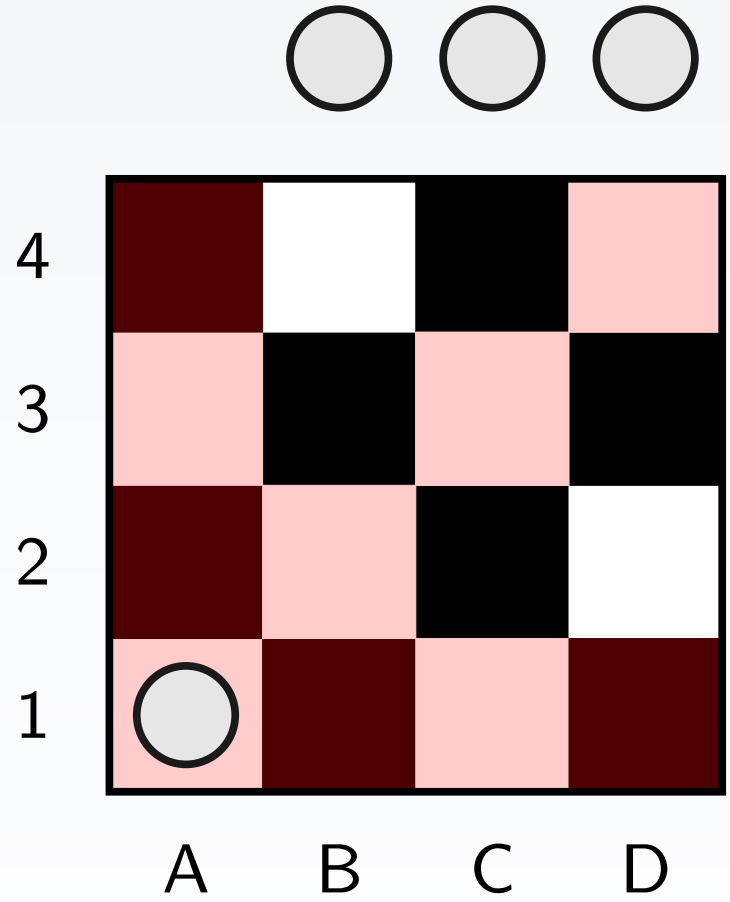
Platziere die Damen zeilenweise nacheinander,
und backtracke bei Konflikt.

Beispiel: n Damen, mögliche Suche



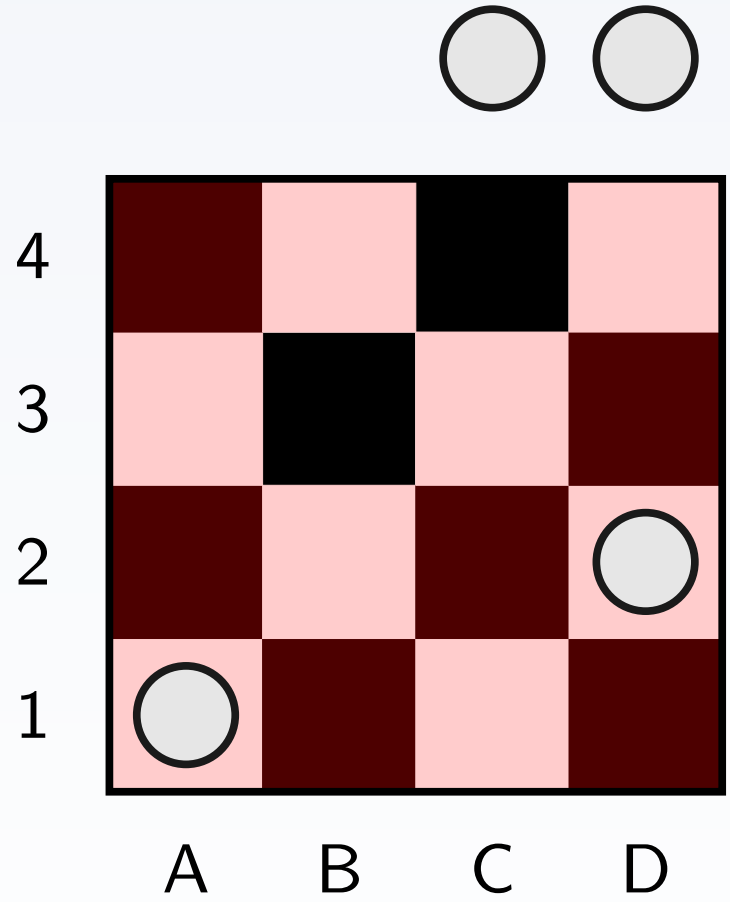
Platziere die Damen zeilenweise nacheinander,
und backtracke bei Konflikt.

Beispiel: n Damen, mögliche Suche



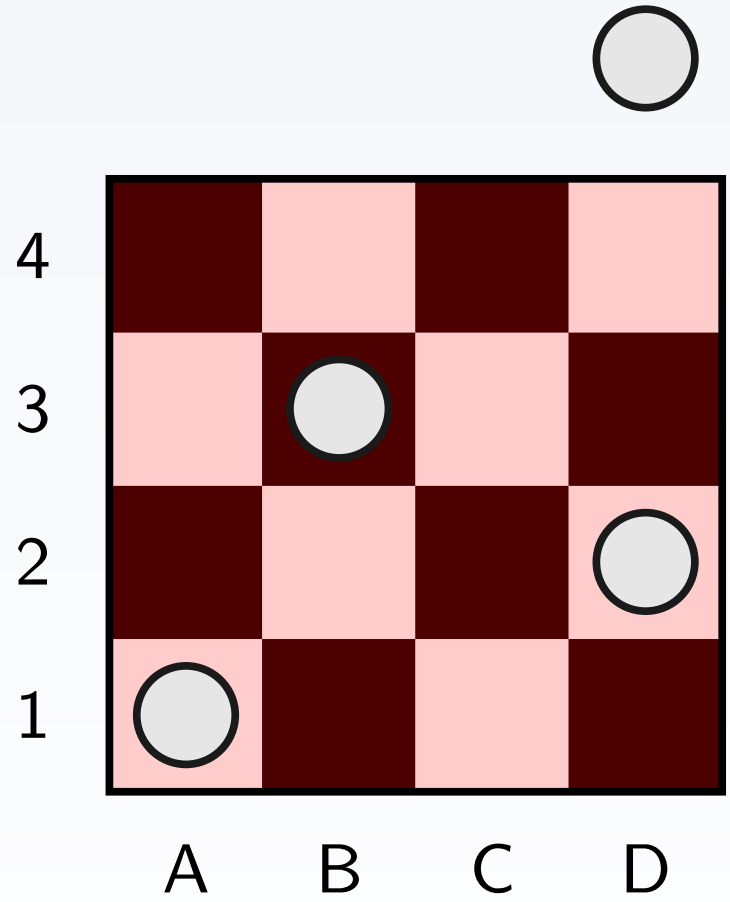
Platziere die Damen zeilenweise nacheinander,
und backtracke bei Konflikt.

Beispiel: n Damen, mögliche Suche



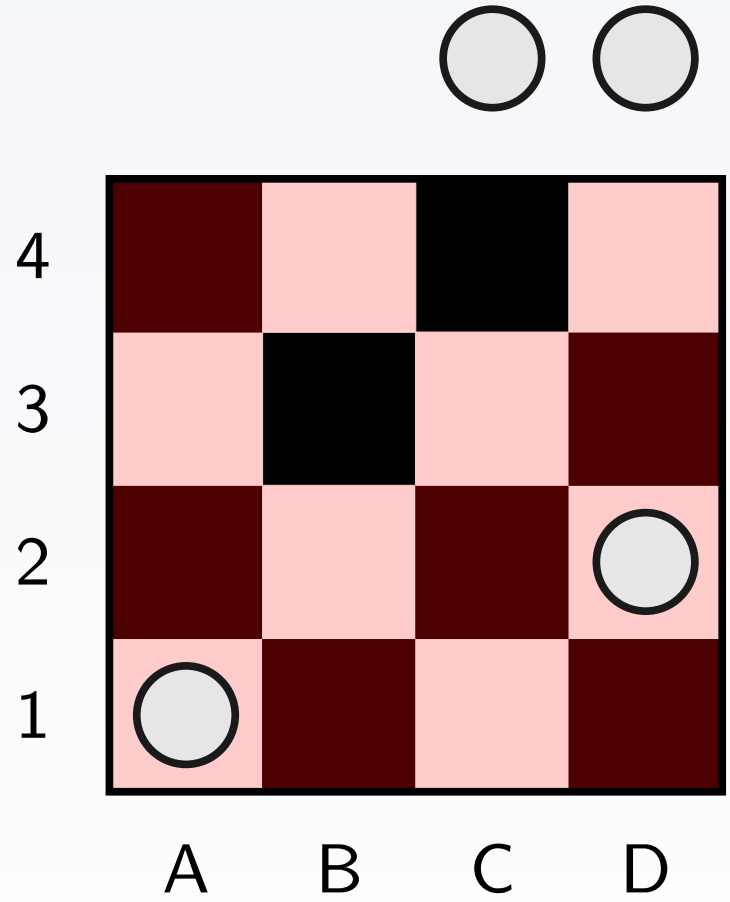
Platziere die Damen zeilenweise nacheinander,
und backtracke bei Konflikt.

Beispiel: n Damen, mögliche Suche



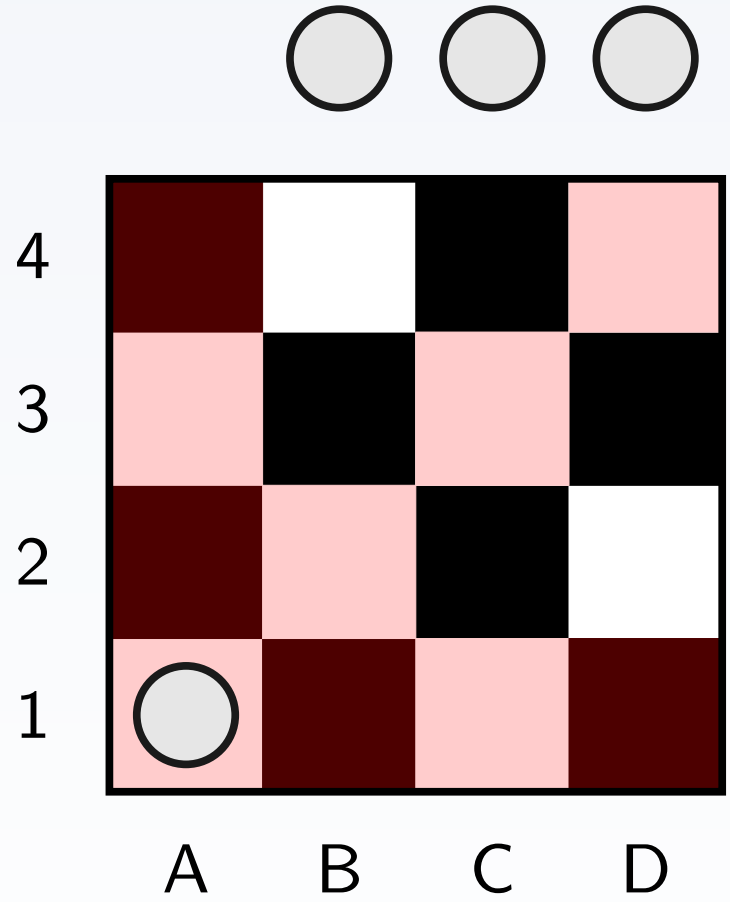
Platziere die Damen zeilenweise nacheinander,
und backtracke bei Konflikt.

Beispiel: n Damen, mögliche Suche



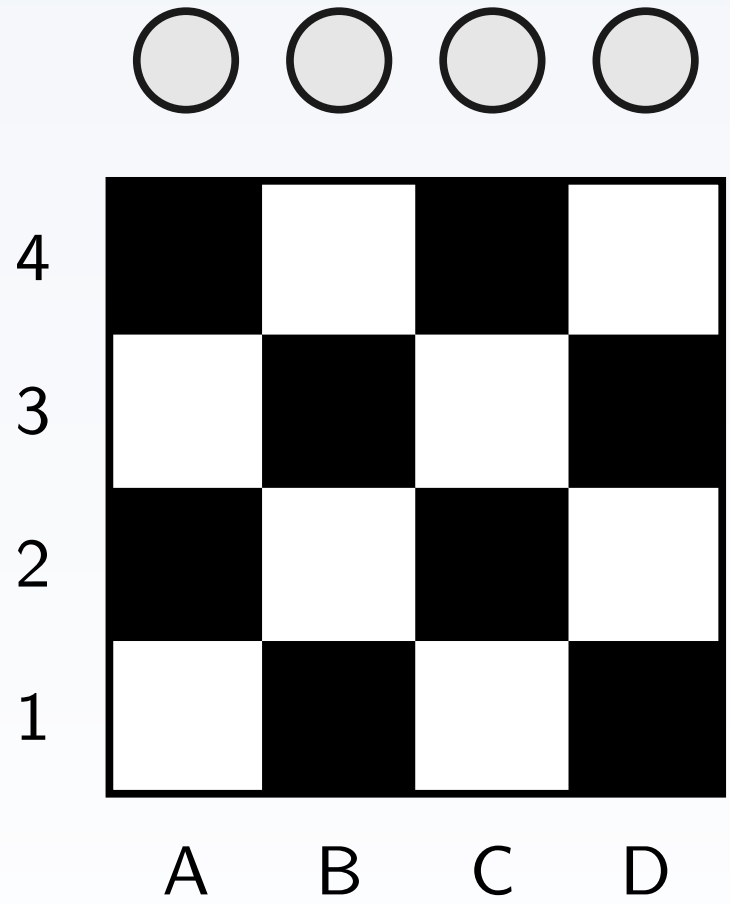
Platziere die Damen zeilenweise nacheinander,
und backtracke bei Konflikt.

Beispiel: n Damen, mögliche Suche



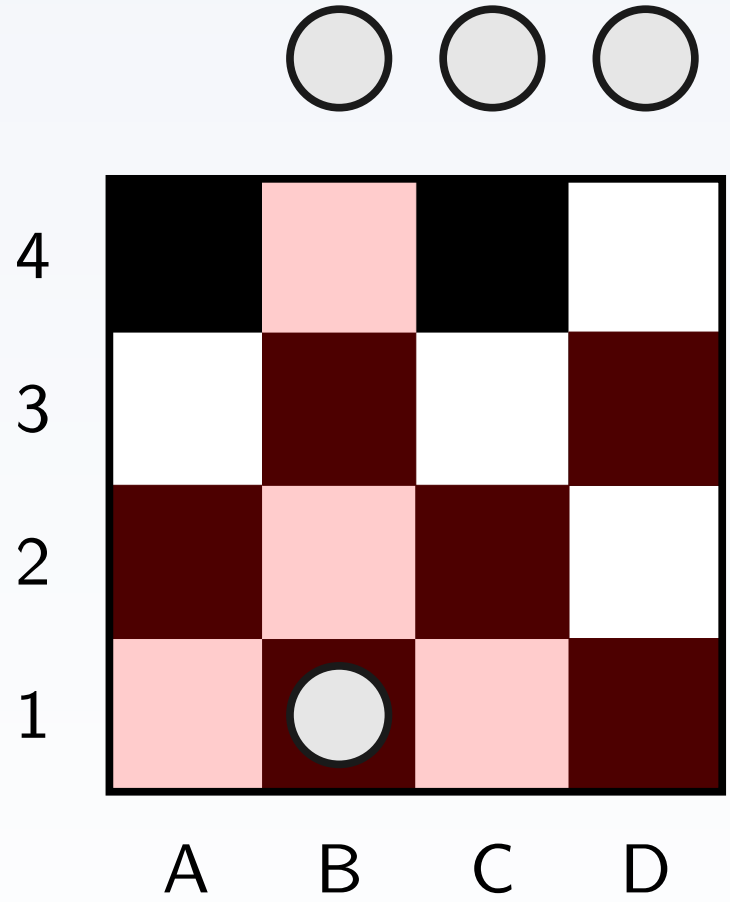
Platziere die Damen zeilenweise nacheinander,
und backtracke bei Konflikt.

Beispiel: n Damen, mögliche Suche



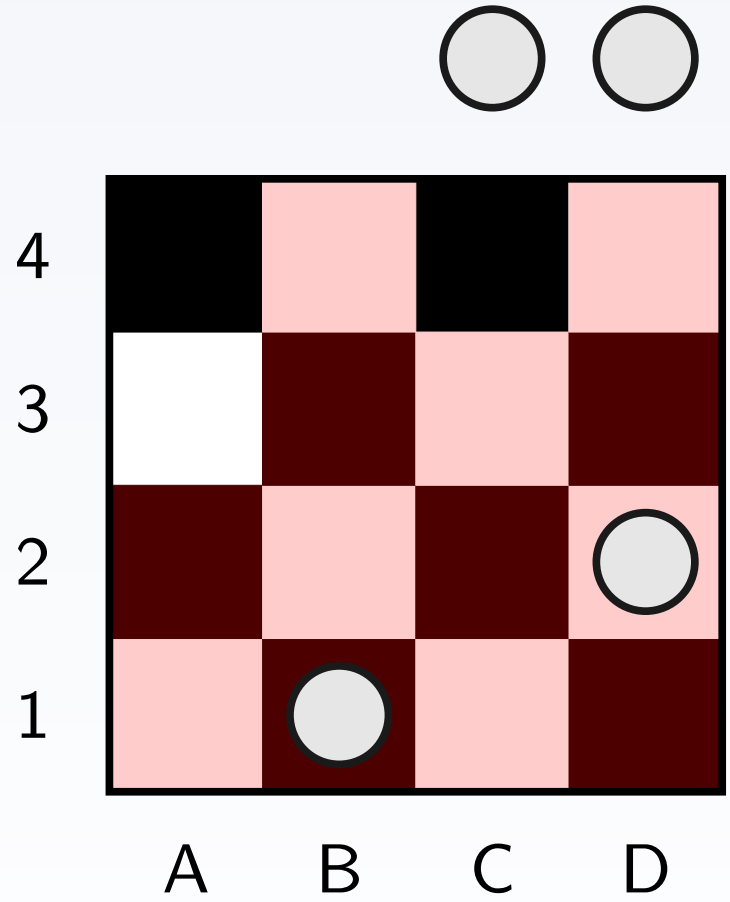
Platziere die Damen zeilenweise nacheinander,
und backtracke bei Konflikt.

Beispiel: n Damen, mögliche Suche



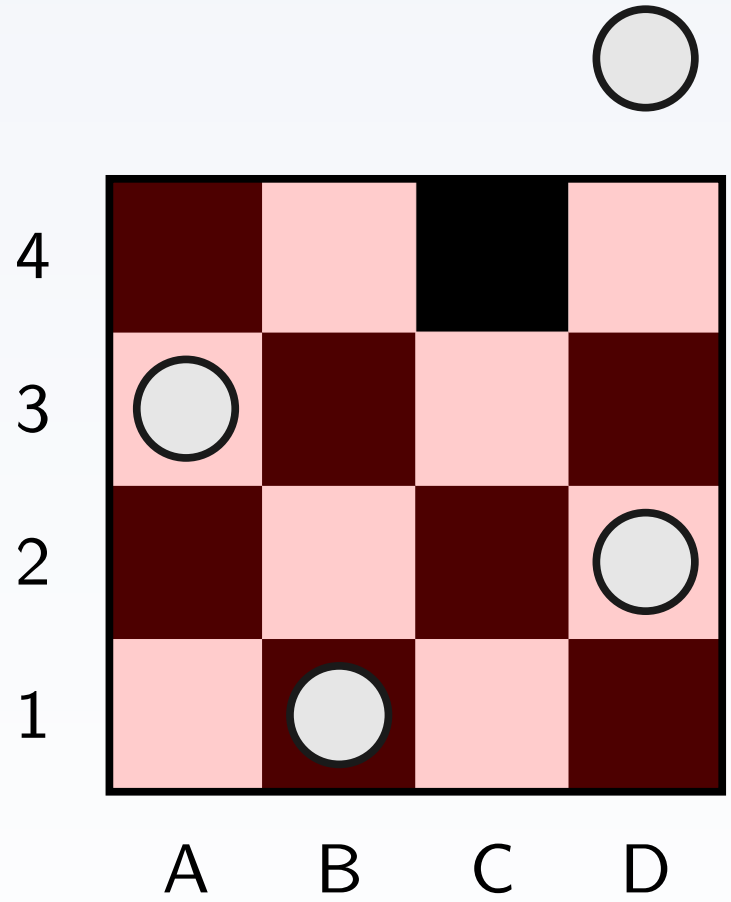
Platziere die Damen zeilenweise nacheinander,
und backtracke bei Konflikt.

Beispiel: n Damen, mögliche Suche



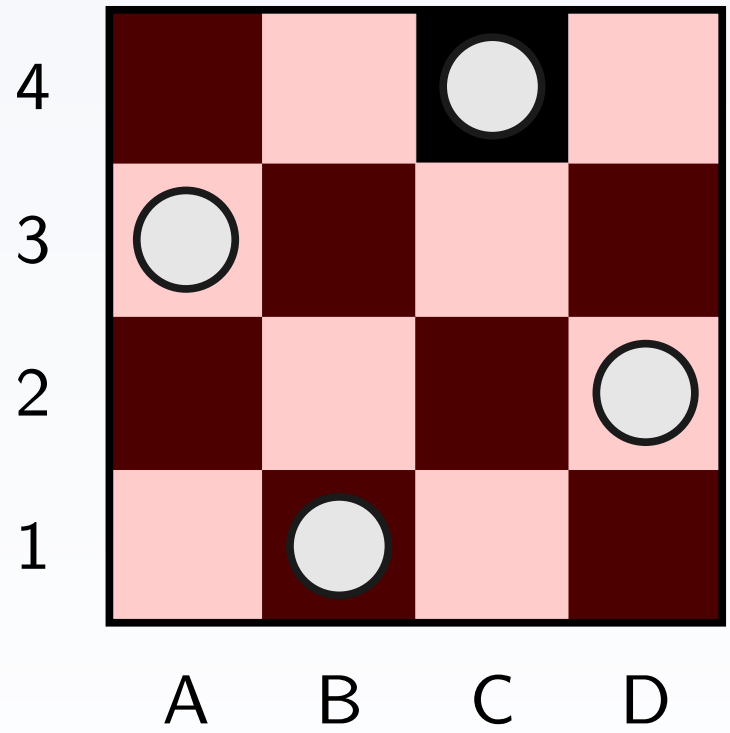
Platziere die Damen zeilenweise nacheinander,
und backtracke bei Konflikt.

Beispiel: n Damen, mögliche Suche



Platziere die Damen zeilenweise nacheinander,
und backtracke bei Konflikt.

Beispiel: n Damen, mögliche Suche



Platziere die Damen zeilenweise nacheinander,
und backtracke bei Konflikt.

Beispiel: Missionare und Kannibalen

- 3 Missionare und 3 Kannibalen sind auf einer Seite eines Flusses.
- 1 Boot mit maximal zwei Plätzen
- Bedingung: Auf keiner Uferseite Kannibalen in der Überzahl
- Gesucht: Plan zur Überquerung des Flusses

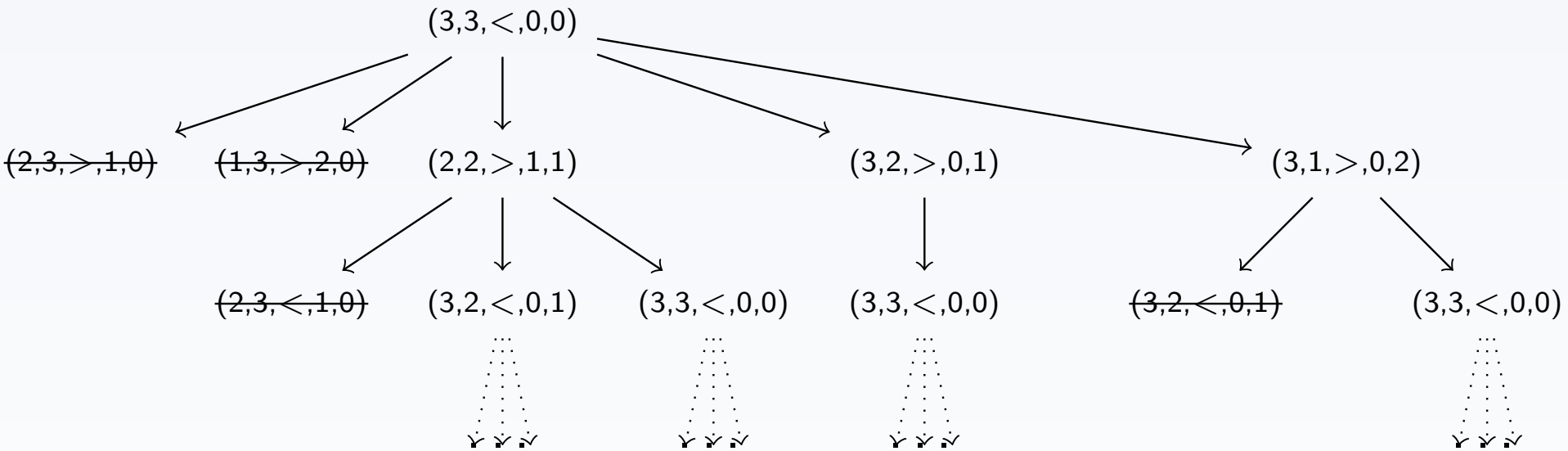
Eine Kodierung des Problems

- **Zustand**: (#M, #K, Boot ($<$ oder $>$), #M, # K)
- **Start**: (3M, 3K, $<$, 0M, 0K)
- **Ziel**: (0M, 0K, $>$, 3M, 3K)

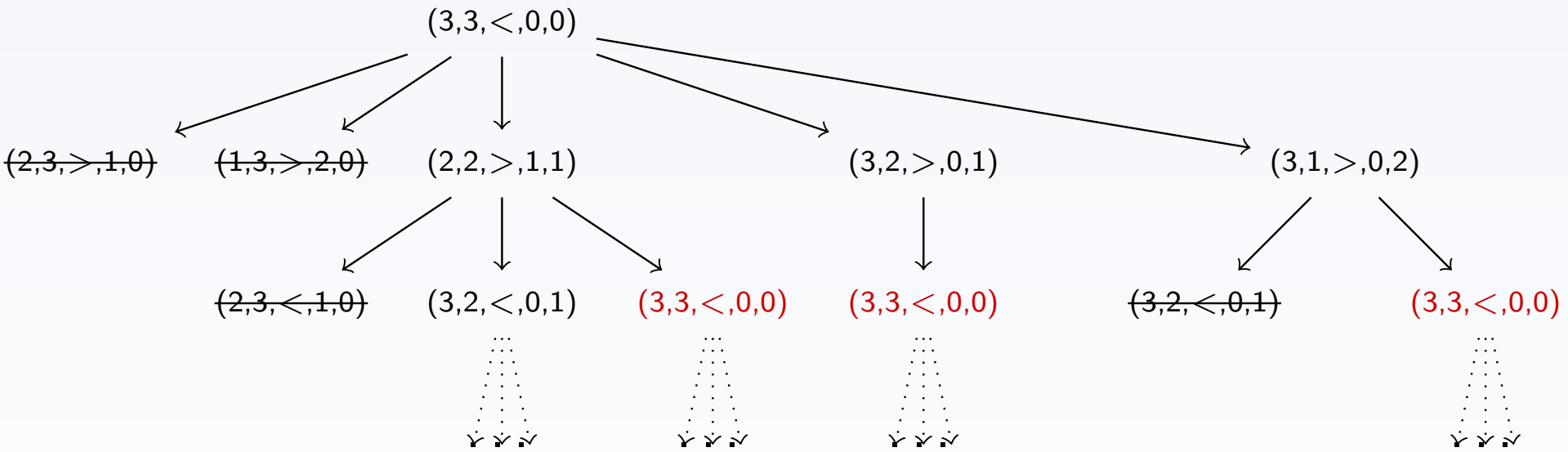
Nachfolger des Startzustands:

- ~~(2M, 3K, $>$, 1M, 0K)~~ verboten
- ~~(1M, 3K, $>$, 2M, 0K)~~ verboten
- (2M, 2K, $>$, 1M, 1K)
- (3M, 2K, $>$, 0M, 1K)
- (3M, 1K, $>$, 0M, 2K)

Suchbaum (Ausschnitt)



Suchbaum (Ausschnitt)

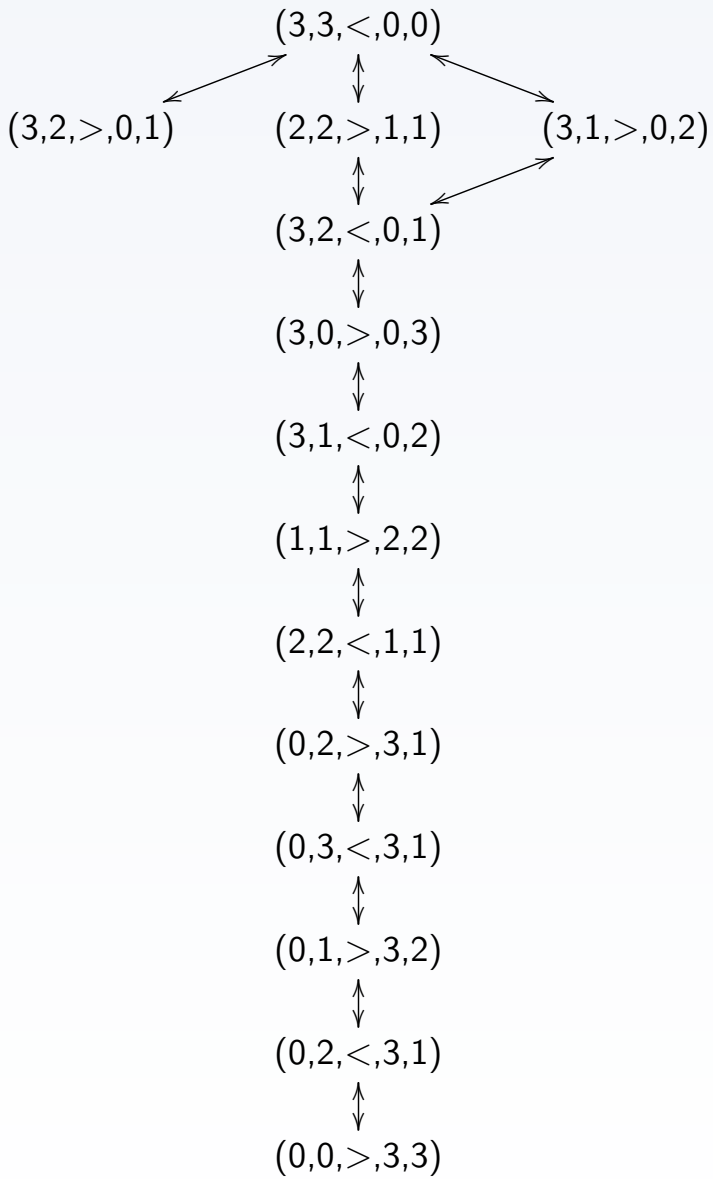


Ineffizienzen:

- Doppelte Knoten
- Schon versuchte Situationen nicht noch einmal

$\Rightarrow$ Verwende gerichteten Graphen statt Baum

Suchgraph


(3,3,<,0,0)
(3,2,>,0,1)
(2,2,>,1,1)
(3,1,>,0,2)
(3,2,<,0,1)
(3,0,>,0,3)
(3,1,<,0,2)
(1,1,>,2,2)
(2,2,<,1,1)
(0,2,>,3,1)
(0,3,<,3,1)
(0,1,>,3,2)
(0,2,<,3,1)
(0,0,>,3,3)

Modellierung des Problems ist wichtig!

- Nicht Berücksichtigung wichtiger Tatsachen:
  Kannibalen: Ein-und Aussteigen aus dem Boot ist nicht berücksichtigt!
- Sollte man die Zustände während des Bootfahrens berücksichtigen?
- Andere Repräsentation bestimmt die Struktur des Suchraumes.
  Z.B. Modellierung: Missionare und Kannibalen haben eine Identität
  Zustand: Menge der Identitäten auf der Startseite und B falls das Boot auf der Startseite
  Start: $\{M_1, M_2, M_3, K_1, K_2, K_3, B\}$
  Ziel: $\emptyset$ Ist diese Repräsentation besser / schlechter?

Modellierung (2)

Start $\{M_1, M_2, M_3, K_1, K_2, K_3, B\}$ hat **21(!) Nachfolger**

1. $\{M_2, M_3, K_1, K_2, K_3\}$
2. $\{M_1, M_3, K_1, K_2, K_3\}$
3. $\{M_1, M_2, K_1, K_2, K_3\}$
4. $\{M_1, M_2, M_3, K_2, K_3\}$
5. $\{M_1, M_2, M_3, K_1, K_3\}$
6. $\{M_1, M_2, M_3, K_1, K_2\}$
7. $\{M_3, K_1, K_2, K_3\}$
8. $\{M_2, K_1, K_2, K_3\}$
9. $\{M_2, M_3, K_2, K_3\}$
10. $\{M_2, M_3, K_1, K_3\}$
11. $\{M_2, M_3, K_1, K_2\}$
12. $\{M_1, K_1, K_2, K_3\}$
13. $\{M_1, M_3, K_2, K_3\}$
14. $\{M_1, M_3, K_1, K_3\}$
15. $\{M_1, M_3, K_1, K_2\}$
16. $\{M_1, M_2, K_2, K_3\}$
17. $\{M_1, M_2, K_1, K_3\}$
18. $\{M_1, M_2, K_1, K_2\}$
19. $\{M_1, M_2, M_3, K_3\}$
20. $\{M_1, M_2, M_3, K_2\}$
21. $\{M_1, M_2, M_3, K_1\}$

Davon sind 12 erlaubt

$\Rightarrow$ In dieser Repräsentation ist die Suche sehr viel schwieriger!

Suchraum, Suchgraph

Suche nach Lösung = Suche in einem gerichten Graphen

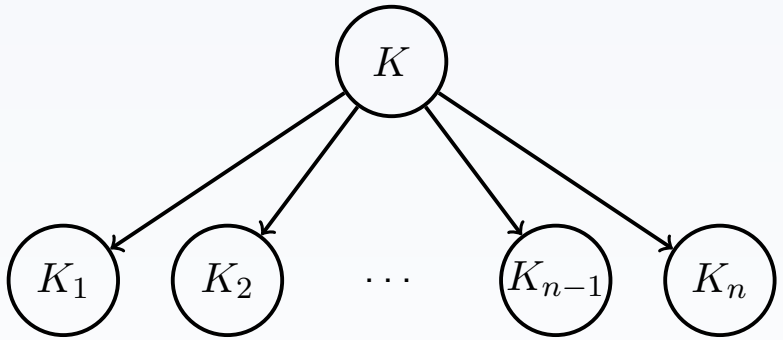
Aber: Der Graph ist nicht explizit gegeben!

Suchgraph (Suchraum) gegeben durch:

- Knoten: Situation, Zustände
- Kanten: implizit als Nachfolger-Funktion N
- Anfangssituation
- Zieltest: Entscheidbarer Test, ob Knoten Zielknoten

Eigenschaften

- Verzweigungrate des Knotens K (branching factor):
  Anzahl der direkten Nachfolger von K, also $|N(K)|$.



$$N(K) = \{K_1, \ldots, K_n\}$$
$$|N(K)| = n$$

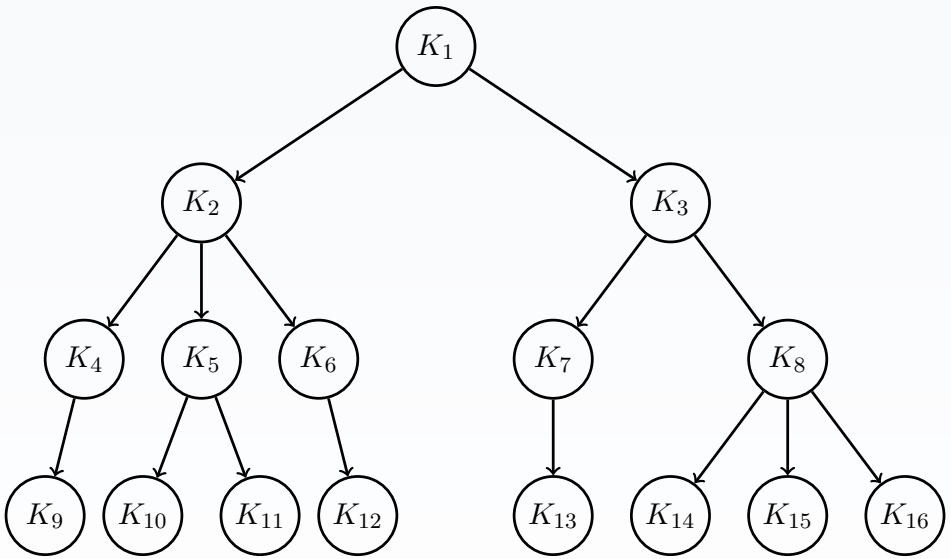
- Mittlere Verzweigunsrate des Suchraumes:
  Durchschnittliche Verzweigungrate aller Knoten.

Eigenschaften(2)

- Größe des Suchraumes ab Knoten K in Tiefe d:
  Anzahl Knoten, die von K aus in d Schritten erreichbar sind

  D.h. $|\overline{N}^d(K)|$, wobei

$$\overline{N}^1(M) = \bigcup\{N(L) \mid L \in M\} \text{ und } \overline{N}^i(K) = \overline{N}(\overline{N}^{i-1}(K)).$$

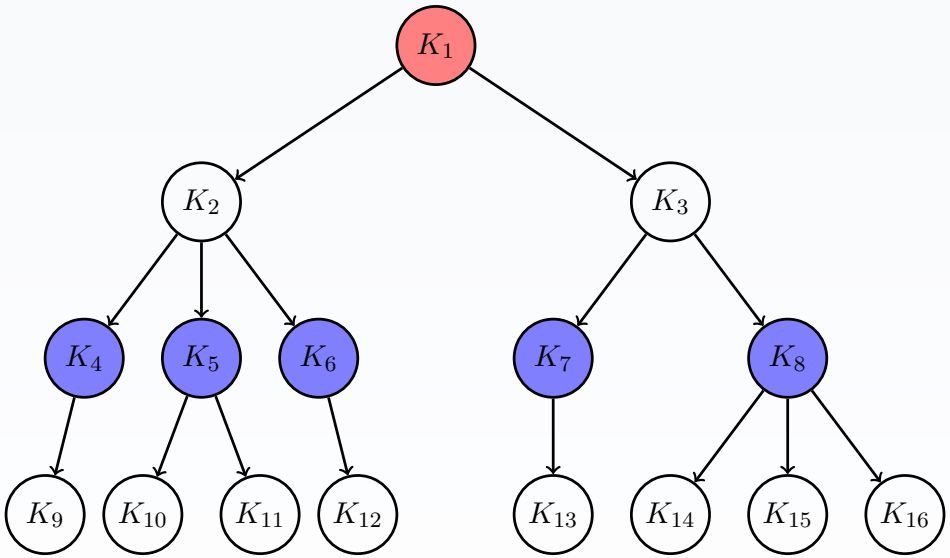


Eigenschaften(2)

- Größe des Suchraumes ab Knoten K in Tiefe d:
  Anzahl Knoten, die von K aus in d Schritten erreichbar sind

  D.h. $|\overline{N}^d(K)|$, wobei

$$\overline{N}^1(M) = \bigcup\{N(L) \mid L \in M\} \text{ und } \overline{N}^i(K) = \overline{N}(\overline{N}^{i-1}(K)).$$



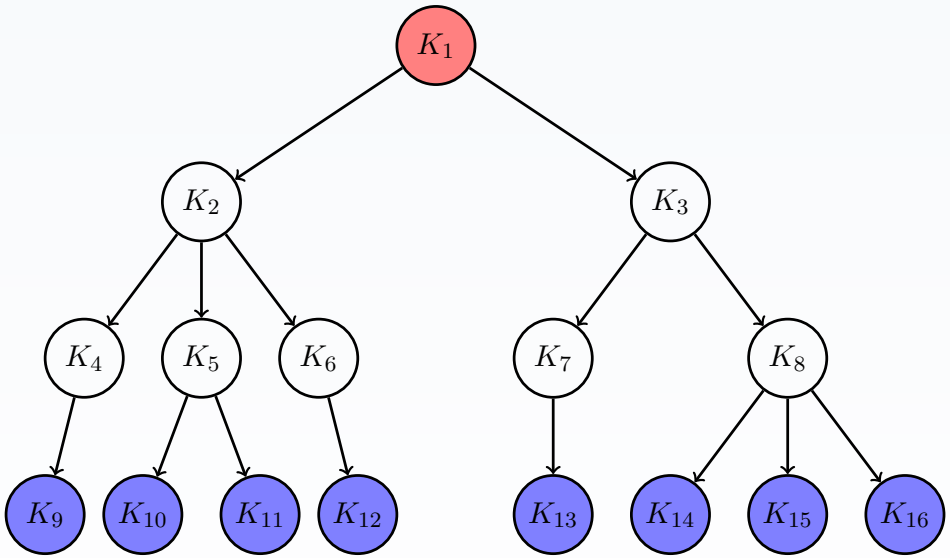
  - Größe des Suchraums ab K_1 in Tiefe $2 = 5$

Eigenschaften(2)

- Größe des Suchraumes ab Knoten K in Tiefe d:
  Anzahl Knoten, die von K aus in d Schritten erreichbar sind

  D.h. $|\overline{N}^d(K)|$, wobei

$$\overline{N}^1(M) = \bigcup\{N(L) \mid L \in M\} \text{ und } \overline{N}^i(K) = \overline{N}(\overline{N}^{i-1}(K)).$$



  - Größe des Suchraums ab K_1 in Tiefe $2 = 5$
  - Größe des Suchraums ab K_1 in Tiefe $3 = 8$

Eigenschaften (3)

Eine Suchstragie ist **vollständig**, wenn sie einen Zielknoten nach endlichen vielen Schritten findet, falls dieser existiert.

Kombinatorische Explosion

- Üblicherweise: mittlere Verzweigungrate > 1
- $\Rightarrow$ Suche ist expontiell in der Tiefe des Suchraums
- das nennt man: kombinatorische Explosion
- Die meisten Suchprobleme sind NP-hart (NP-vollständig)

Blind Search

- Blind Search = Nicht-informierte Suche
- Nur der Suchgraph ist (implizit) gegeben
- keine anderen Informationen (z.B. Heuristik)

Eingabe:

- Menge der initialen Knoten
- Menge der Zielknoten, bzw. eindeutige Festlegung der Eigenschaften der Zielknoten
- Nachfolgerfunktion N

Ausgabe: Pfad zum Zielknoten (falls dieser existiert)

Nicht-informierte Suche, allg.

Algorithmus **Nicht-informierte Suche**

Datenstrukturen: L = Menge von Knoten, markiert Weg dorthin

Eingabe: Setze $L :=$ Menge der initialen Knoten mit leerem Weg

Algorithmus:

1. Wenn L leer ist, dann breche ab.
2. Wähle einen beliebigen Knoten K aus L.
3. Wenn K ein Zielknoten ist, dann gebe aus: Zielknoten und Weg dorthin (d.h. Weg im Graphen dorthin)
4. Wenn K kein Zielknoten, dann nehme Menge $N(K)$ der direkten Nachfolger von K und verändere L folgendermaßen:
   $L := (L \cup N(K)) \setminus \{K\}$ (Wege entsprechend anpassen)
   Mache weiter mit Schritt 1

Nicht-informierte Suche, allg.

Algorithmus **Nicht-informierte Suche**

Datenstrukturen: L = Menge von Knoten, markiert Weg dorthin

Eingabe: Setze $L :=$ Menge der initialen Knoten mit leerem Weg

Algorithmus:

1. Wenn L leer ist, dann breche ab.
2. Wähle einen beliebigen Knoten K aus L.
3. Wenn K ein Zielknoten ist, dann gebe aus: Zielknoten und Weg dorthin (d.h. Weg im Graphen dorthin)
4. Wenn K kein Zielknoten, dann nehme Menge $N(K)$ der direkten Nachfolger von K und verändere L folgendermaßen:
   $L := (L \cup N(K)) \setminus \{K\}$ (Wege entsprechend anpassen)
   Mache weiter mit Schritt 1

Keine Strategie!, nichtdeterministisch

Tiefensuche

Algorithmus **Tiefensuche**

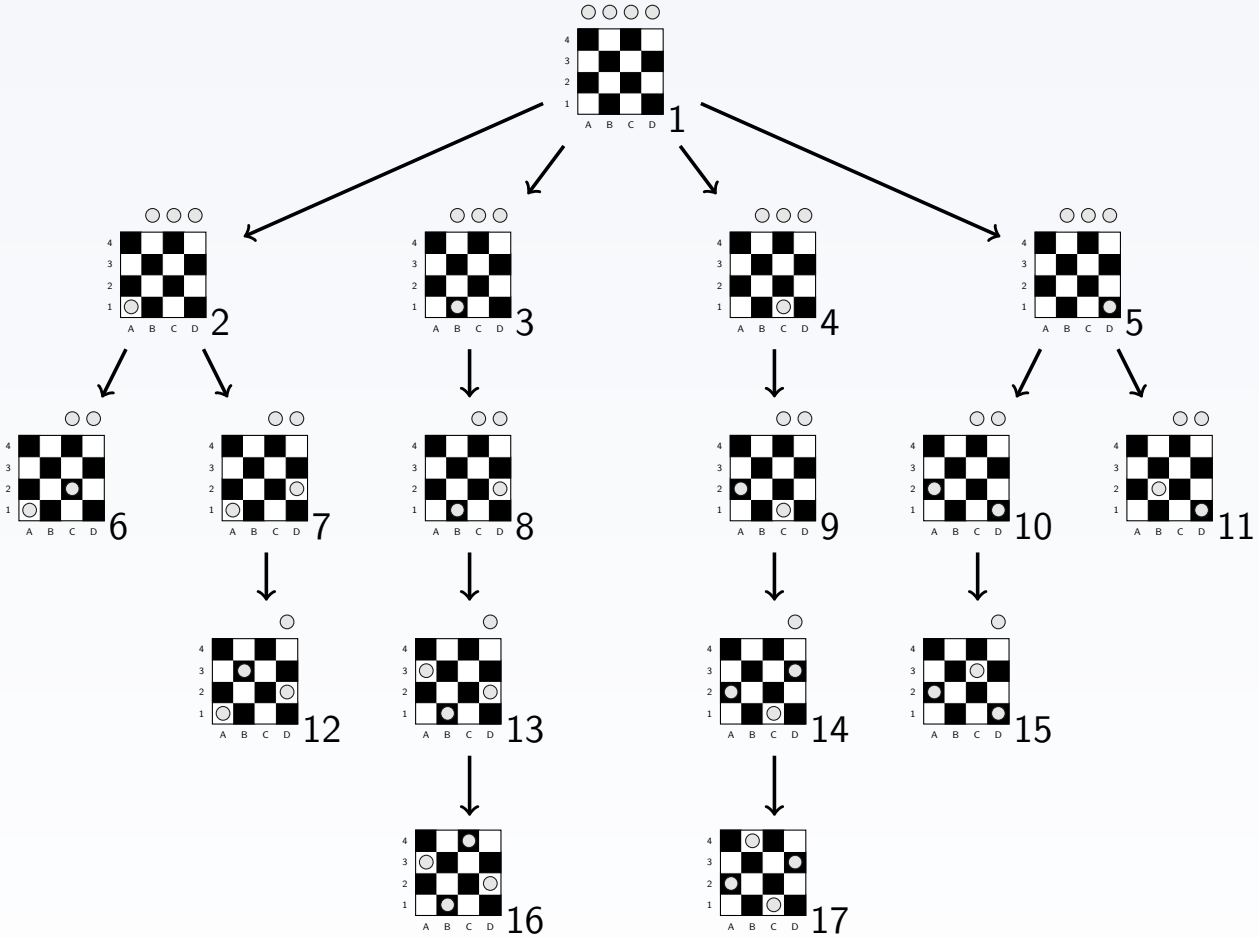
Datenstrukturen: $L =$ **Liste** (Stack) von Knoten, markiert Weg dorthin

Eingabe: Füge die initialen Knoten in die Liste L ein.

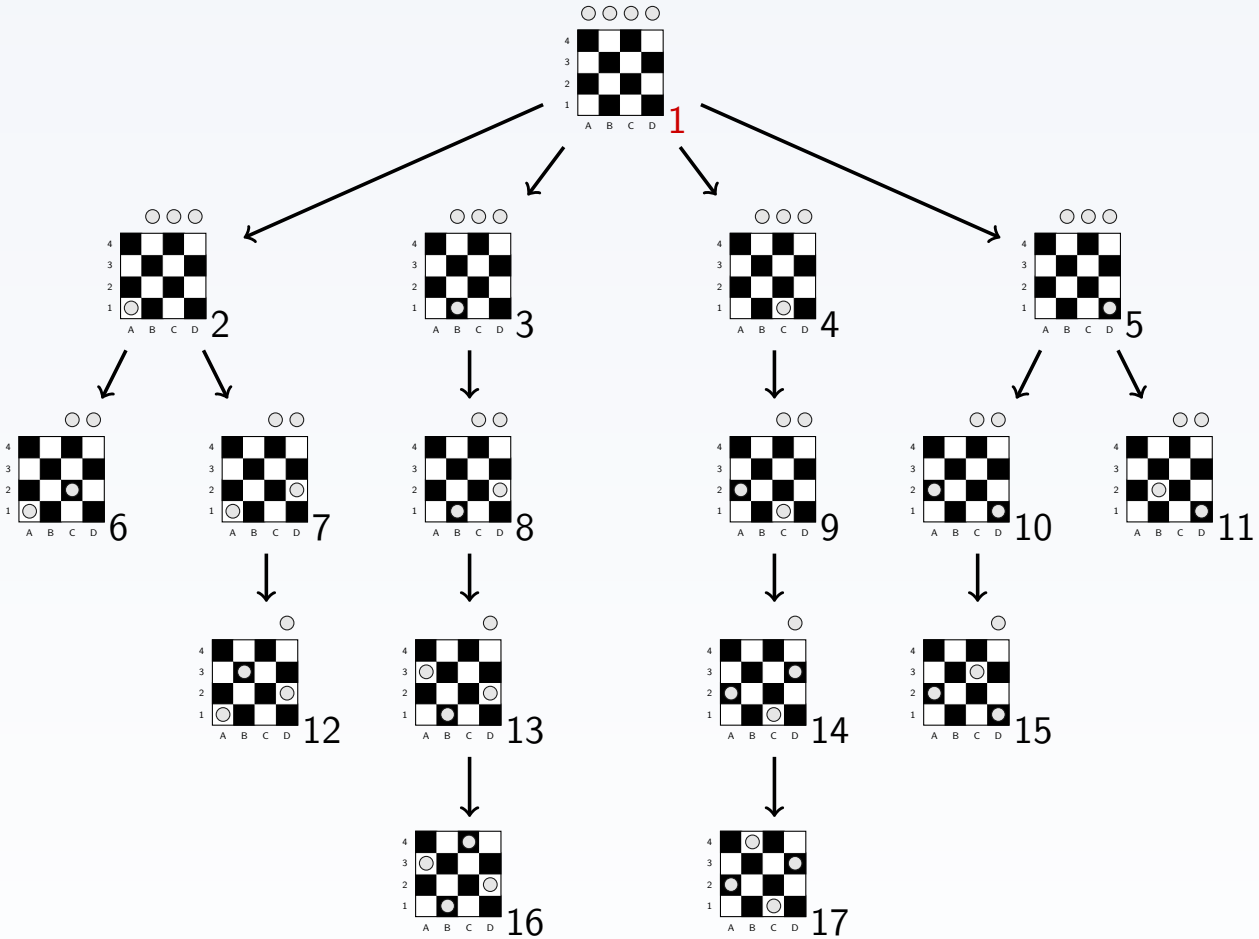
Algorithmus:

1. Wenn L die leere Liste ist, dann breche ab.
2. Wähle ersten Knoten K aus L, sei R die Restliste.
3. Wenn K ein Zielknoten ist, dann gebe aus: Zielknoten und Weg dorthin (d.h. Weg im Graphen dorthin)
4. Wenn K kein Zielknoten, dann sei $N(K)$ die (geordnete) Liste der direkten Nachfolger von K, mit dem Weg dorthin markiert
   $L := N(K)$ ++ R. (wobei ++ Listen zusammenhängt)
   Mache weiter mit 1.

Beispiel Tiefensuche



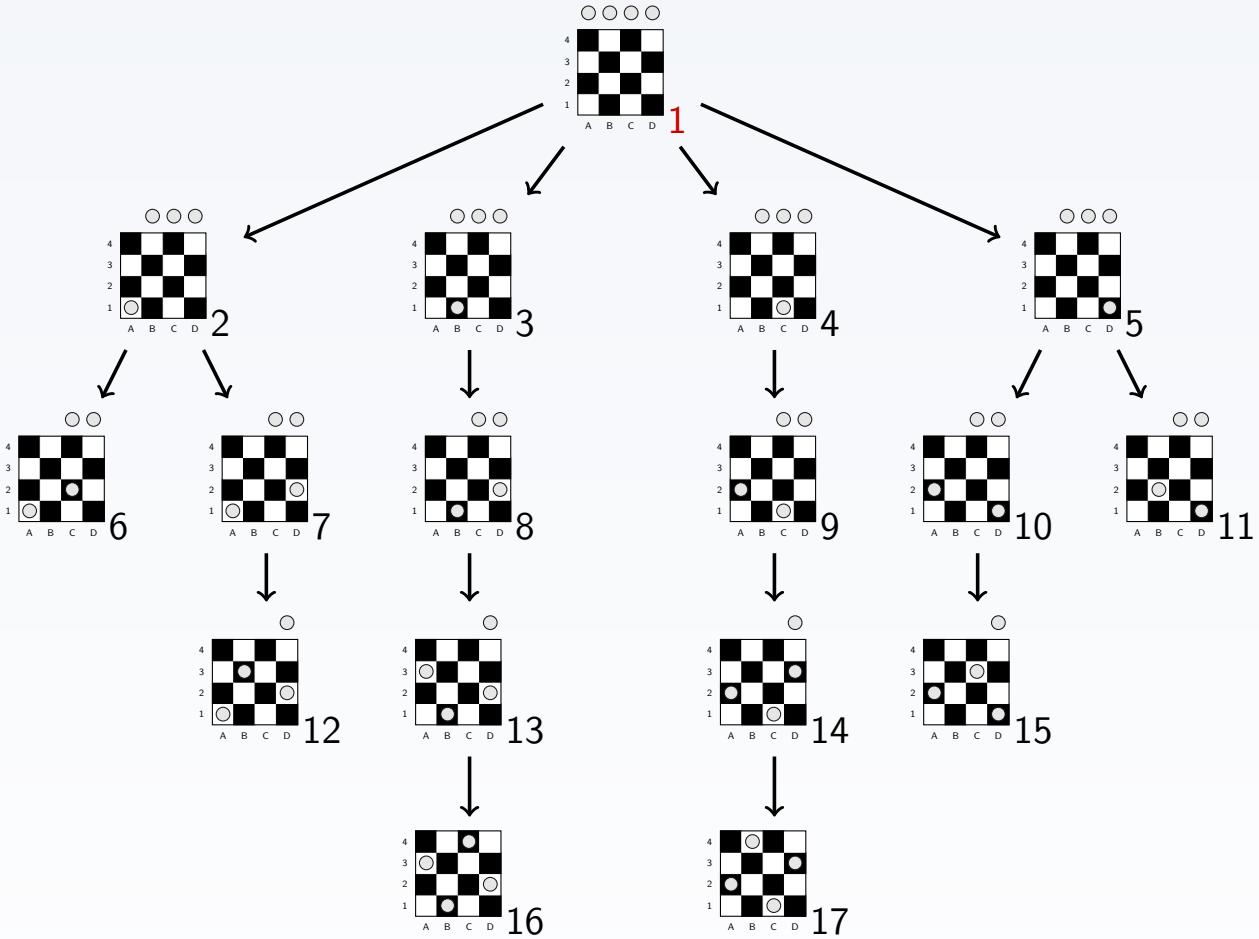
Beispiel Tiefensuche



Am Anfang:

$L := [(1, [])]$

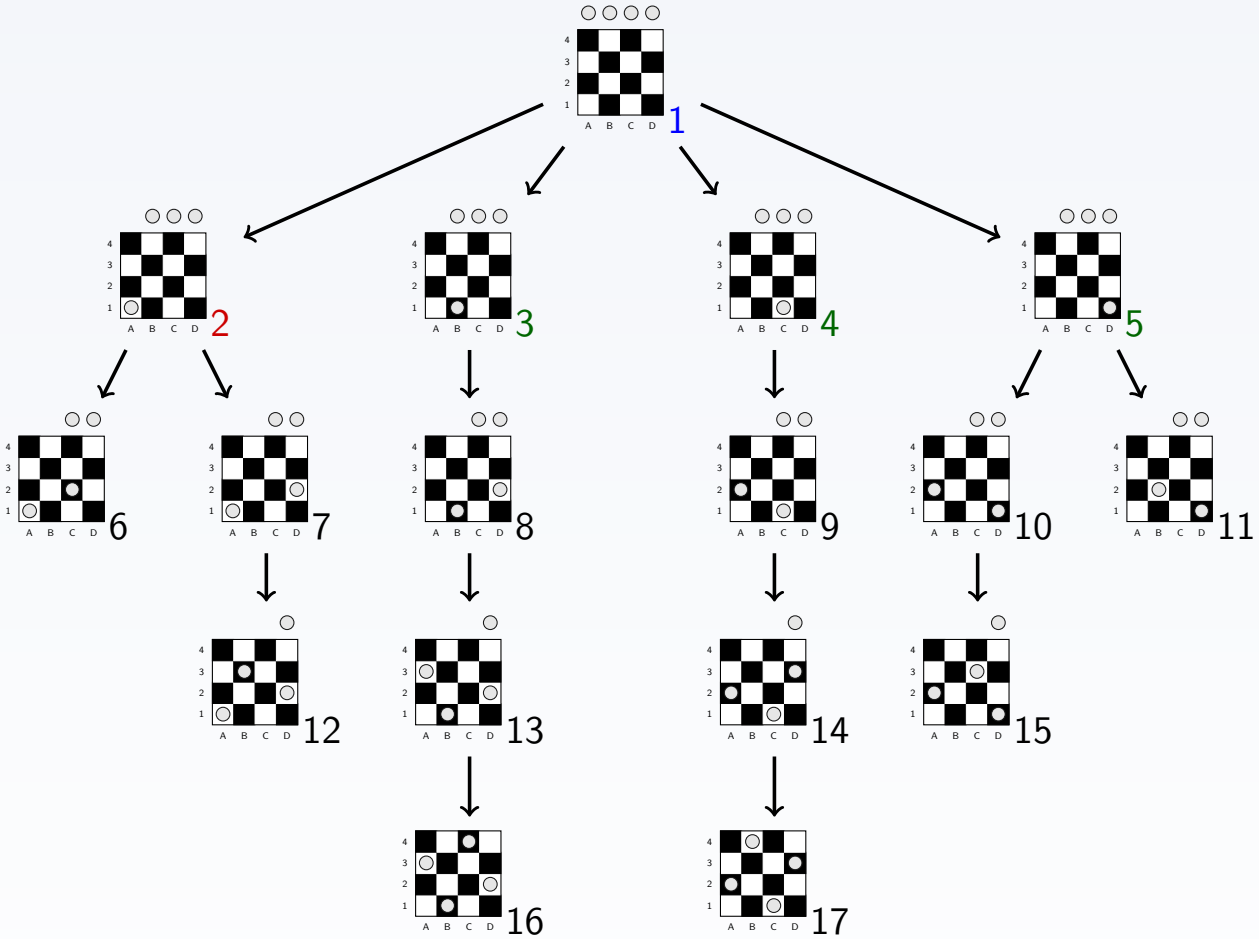
Beispiel Tiefensuche



1. Knoten

$K := (1, [])$ $R := []$
$NF(K) = [2, 3, 4, 5]$
$L := [(2, [1]), (3, [1]), (4, [1]), (5, [1])]$++$R = [(2, [1]), (3, [1]), (4, [1]), (5, [1])]$

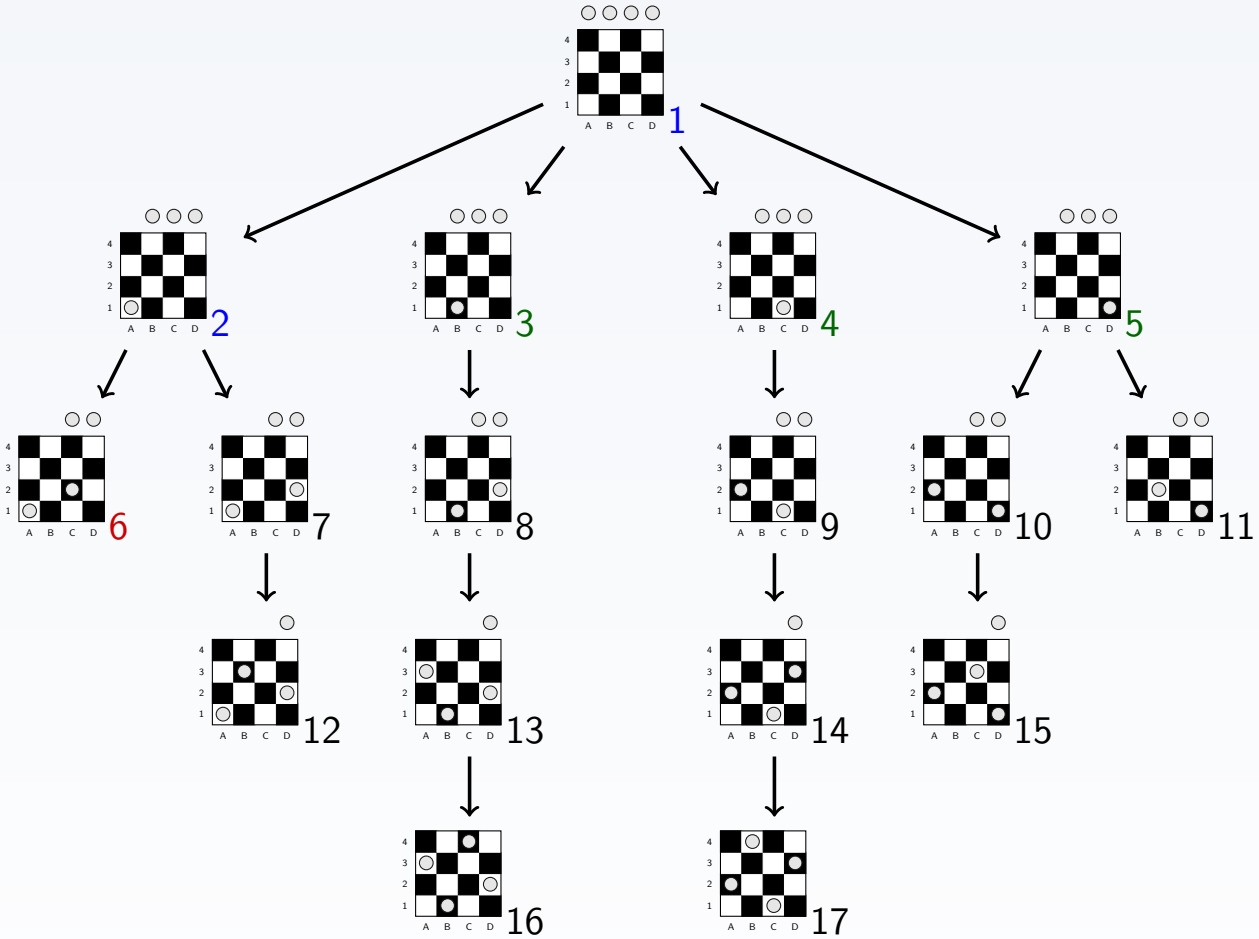
Beispiel Tiefensuche



2. Knoten

$K := (2, [1]) \quad R := [(3, [1]), (4, [1]), (5, [1])]$
$NF(2) = [6, 7]$
$L := [(6, [1, 2]), (7, [1, 2])]$++$R = [(6, [1, 2]), (7, [1, 2]), (3, 1), (4, 1), (5, 1)]$

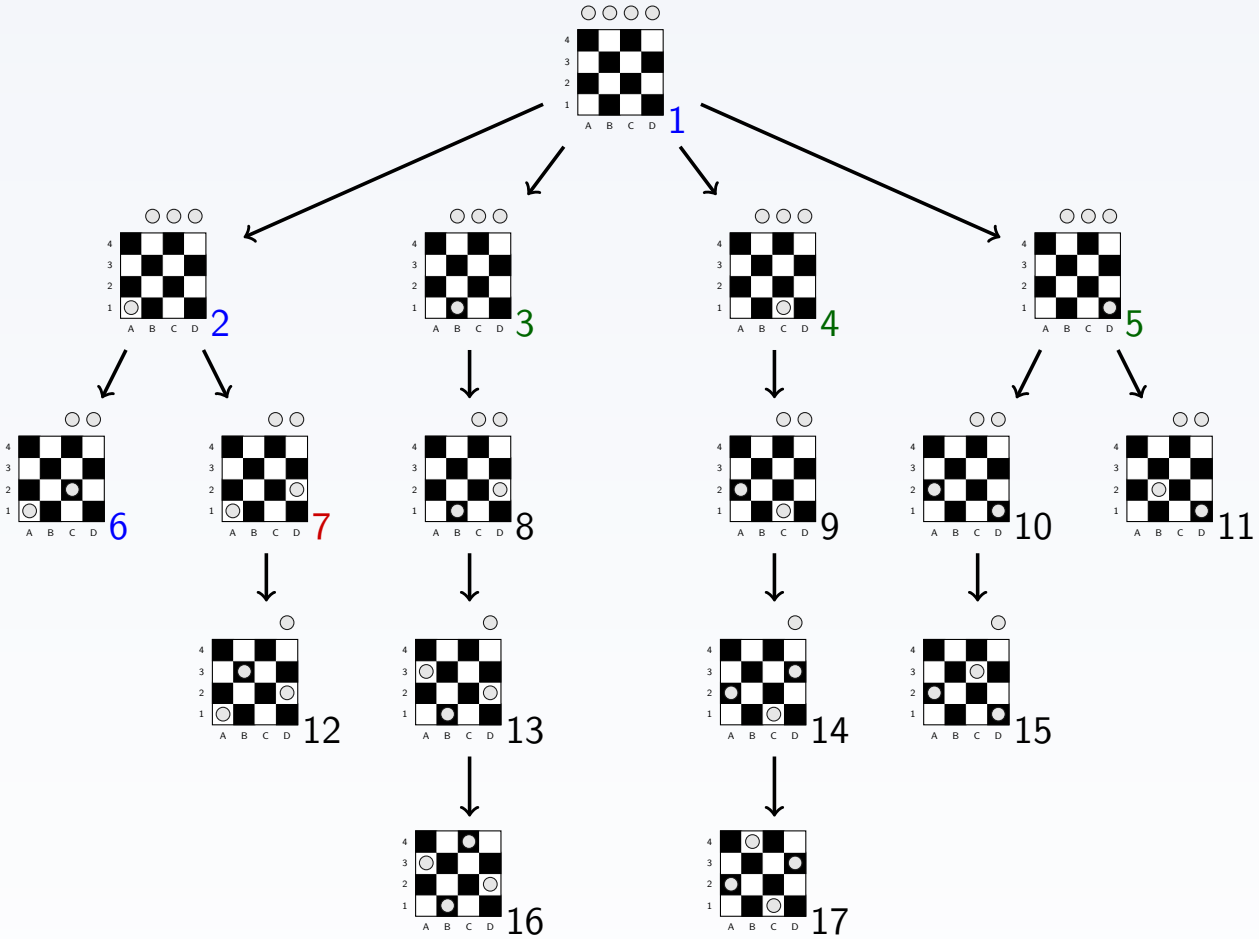
Beispiel Tiefensuche



3. Knoten

$K := (6, [1, 2])$ $R := [(7, [1, 2]), (3, [1]), (4, [1]), (5, [1])]$
$NF(6) = []$
$L := []$++$R = [(7, [1, 2]), (3, [1]), (4, [1]), (5, [1])]$

Beispiel Tiefensuche



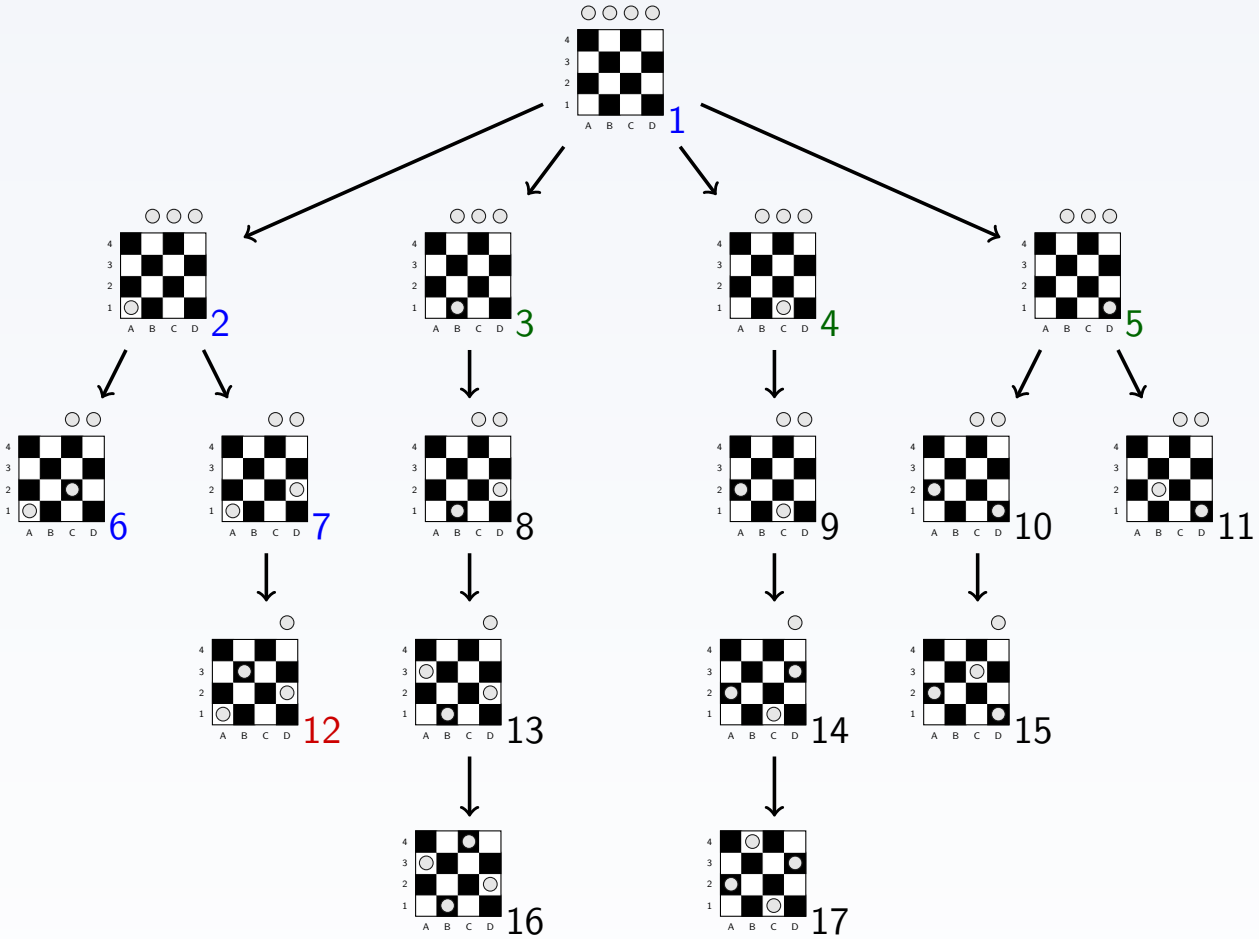
4. Knoten

$K := (7, [1, 2])$ $R := [(3, [1]), (4, [1]), (5, [1])]$

$NF(7) = [12]$

$L := [(12, [1, 2, 7])]$++$R = [(12, [1, 2, 7]), (3, [1]), (4, [1]), (5, [1])]$

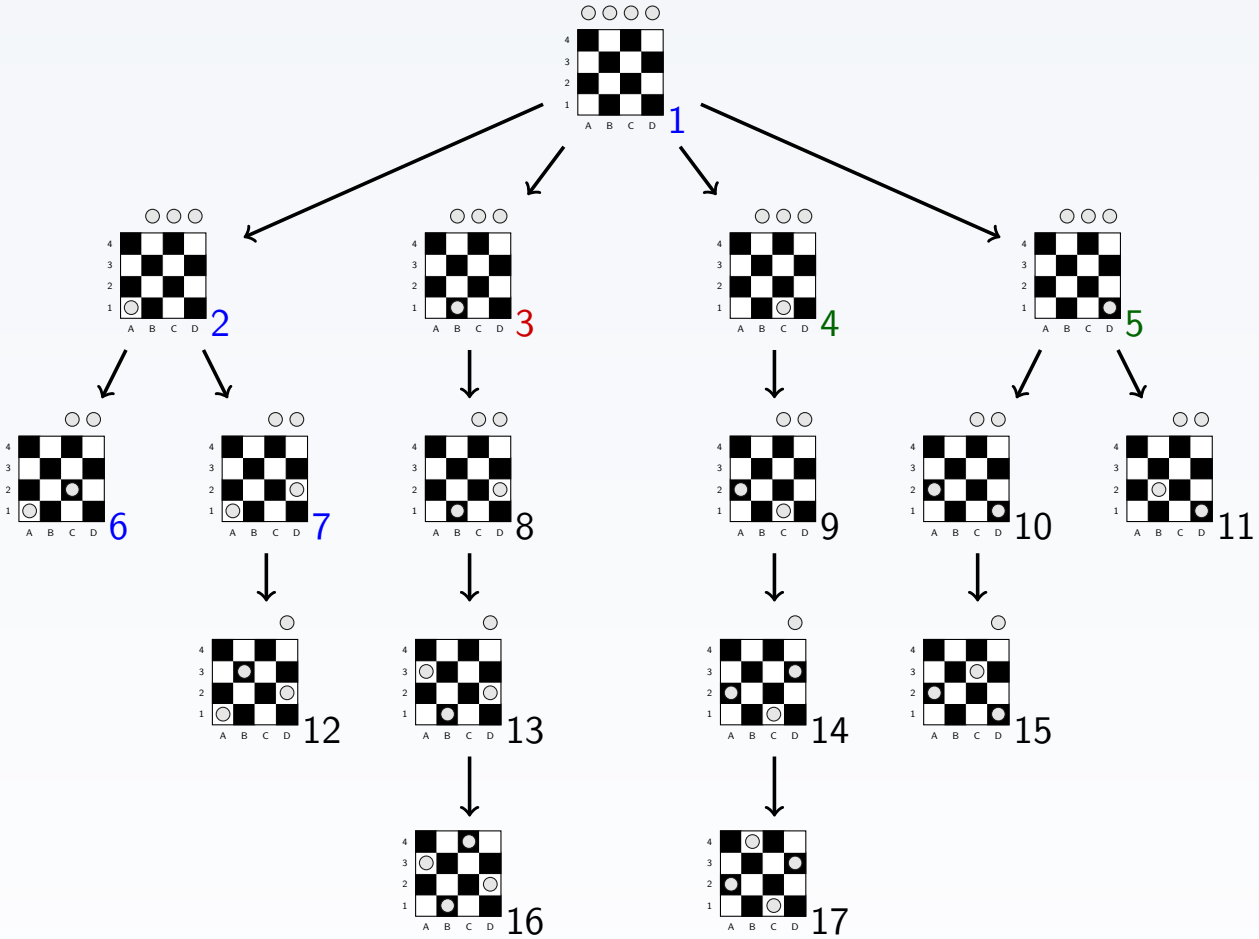
Beispiel Tiefensuche



5. Knoten

$K := (12, [1, 2, 7]) \quad R := [(3, [1]), (4, [1]), (5, [1])]$
$NF(12) = []$
$L := []{+}{+}R = [(3, [1]), (4, [1]), (5, [1])]$

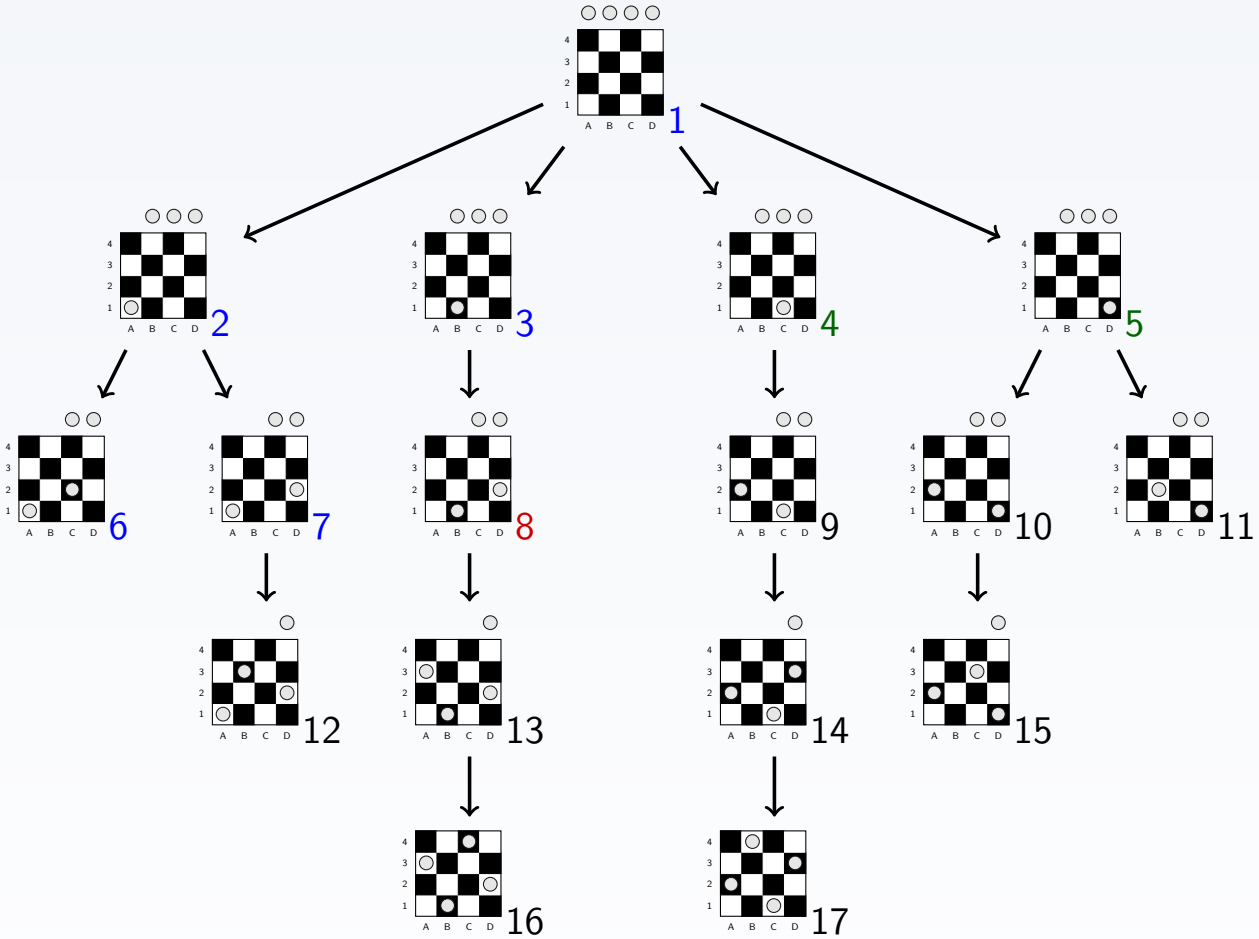
Beispiel Tiefensuche



6. Knoten

$K := (3, [1]) \quad R := [(4, [1]), (5, [1])]$
$NF(3) = [8]$
$L := [(8, [1, 3])] ++ R = [(8, [1, 3]), (4, [1]), (5, [1])]$

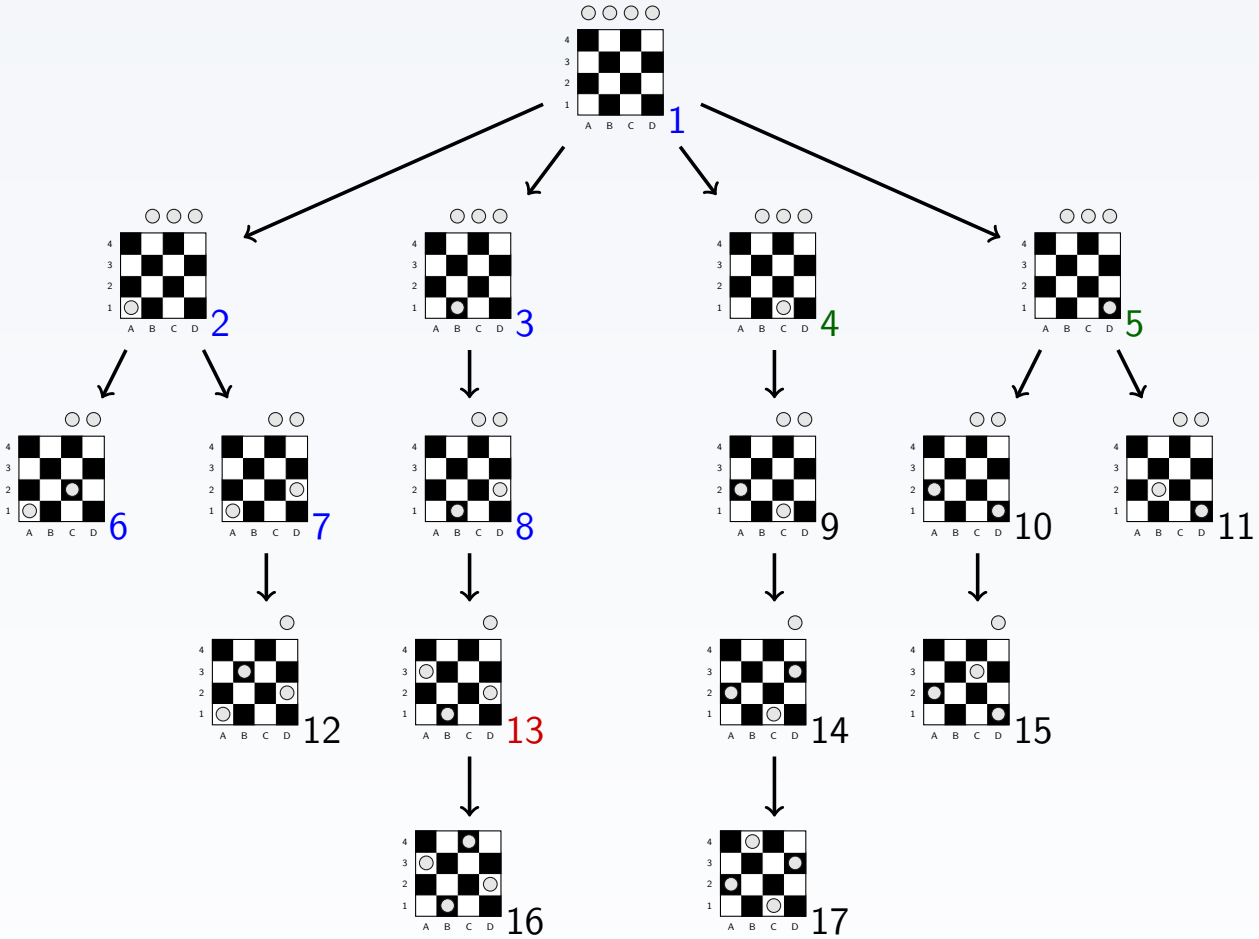
Beispiel Tiefensuche



7. Knoten

$K := (8, [1, 3])$ $R := [(4, [1]), (5, [1])]$
$NF(8) = [13]$
$L := [(13, [1, 3, 8])]$++$R = [(13, [1, 3, 8]), (4, [1]), (5, [1])]$

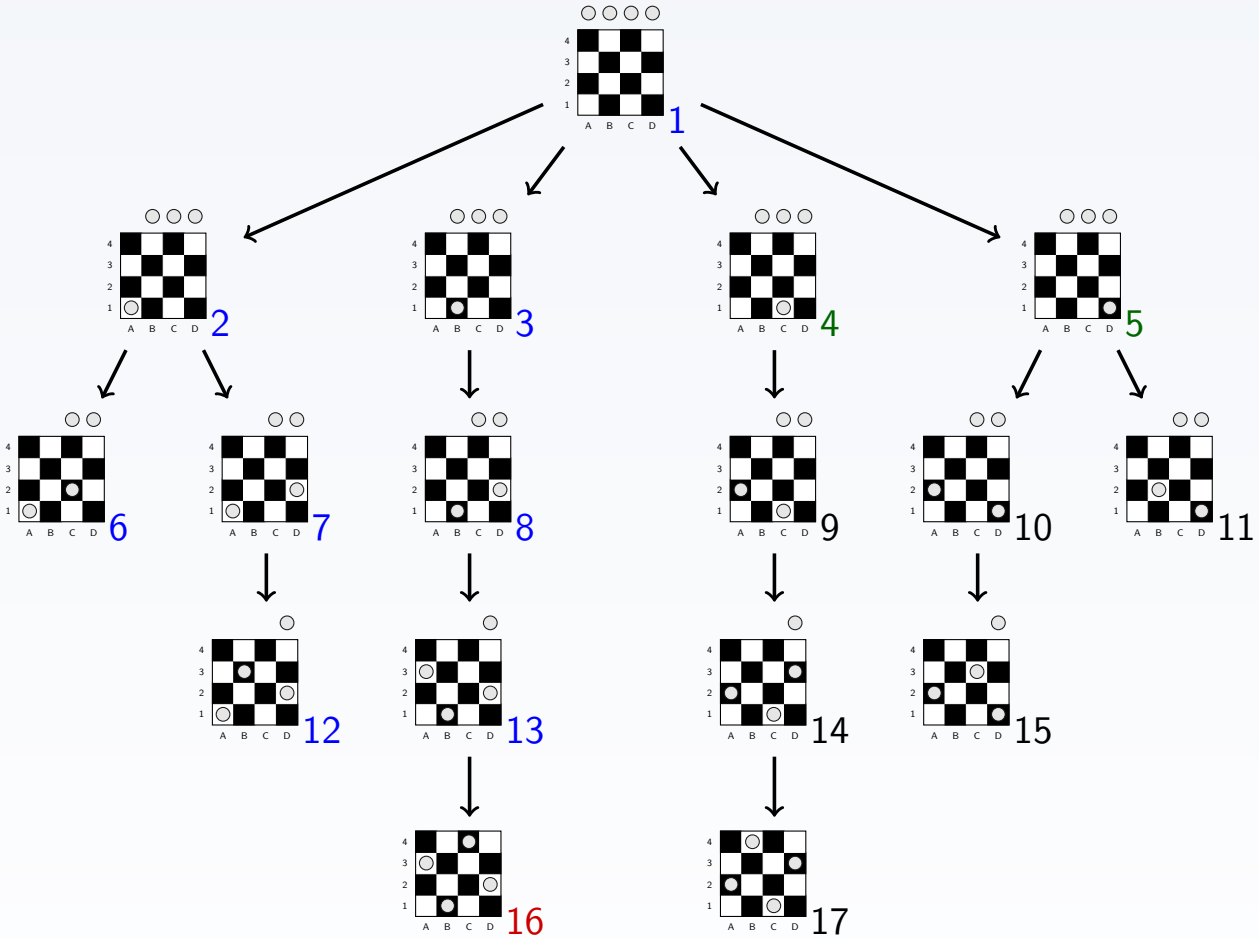
Beispiel Tiefensuche



8. Knoten

$K := (13, [1, 3, 8])$ $R := [(4, [1]), (5, [1])]$
$NF(13) = [16]$
$L := [(16, [1, 3, 8, 13])]$++$R = [(16, [1, 3, 8, 13]), (4, [1]), (5, [1])]$

Beispiel Tiefensuche



9. Knoten

$K := (16, [1, 3, 8, 13])$ $R := [(4, [1]), (5, [1])]$

$Ziel(16) ==$ `True` $\Rightarrow$ gebe 1,3,8,13,16 aus

Tiefensuche in Haskell


```
dfs ::(a -> Bool)      -- Zieltest (goal)
    -> (a -> [a])      -- Nachfolgerfunktion (succ)
    -> [a]             -- Startknoten
    -> Maybe (a, [a]) -- Ergebnis: Just (Zielknoten,Pfad)
                       -- oder Nothing

dfs goal succ stack =
  -- Einfuegen der Anfangspfade, dann mit iterieren mit go
  go [(k,[k]) | k <- stack]
 where
  go [] = Nothing -- Alles abgesucht, nichts gefunden
  go ((k,p):r)
   | goal k    = Just (k,p) -- Ziel gefunden
   | otherwise = go ([(k',k':p) | k' <- succ k] ++ r)
```

Eigenschaften der Tiefensuche

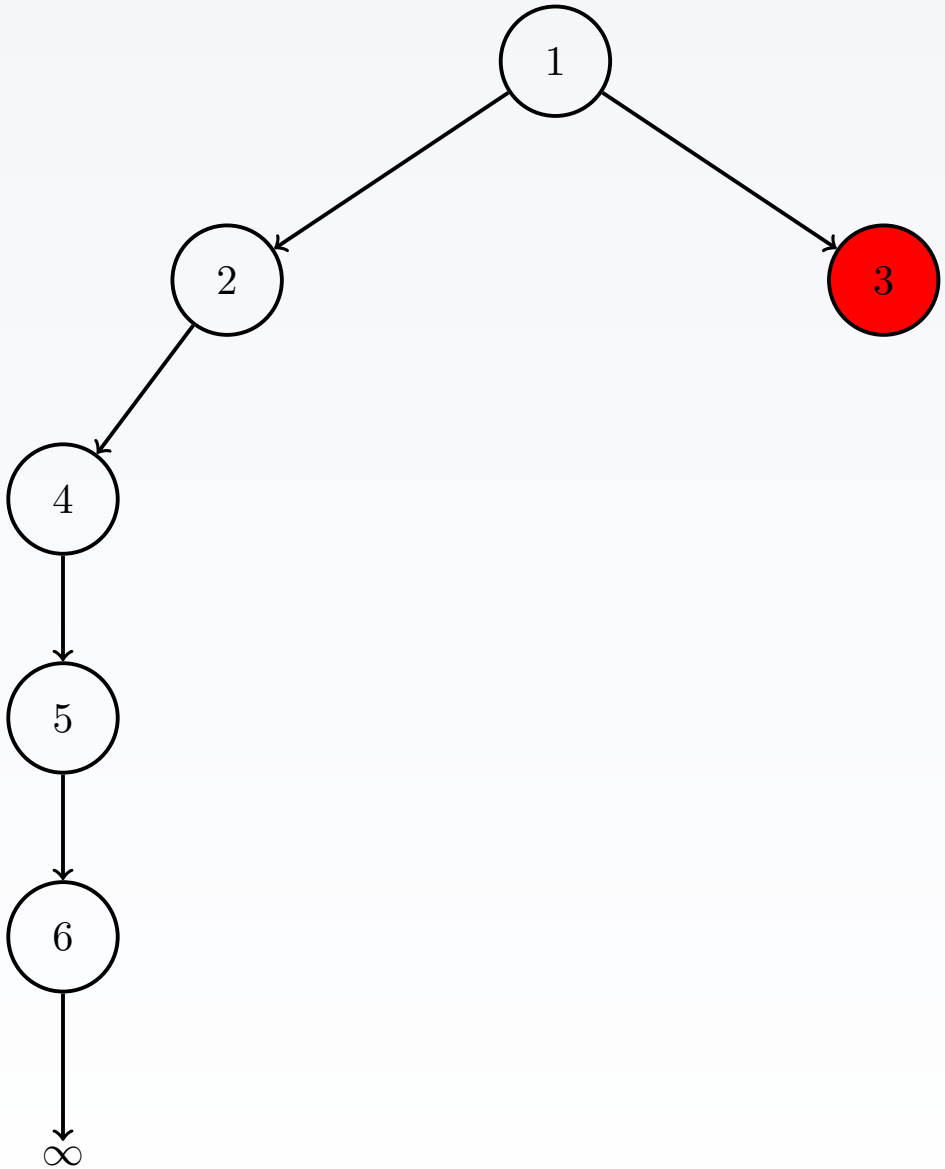
Komplexität (worst-case) bei fester Verzweigungrate $c > 1$:

- **Platz**: linear in der Tiefe
- **Zeit**: exponentiell in der Tiefe des Zielknotens

Vollständigkeit:

- Nicht vollständig, wenn der Suchgraph unendlich groß ist

Unvollständigkeit der Tiefensuche



Zielknoten 3 wird nie besucht!

Varianten der Tiefensuche

Tiefensuche mit Tiefenbeschränkung k

- Wenn Tiefe k überschritten, setze $NF(K) = \emptyset$
- Findet Zielknoten, die maximal in Tiefe k liegen

In Haskell:

```
dfsBisTiefe goal succ stack maxdepth =
  -- wir speichern die Tiefe mit in den Knoten auf dem Stack:
  go   [(k,maxdepth,[k]) | k <- stack]
 where
  go [] = Nothing -- Alles abgesucht, nichts gefunden
  go ((k,i,p):r)
   | goal k = Just (k,p) -- Ziel gefunden
   | i > 0  = go ([(k',i -1, k':p) | k' <- succ k] ++ r)
   | otherwise =  go r -- Tiefenschranke erreicht
```

Varianten der Tiefensuche (2)

Tiefensuche mit Sharing

- Merke bereits besuchte Knoten, um Knoten nicht doppelt zu besuchen (bei zyklischen Suchgraphen!)
- Speichern der besuchten Knoten: Hashtabelle
- Platz: Anzahl der besuchten Knoten (wegen Speicher für schon untersuchte Knoten)
- Zeit: $n * \log(n)$ mit $n =$ Anzahl der untersuchten Knoten.
- Pragmatische Verbesserung: Nur maximal l viele Knoten speichern (damit der Platz beschränkt ist)

Tiefensuche mit Sharing

```
dfsSharing goal succ stack =
  -- Einfuegen der Anfangspfade, dann mit iterieren mit go,
  -- letzes Argument ist die Merkliste
  go [(k,[k]) | k <- stack] []
 where
  go [] mem = Nothing -- Alles abgesucht, nichts gefunden
  go ((k,p):r) mem
   | goal k    = Just (k,p) -- Ziel gefunden
   | k `elem` mem = go r mem -- Knoten schon besucht
   | otherwise    = go ([(k',k':p) | k' <- succ k] ++ r) (k:mem)
```

Varianten beim Backtracking

Vorgestelltes Verfahren

- Chronologisches Backtracking

Varianten

- Dynamic Backtracking
- Dependency-directed Backtracking

Abkürzungen, wenn sichergestellt ist, dass kein Zielknoten übersehen wird.

Breitensuche

Algorithmus **Breitensuche**

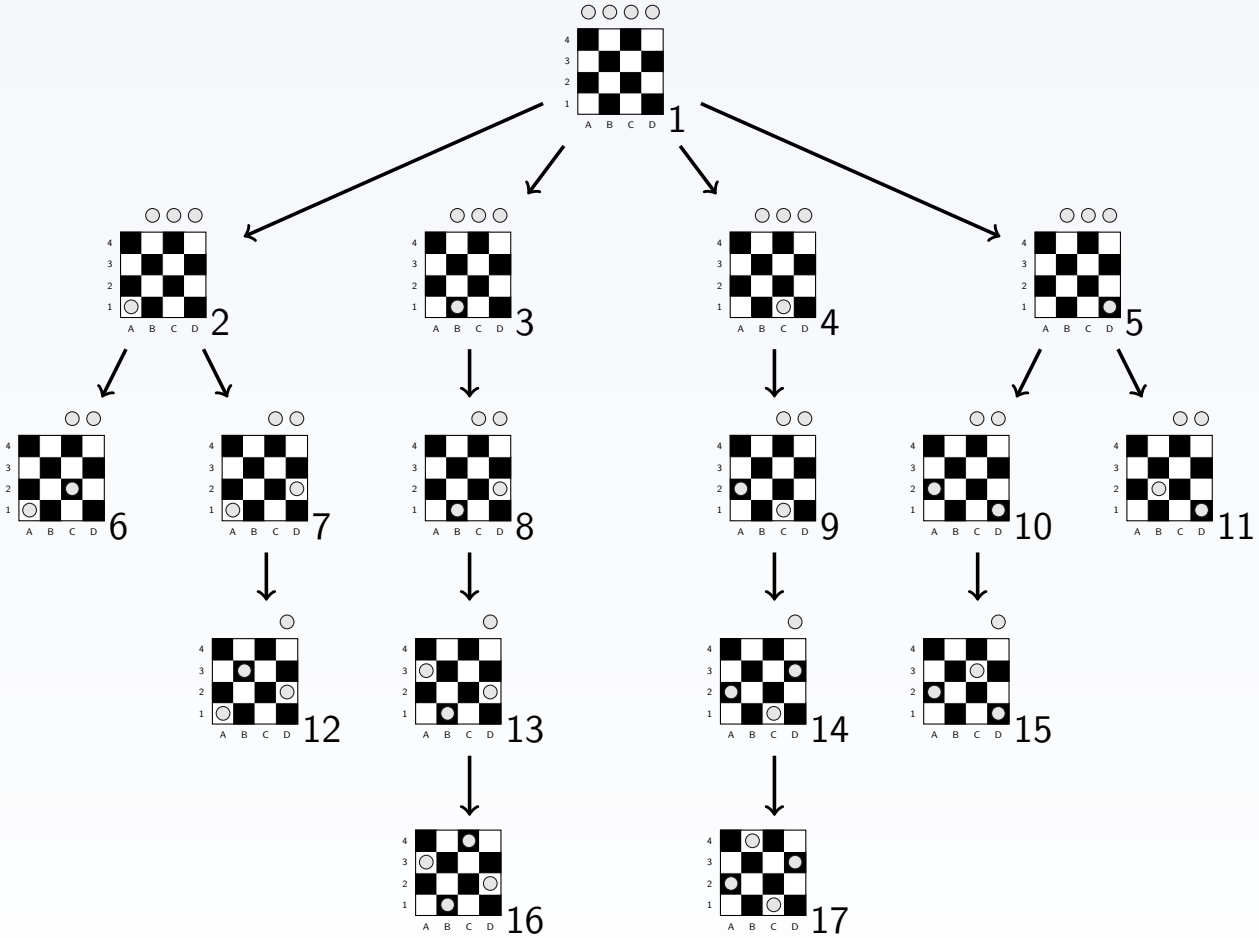
Datenstrukturen: L = Menge von Knoten markiert mit Weg

Eingabe: Füge die initialen Knoten in die Menge$L$ ein.

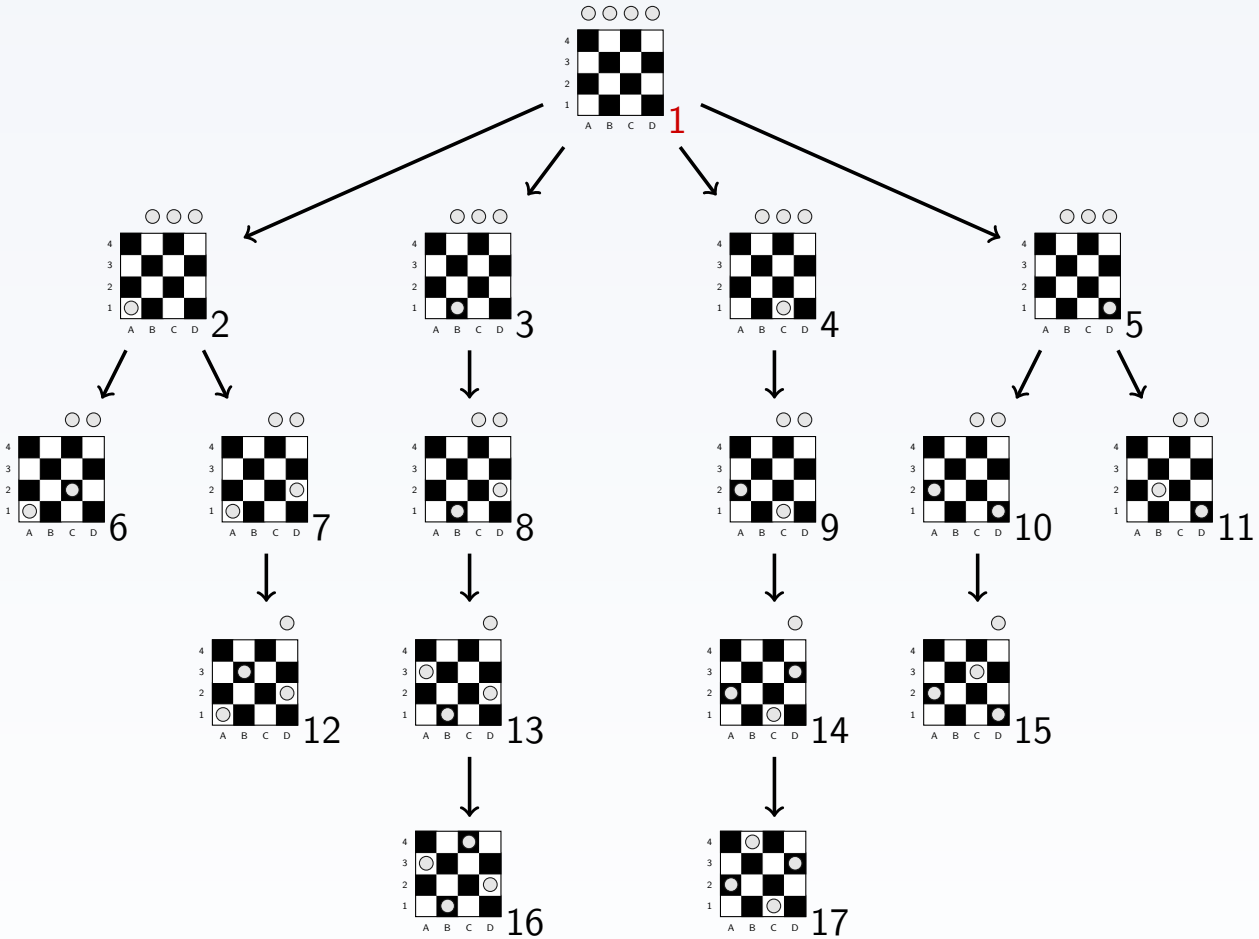
Algorithmus:

1. Wenn L leer ist, dann breche ab.
2. Wenn L einen Zielknoten K enthält, dann gebe aus: K und Weg dorthin.
3. Sonst, sei $N(L)$ Menge aller direkten Nachfolger der Knoten von L, mit einem Weg dorthin markiert.
   Mache weiter mit Schritt 1 und $L := N(L)$.

Beispiel Breitensuche



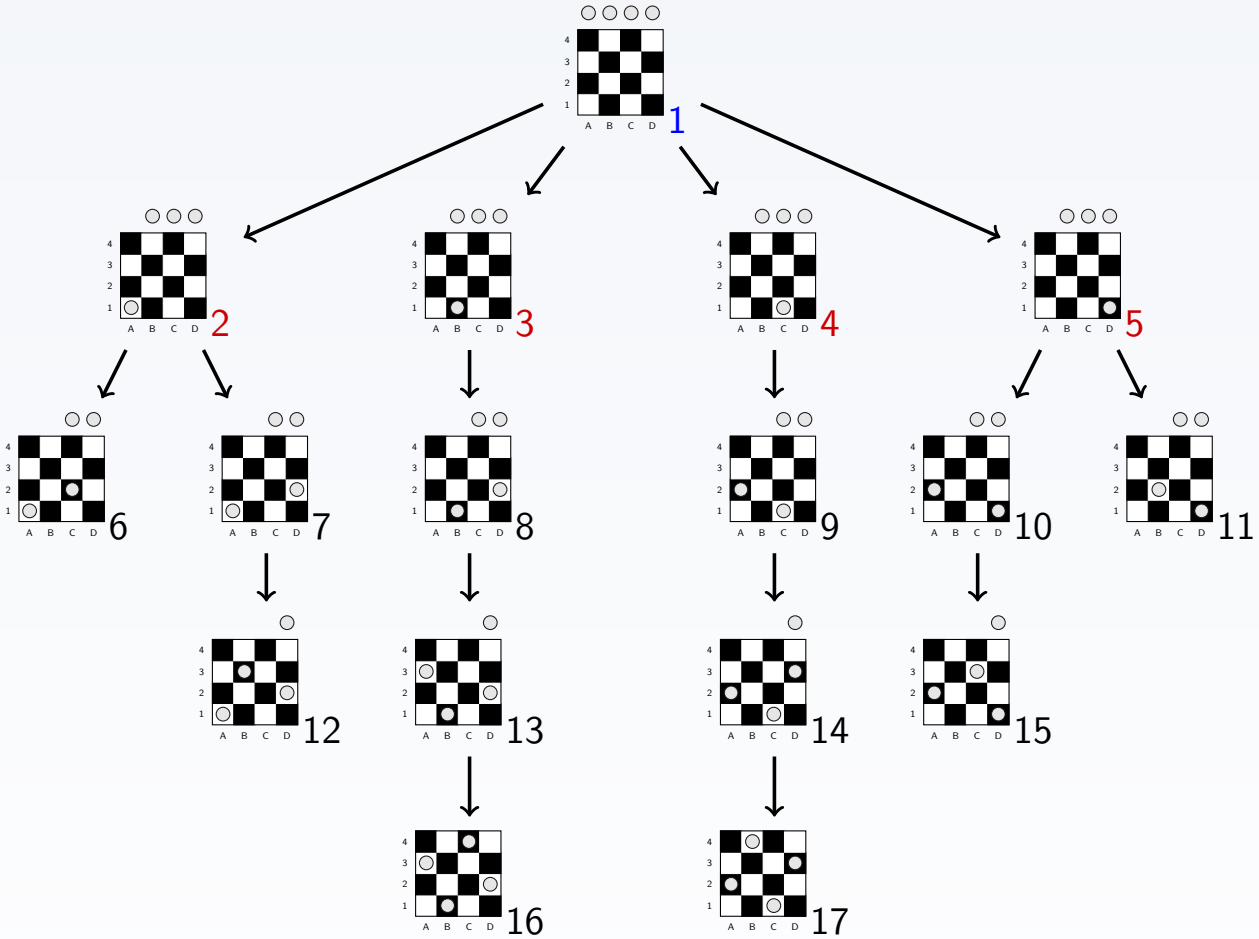
Beispiel Breitensuche



Am Anfang:

$L := \{(1, [])\}$

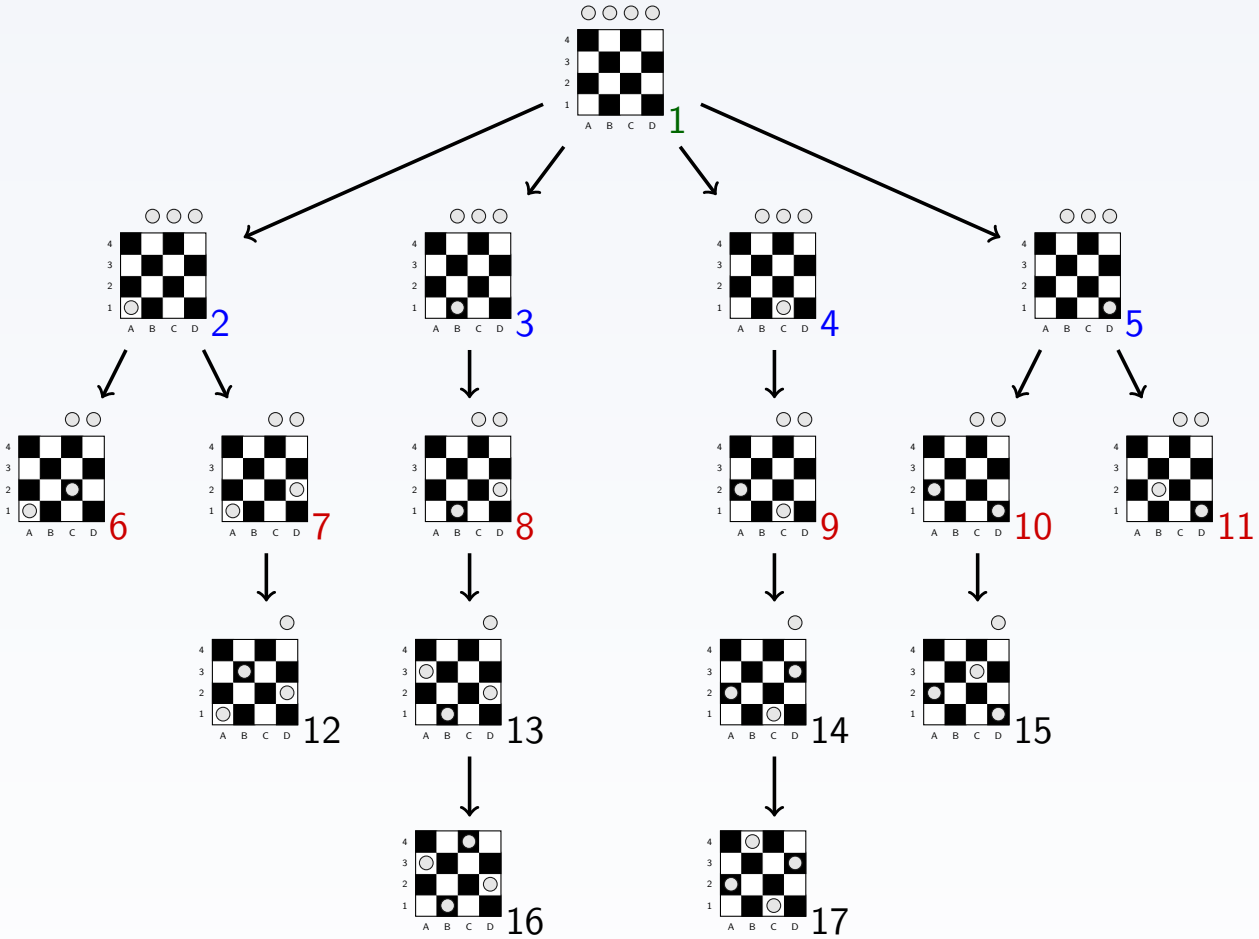
Beispiel Breitensuche



1. Iteration

$L := \{(1, [])\}$
$NF(L) = \{2, 3, 4, 5\}$
$L := \{(2, [1]), (3, [1]), (4, [1]), (5, [1])\}$

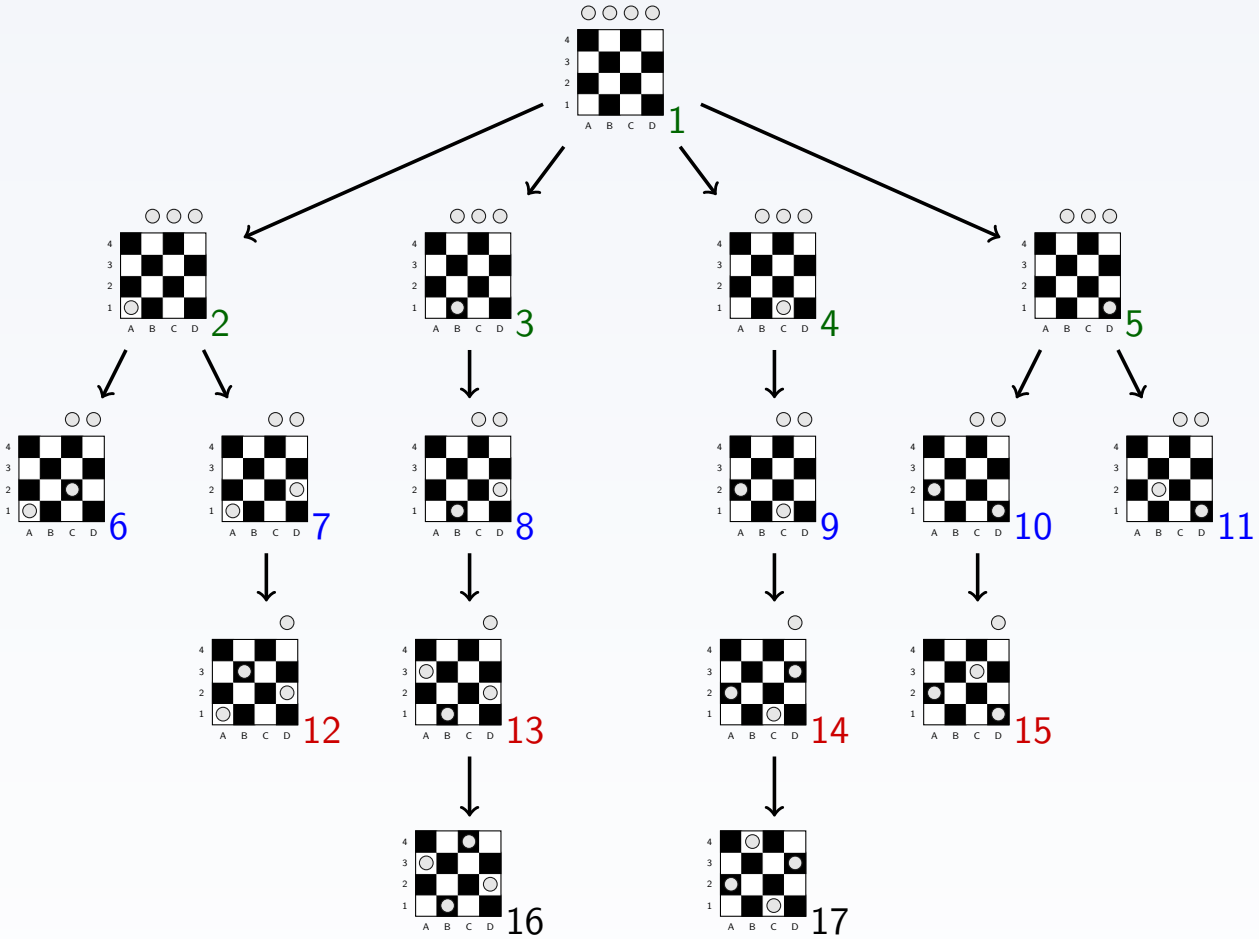
Beispiel Breitensuche



2. Iteration

$L := \{(2, [1]), (3, [1]), (4, [1]), (5, [1])\}$
$NF(L) = NF(2) \cup NF(2) \cup NF(4) \cup NF(5) = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
$L := \{(6, [1, 2]), (7, [1, 2]), (8, [1, 3]), (9, [1, 4]), (10, [1, 5]), (11, [1, 5])\}$

Beispiel Breitensuche



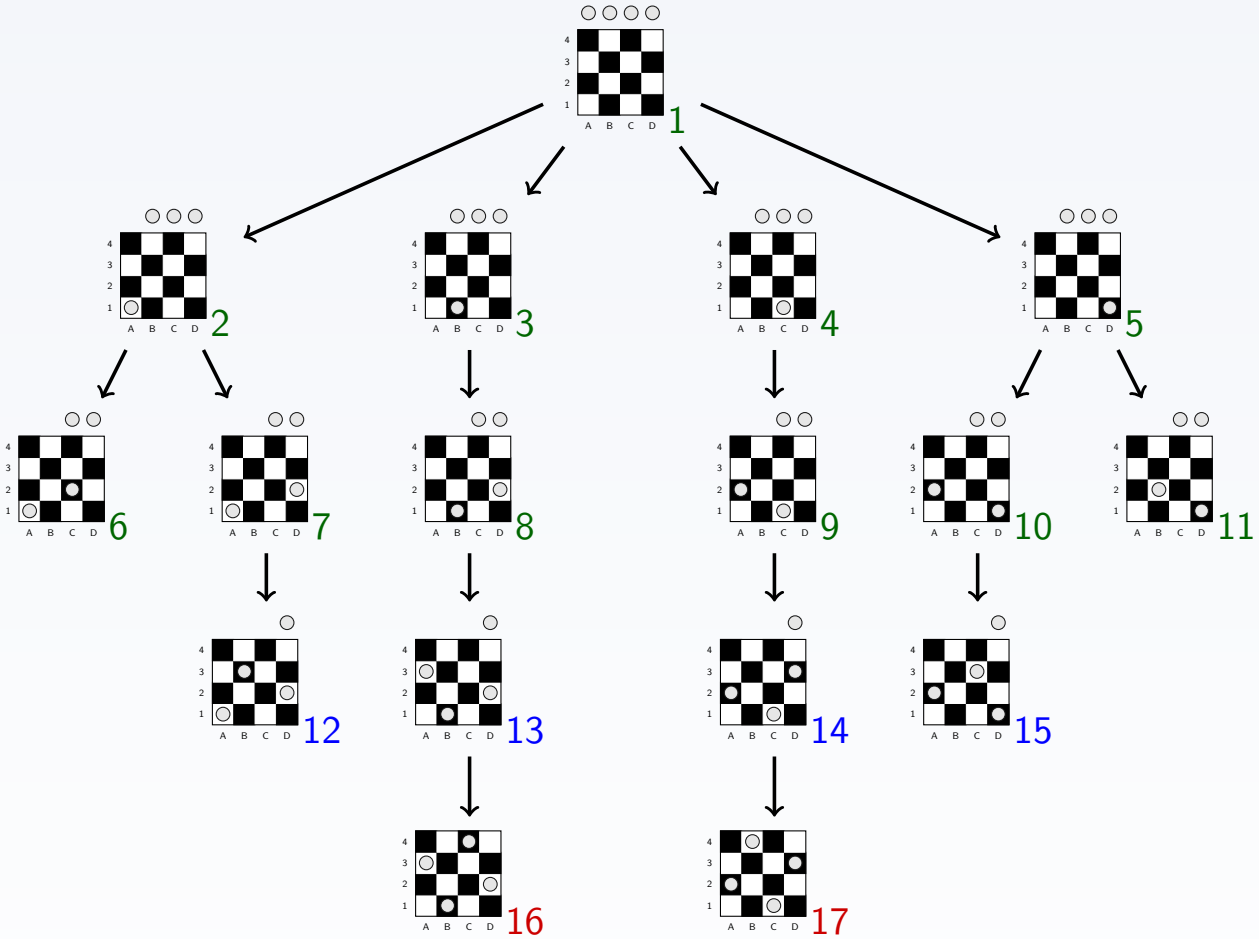
3. Iteration

$$L := \{(6, [1, 2]), (7, [1, 2]), (8, [1, 3]), (9, [1, 4]), (10, [1, 5]), (11, [1, 5])\}$$

$$NF(L) = NF(6) \cup NF(7) \cup NF(8) \cup NF(8) \cup NF(9) \cup NF(10) \cup NF(11) = \{12, 13, 14, 15\}$$

$$L := \{(12, [1, 2, 7]), (13, [1, 3, 8]), (14, [1, 4, 9]), (15, [1, 5, 10])\}$$

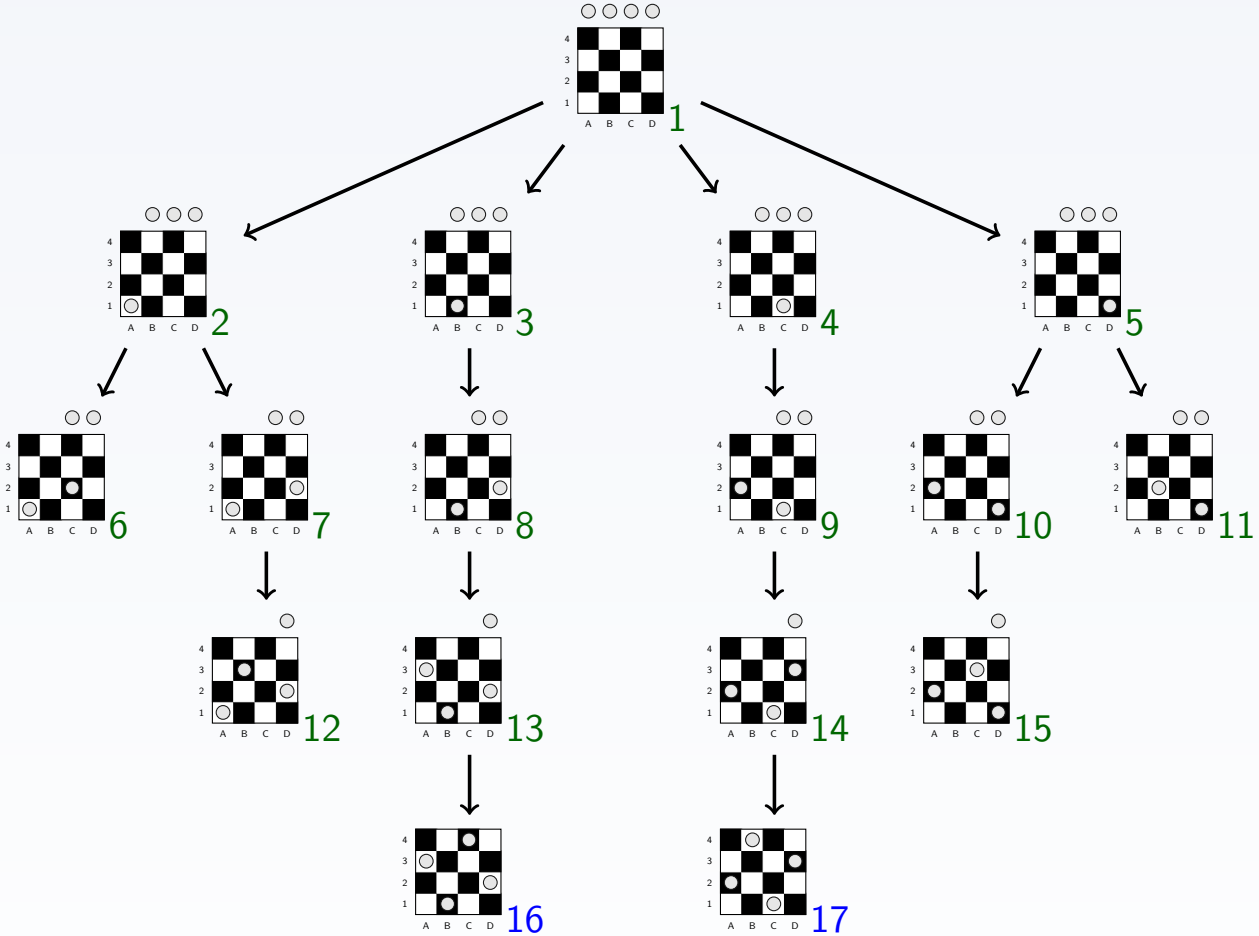
Beispiel Breitensuche



4. Iteration

$L := \{(12, [1, 2, 7]), (13, [1, 3, 8]), (14, [1, 4, 9]), (15, [1, 5, 10])\}$
$NF(L) = NF(12) \cup NF(13) \cup NF(14) \cup NF(15) = \{16, 17\}$
$L := \{(16, [1, 3, 8, 13]), (17, [1, 4, 9, 14])\}$

Beispiel Breitensuche



5. Iteration

$L := \{(16, [1, 3, 8, 13]), (17, [1, 4, 9, 14])\}$
L enhält Zielknoten $\Rightarrow$ gebe 1,3,8,13,16 aus

Breitensuche in Haskell


```
bfs goal succ start =
  go [(k,[k]) | k <- start] -- Pfade erzeugen
 where
  go [] = Nothing -- nichts gefunden
  go rs =
   case filter (goal . fst) rs of -- ein Zielknoten enthalten?
        -- Nein, mache weiter mit allen Nachfolgern
    [] -> go [(k',k':p)  | (k,p) <- rs, k' <- succ k]
        -- Ja, dann stoppe:
    (r:rs) -> Just r
```

Eigenschaften

Komplexität (worst-case) bei fester Verzweigungrate $c > 1$

- **Platz**: Anzahl der Knoten in Tiefe d, d.h. $O(c^d) =$ exponentiell in der Tiefe d!
- **Zeit**: $\underbrace{\text{Anzahl der Knoten in Tiefe } d}_{n} + \underbrace{(n \ \log \ n)}_{\text{Mengenbildung}} =$

  $O(c^d(1 + d * \log \ c))$

Vollständigkeit

- Die Breitensuche ist vollständig!
  (bei endlicher Verzweigungrate)

Fazit: Tiefen- und Breitensuche

	Tiefensuche	Breitensuche
Zeit	$O(c^d)$	$O(c^d(1 + d \log c))$
Platz	$O(d)$	$O(c^d)$
Vollständig	nein	ja

Iteratives Vertiefen

- iterative deepening
- Kompromiss a la „Vollständige Tiefensuche“

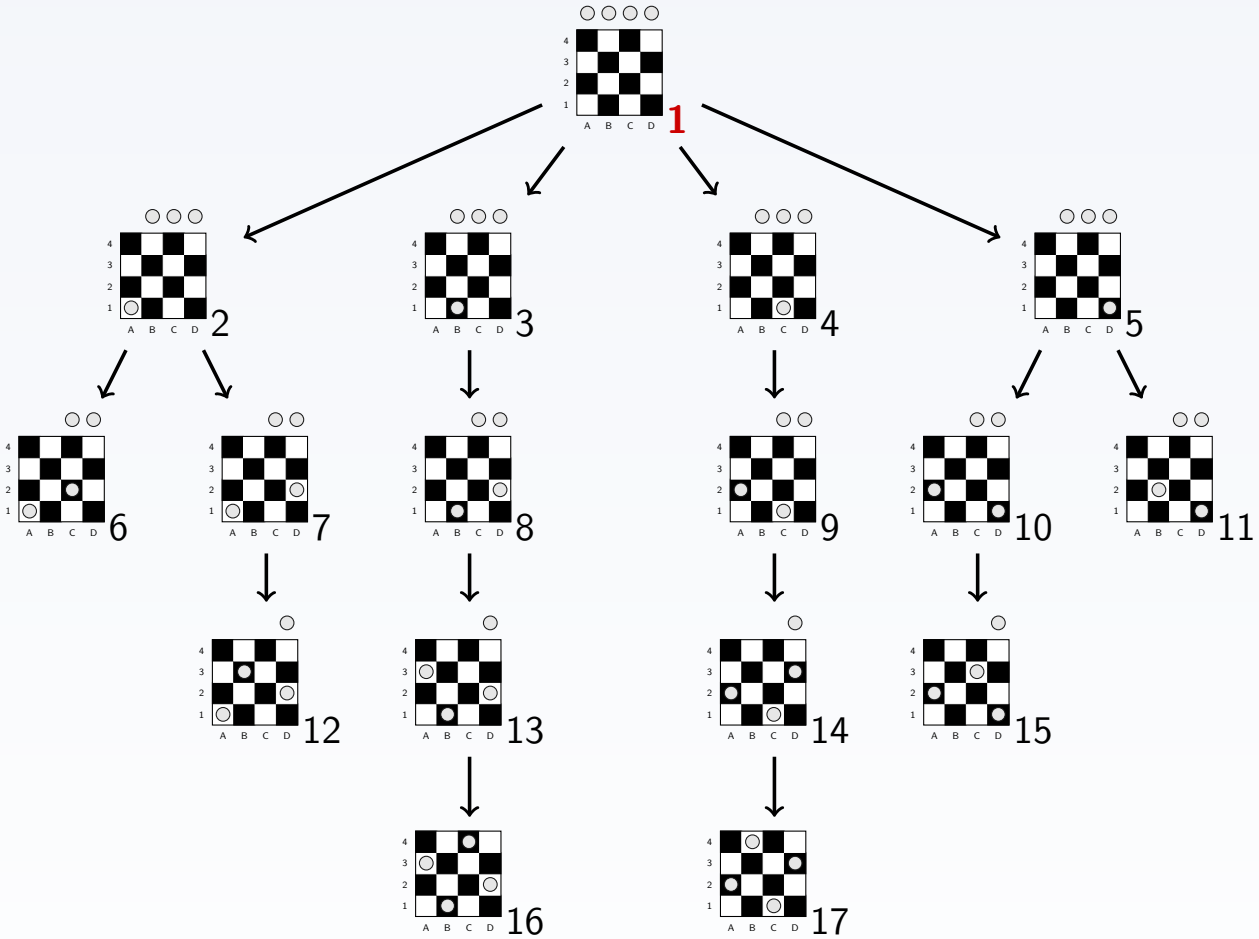
Pseudo-Algorithmus:

1. $k := 0$;
2. Tiefensuche mit Tiefenschranke k;
3. **wenn** Ziel gefunden **dann**
   breche ab, und gebe Ziel mit Weg aus
   sonst
4. $k := k + 1$;
5. gehe zu 2

Iteratives Vertiefen in Haskell


```
idfs goal succ stack =
 let -- alle Ergebnisse mit sukzessiver Erh"ohung der Tiefenschranke
     alleSuchen = [dfsBisTiefe goal succ stack i | i <- [1..]]
 in
   case filter isJust alleSuchen of
     [] -> Nothing -- Trotzdem nichts gefunden
     (r:rs) -> r   -- sonst erstes Ergebnisse
```

Beispiel: Iterative Tiefensuche

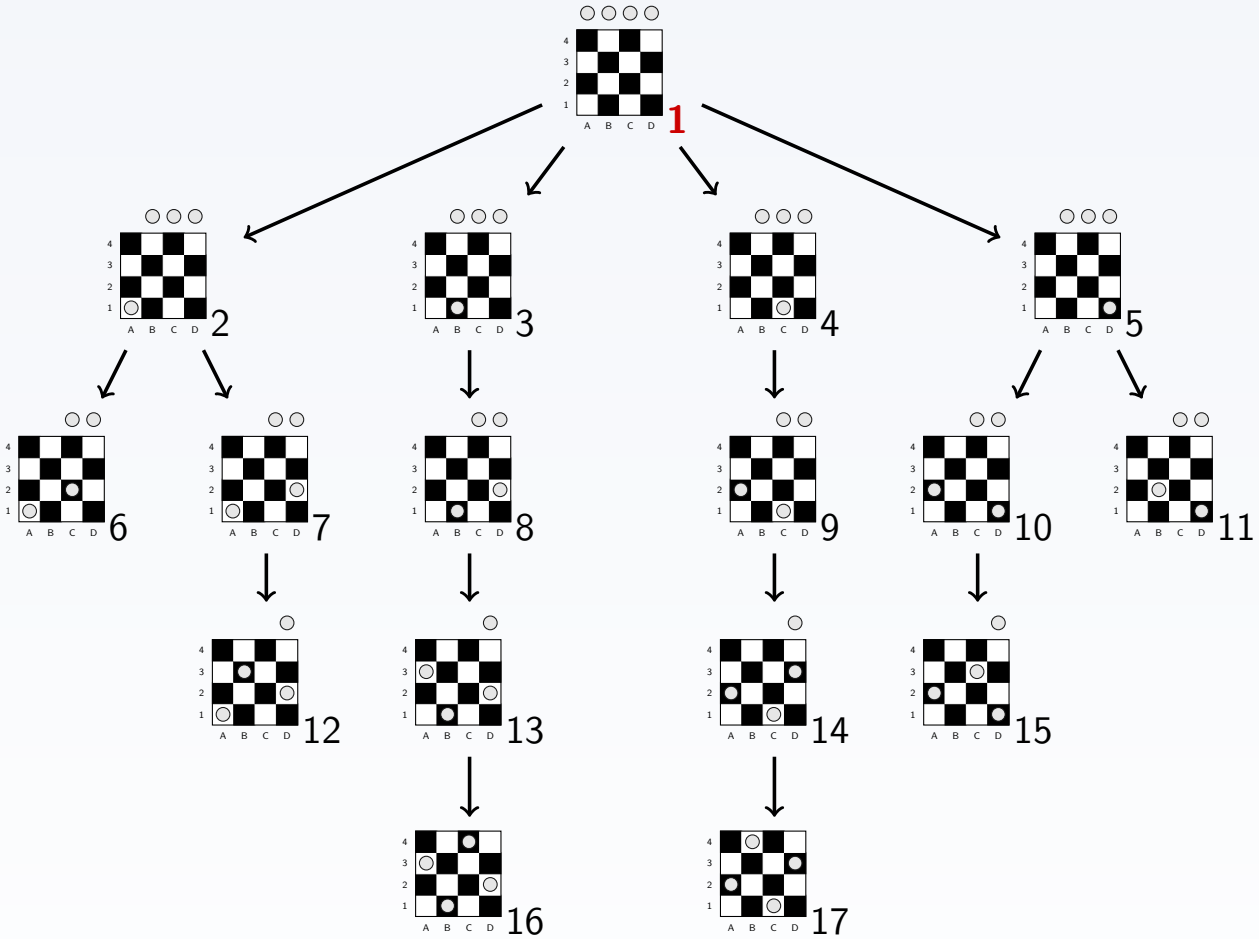


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 1$

1

Beispiel: Iterative Tiefensuche

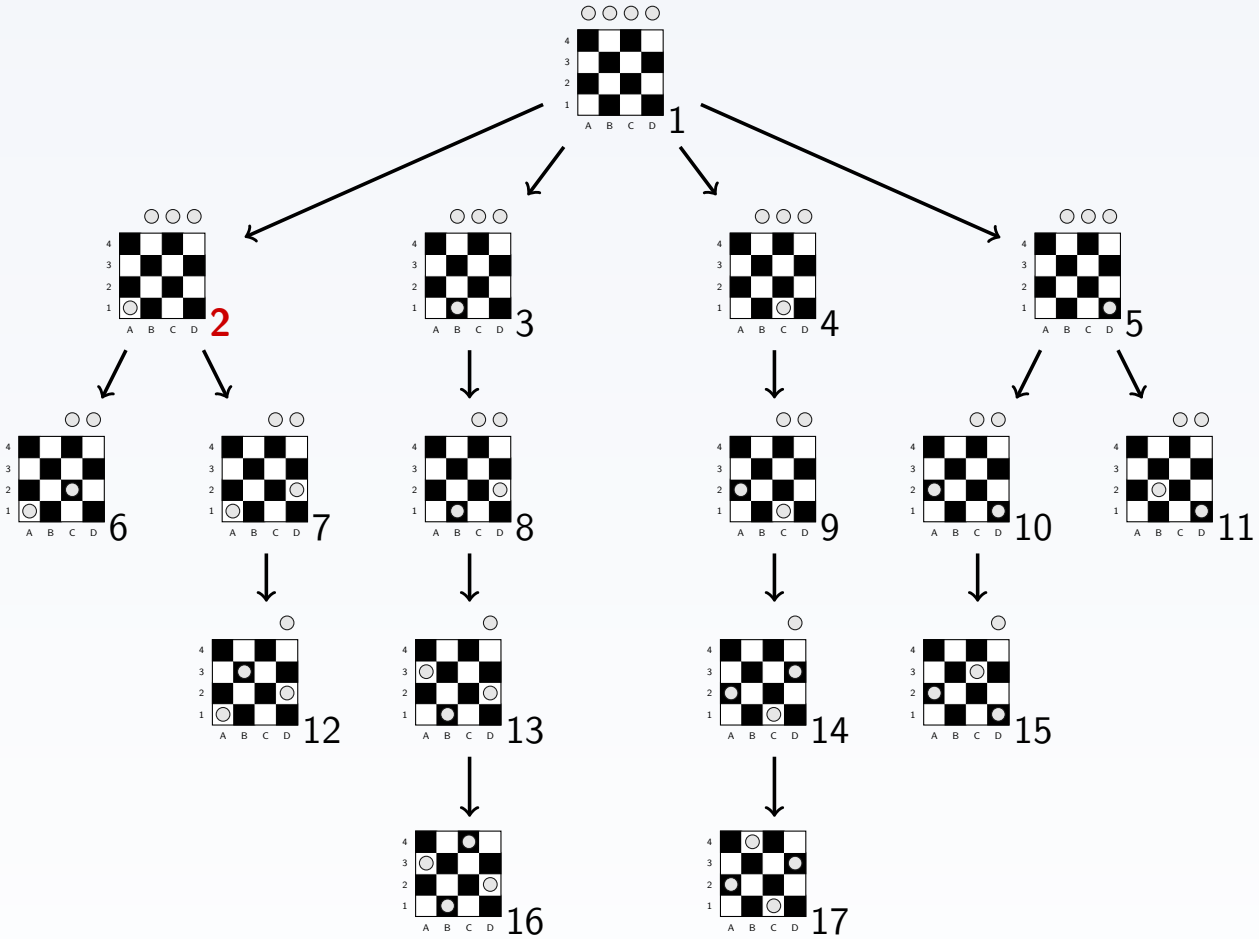


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 2$

1,2,3,4,5

Beispiel: Iterative Tiefensuche

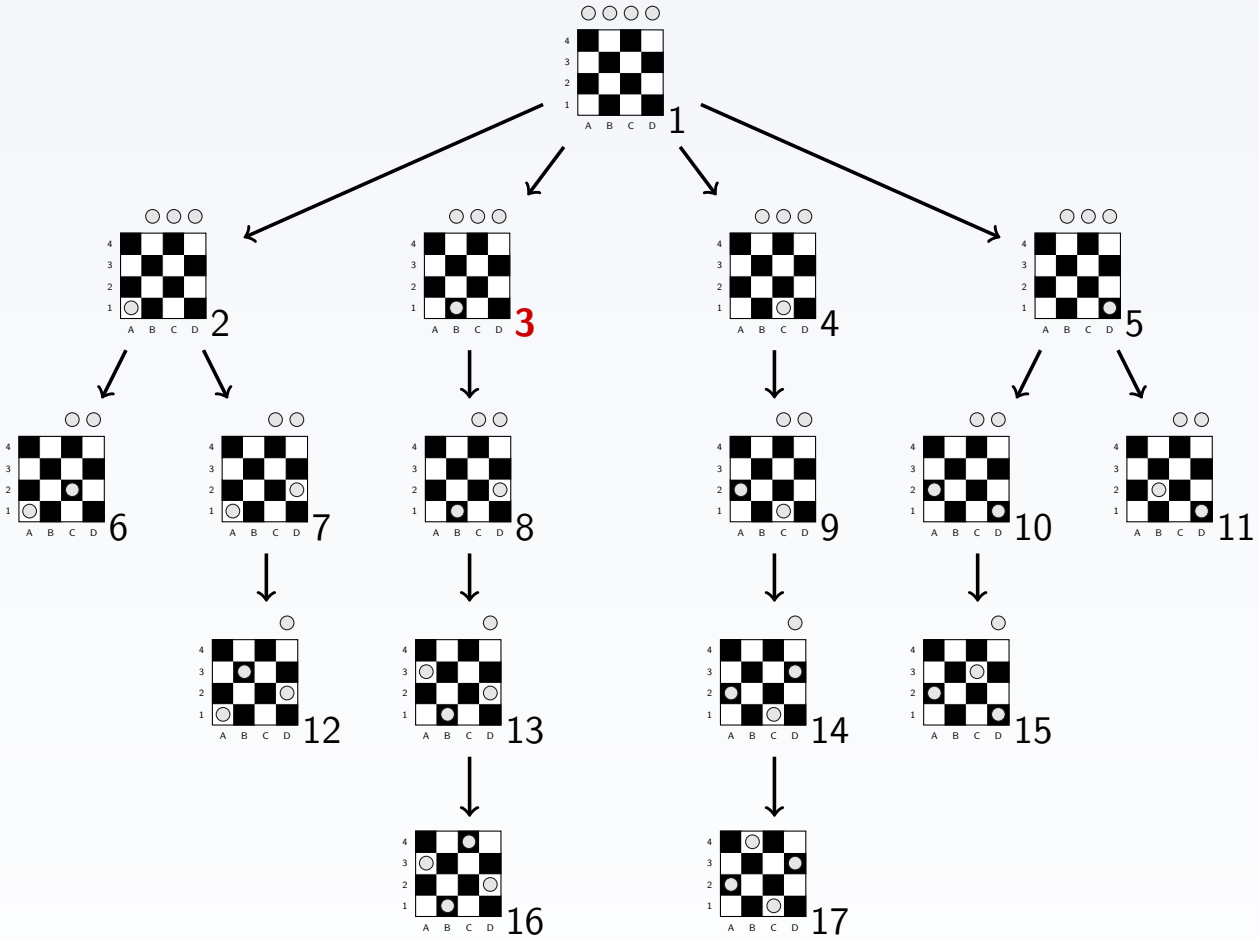


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 2$

1,2,3,4,5

Beispiel: Iterative Tiefensuche

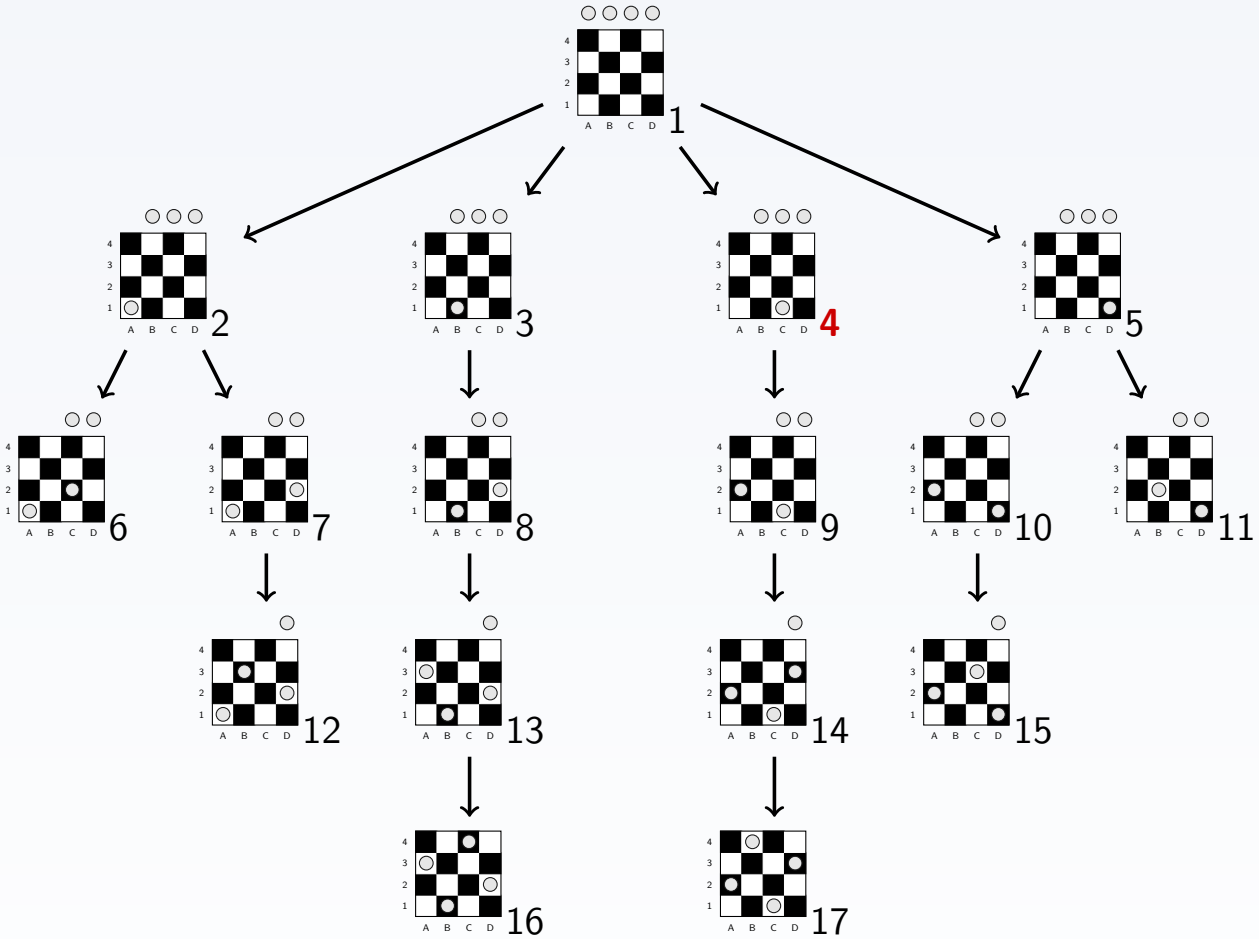


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 2$

1,2,3,4,5

Beispiel: Iterative Tiefensuche

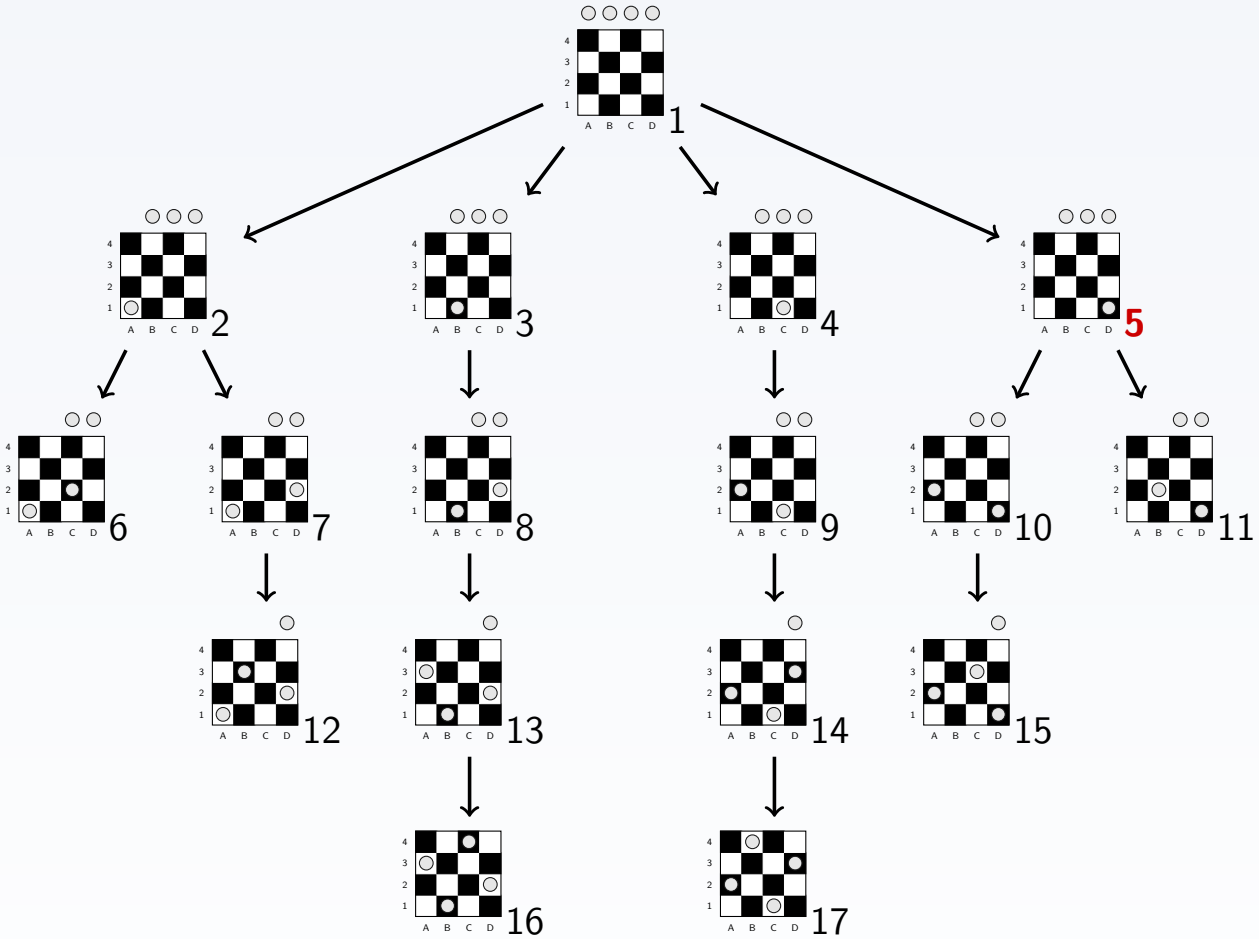


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 2$

1,2,3,4,5

Beispiel: Iterative Tiefensuche

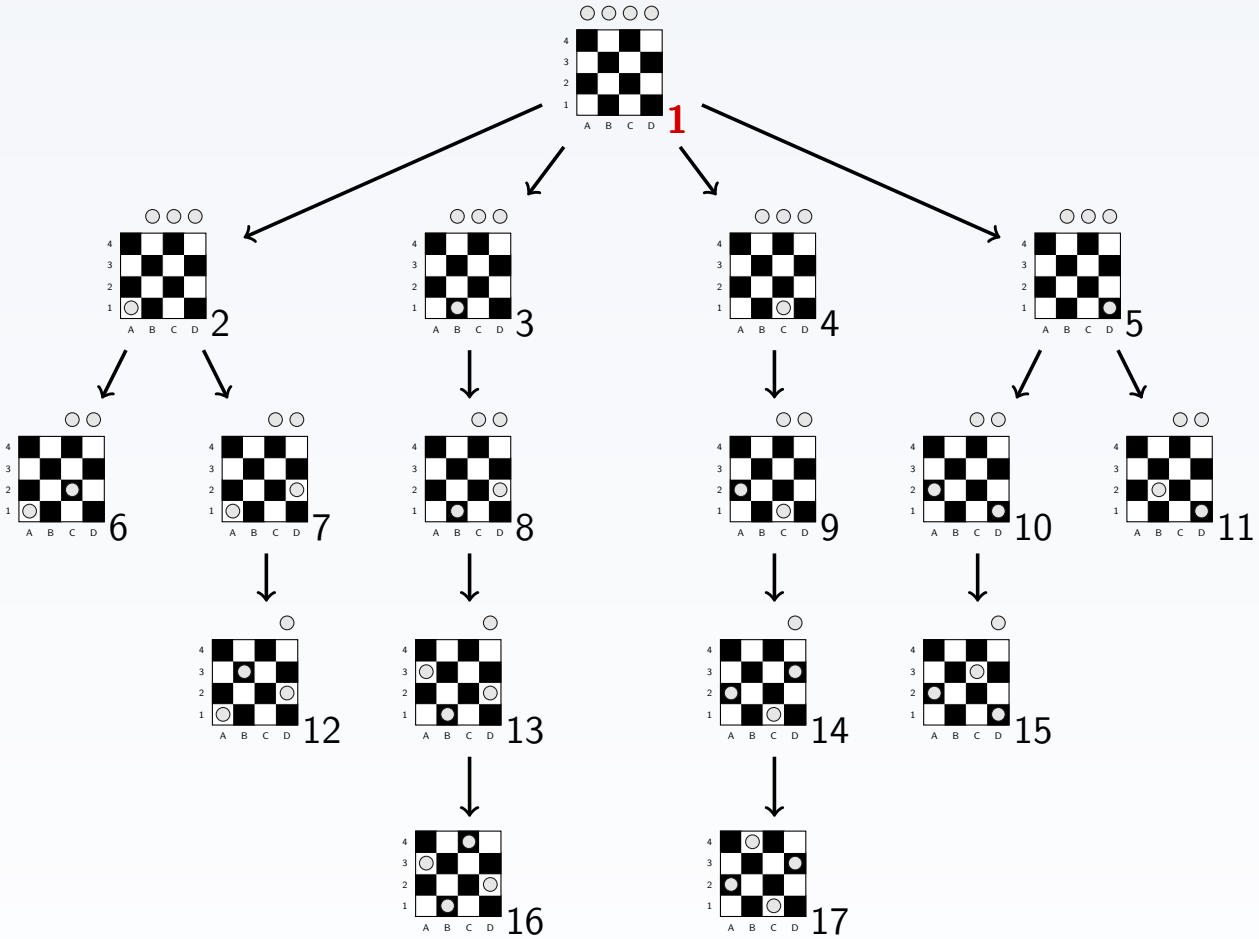


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 2$

1,2,3,4,5

Beispiel: Iterative Tiefensuche

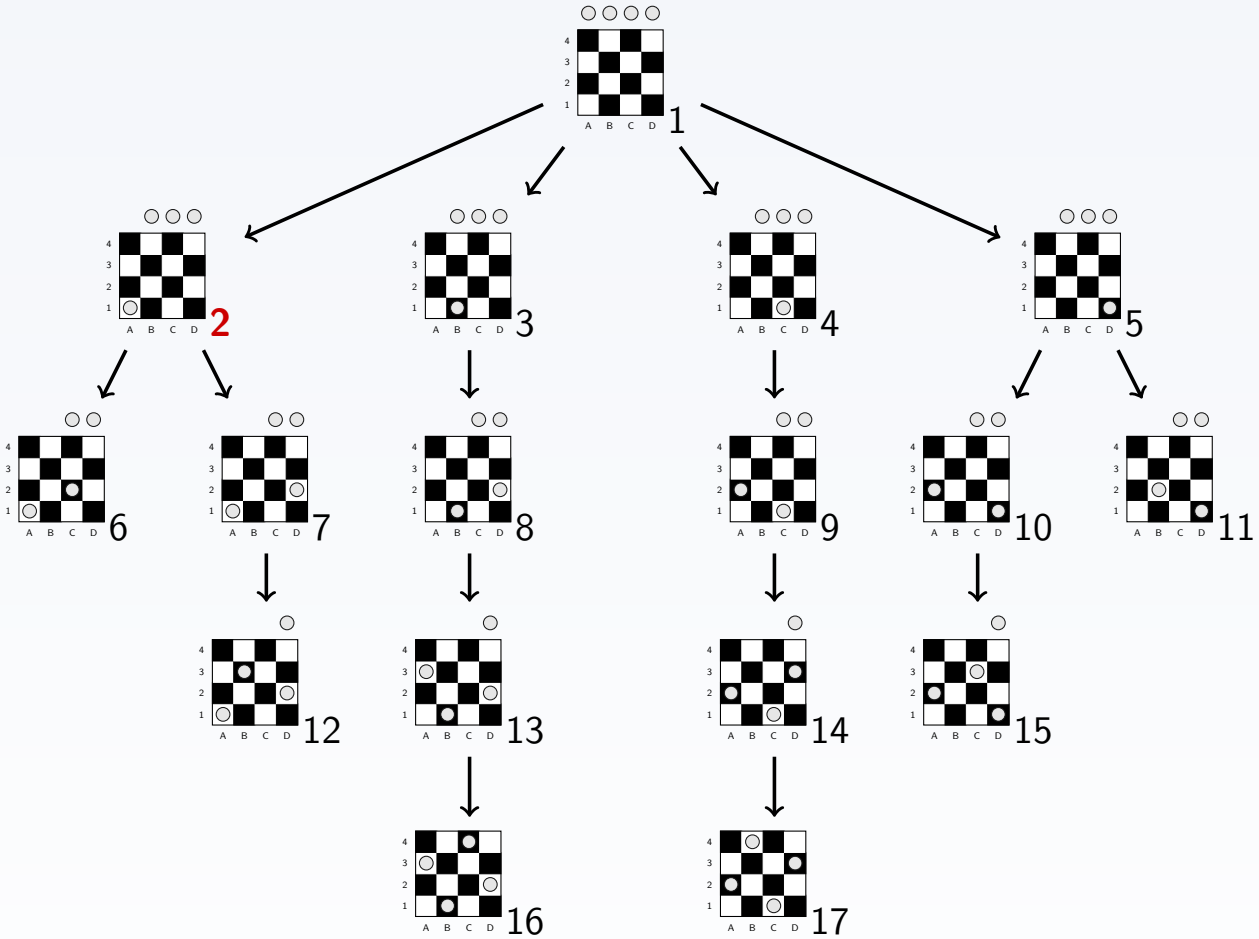


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 3$

1,2,6,7,3,8,4,9,5,10,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

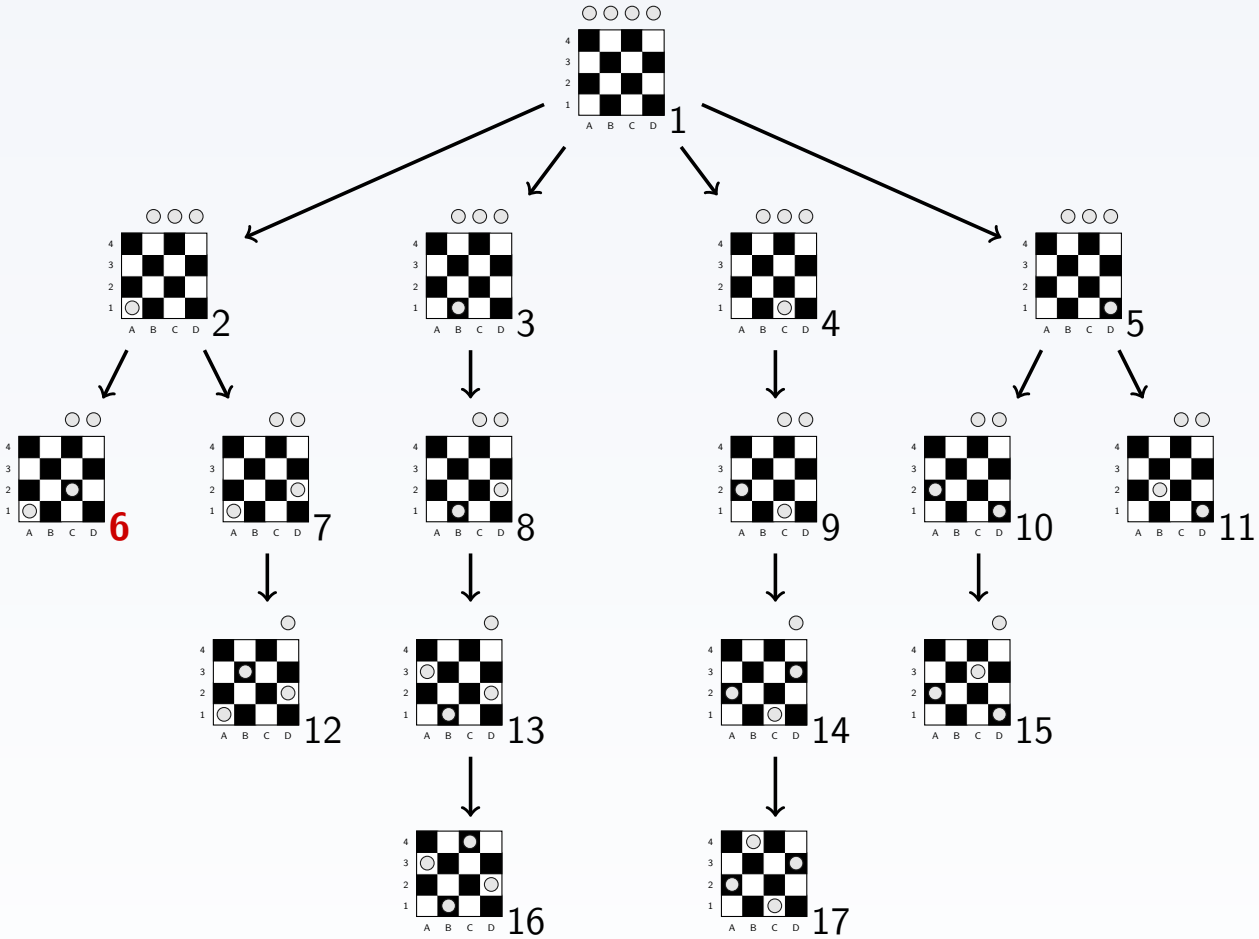


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 3$

1,2,6,7,3,8,4,9,5,10,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

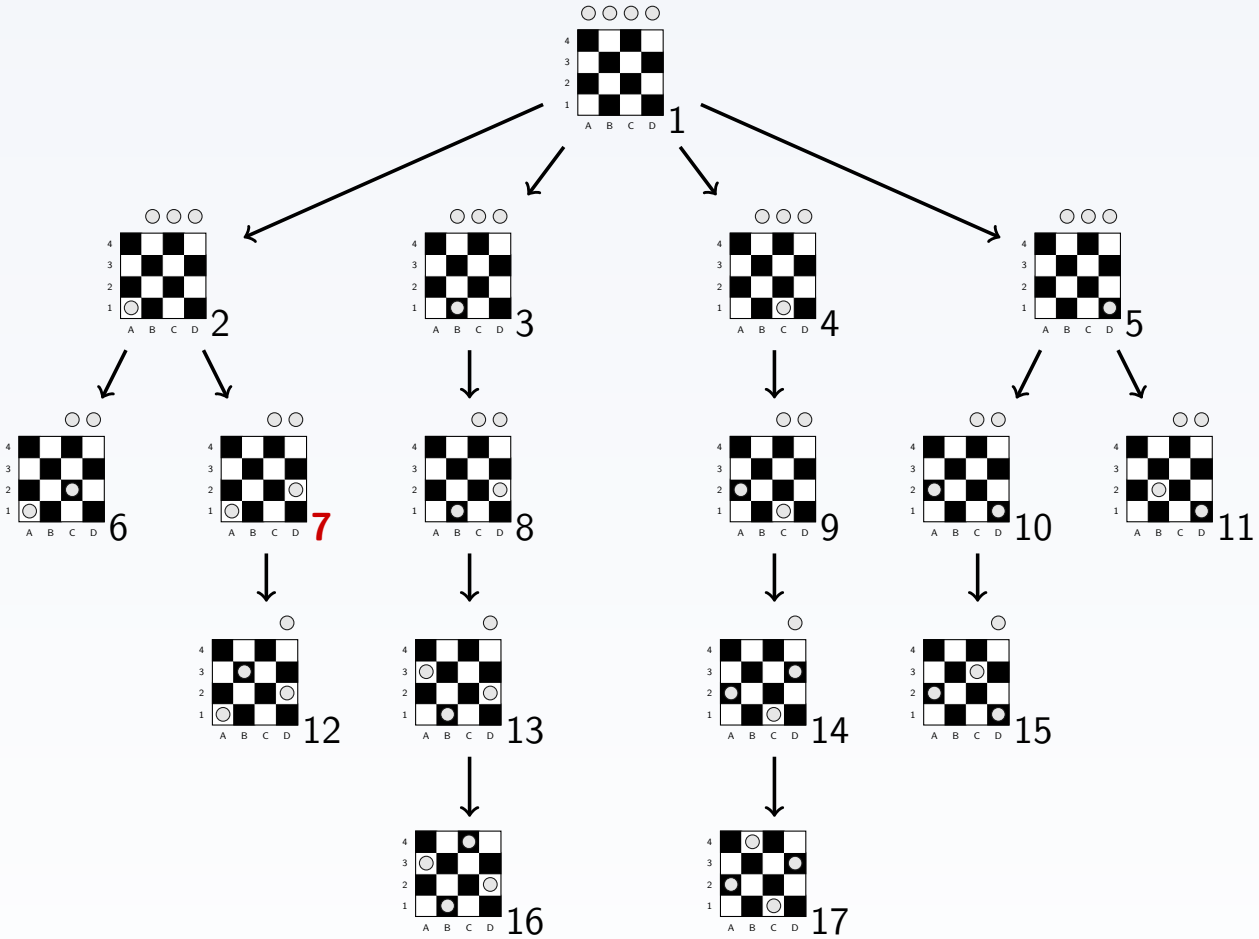


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 3$

1,2,6,7,3,8,4,9,5,10,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

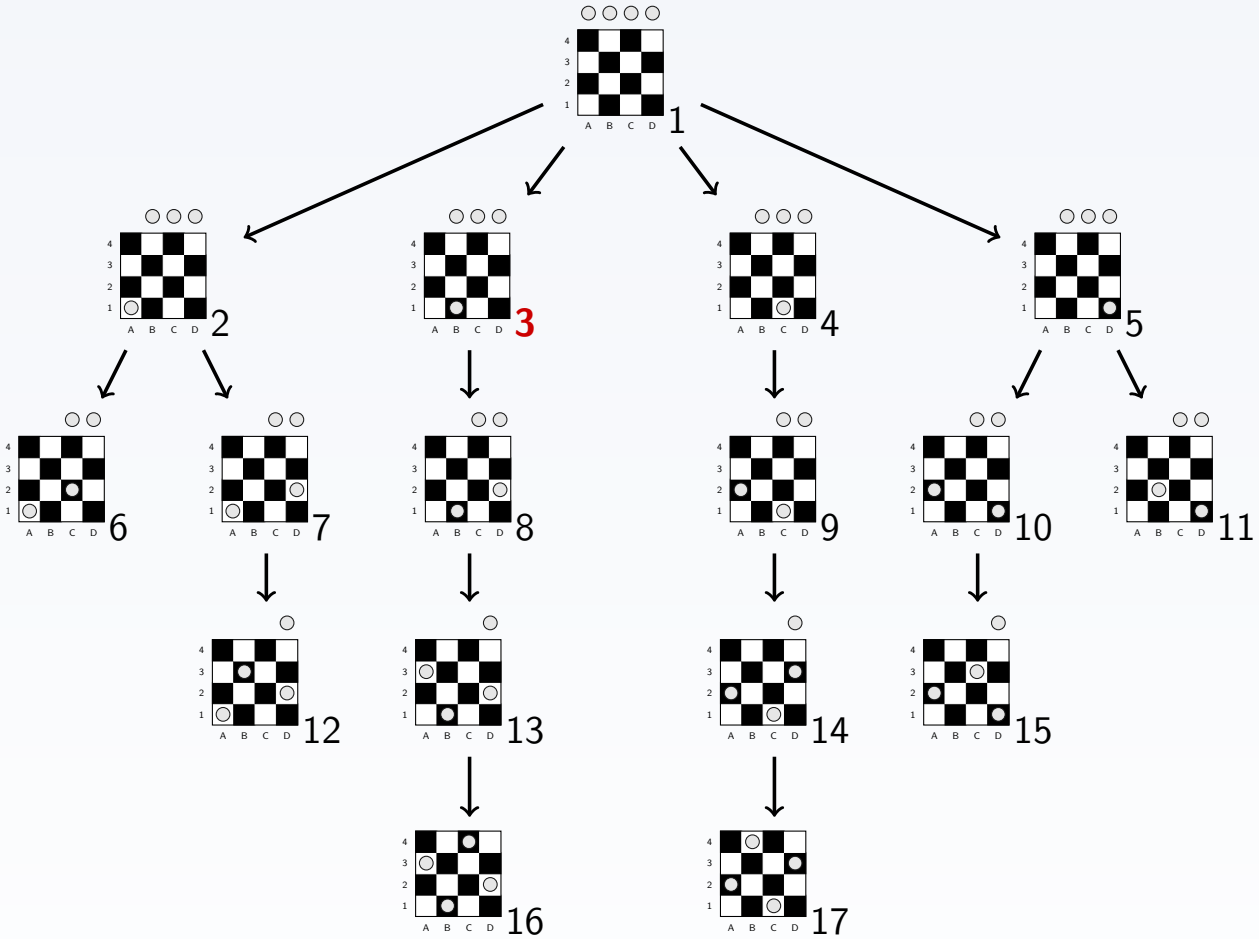


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 3$

1,2,6,7,3,8,4,9,5,10,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

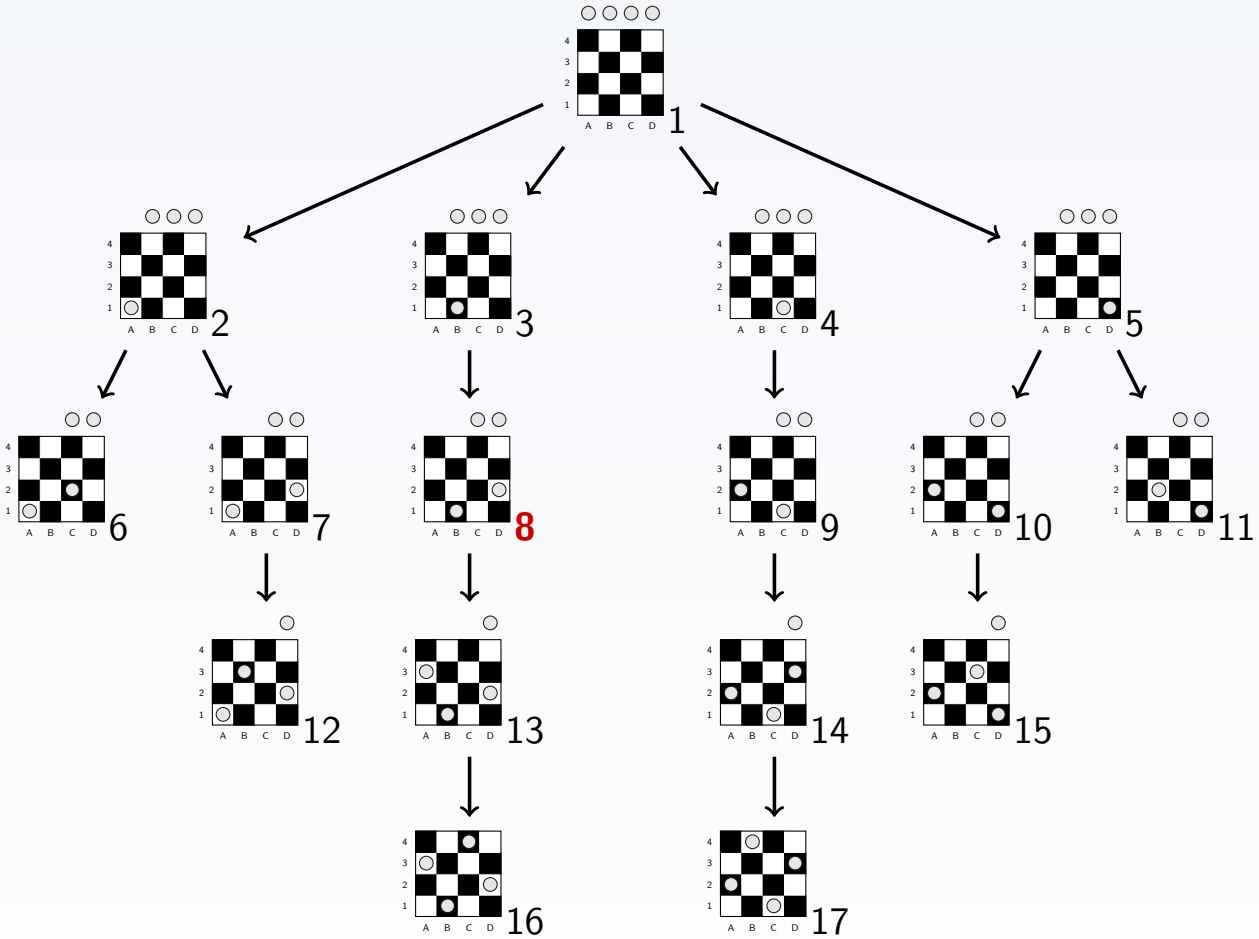


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 3$

1,2,6,7,3,8,4,9,5,10,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

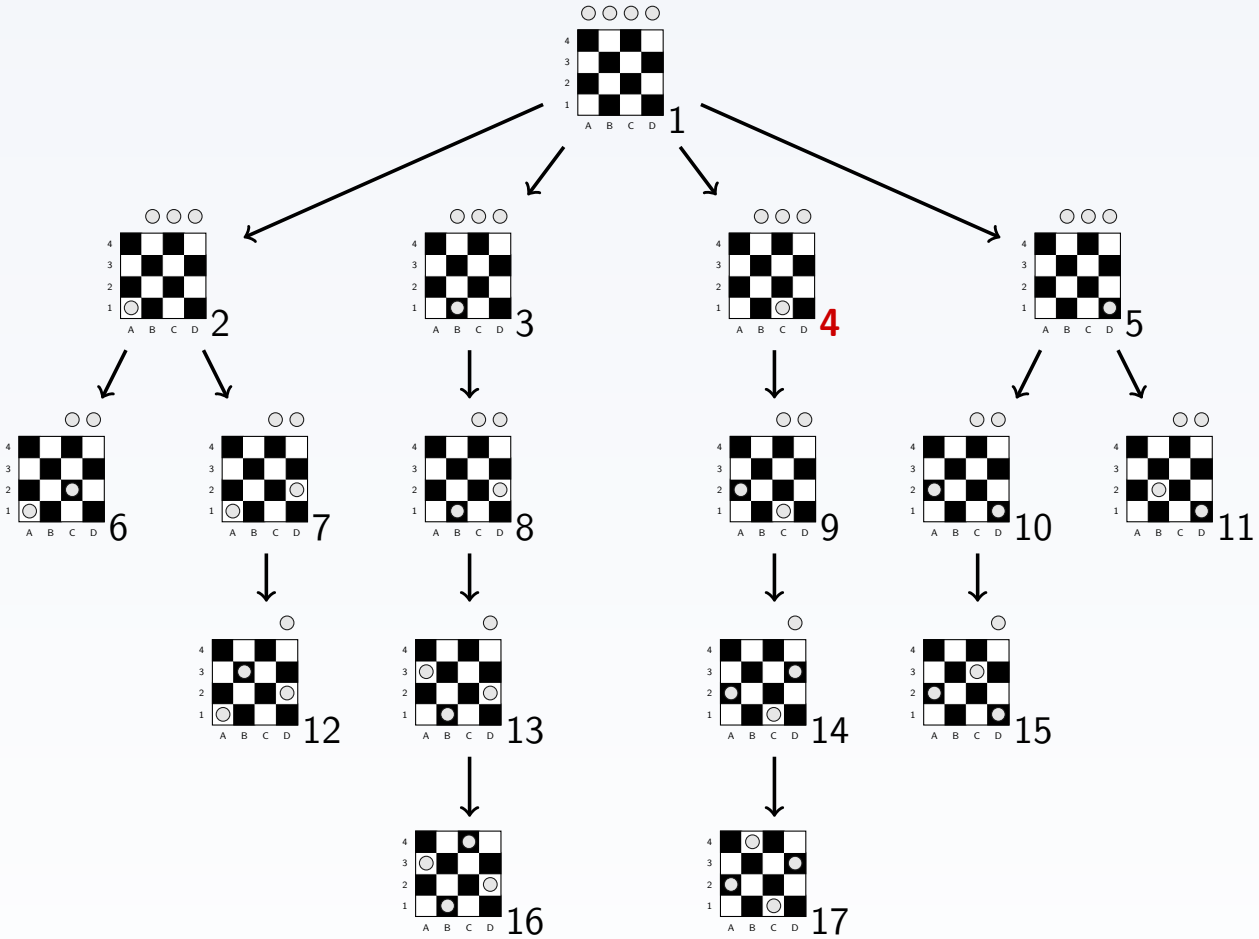


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 3$

1,2,6,7,3,8,4,9,5,10,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

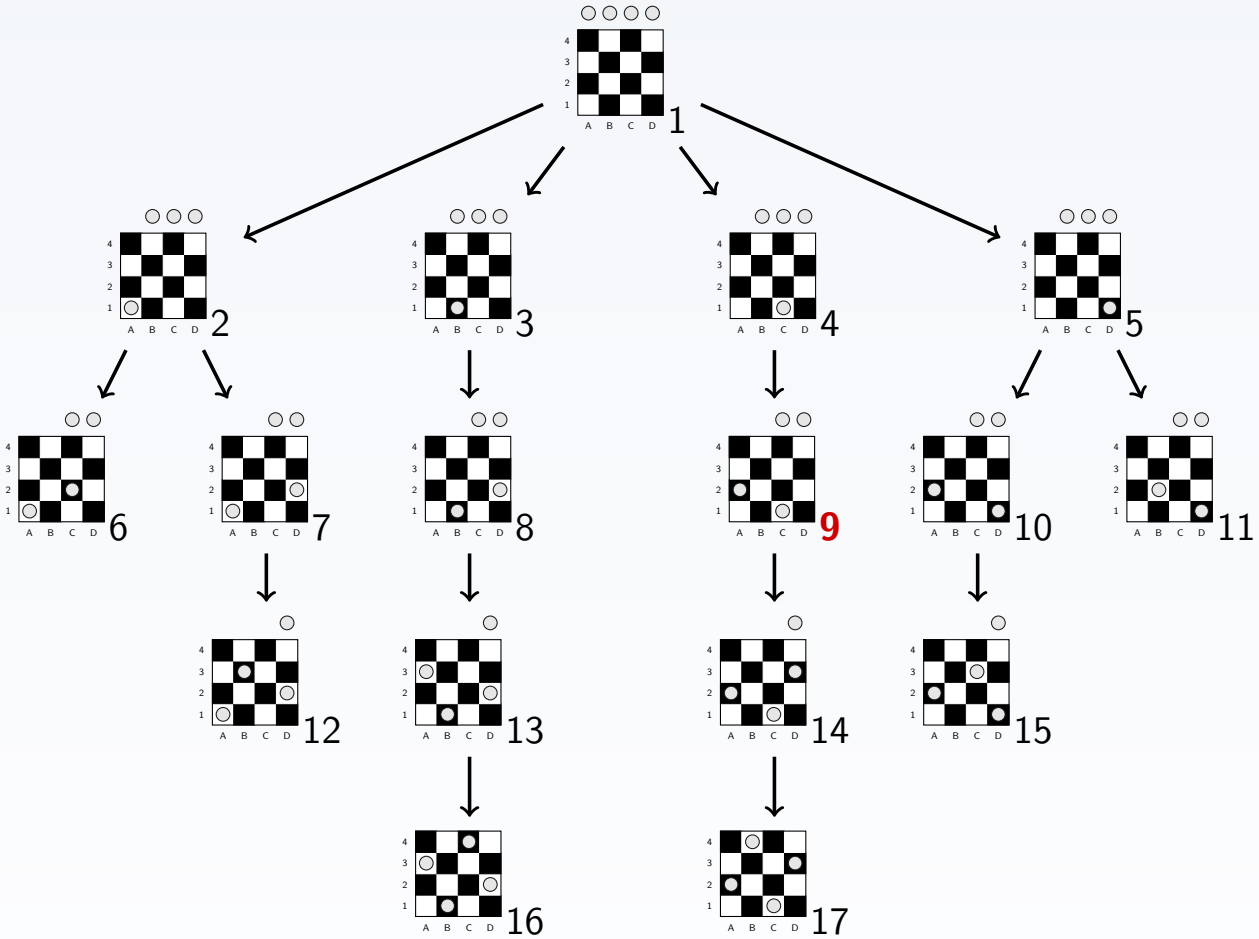


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 3$

1,2,6,7,3,8,4,9,5,10,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

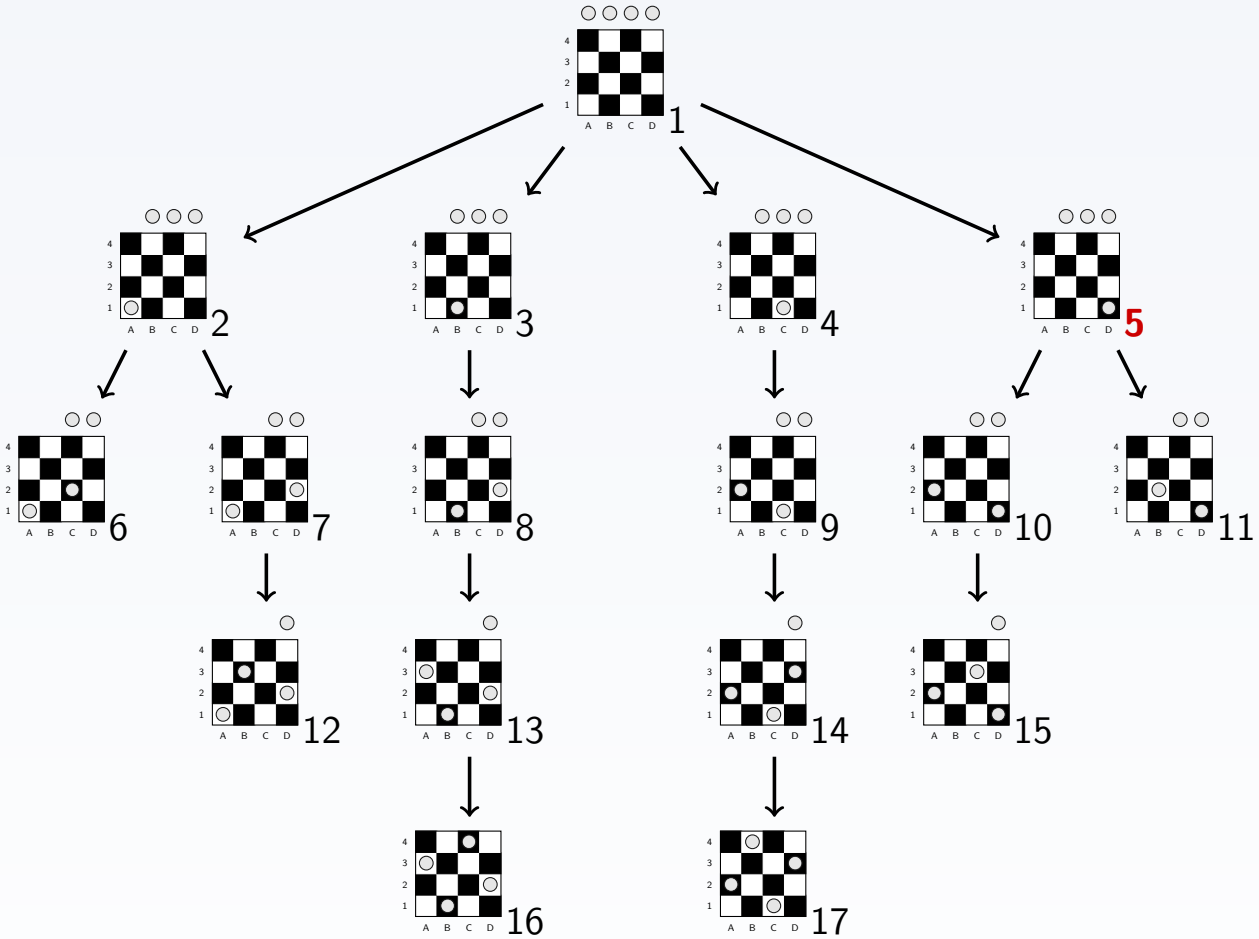


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 3$

1,2,6,7,3,8,4,9,5,10,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

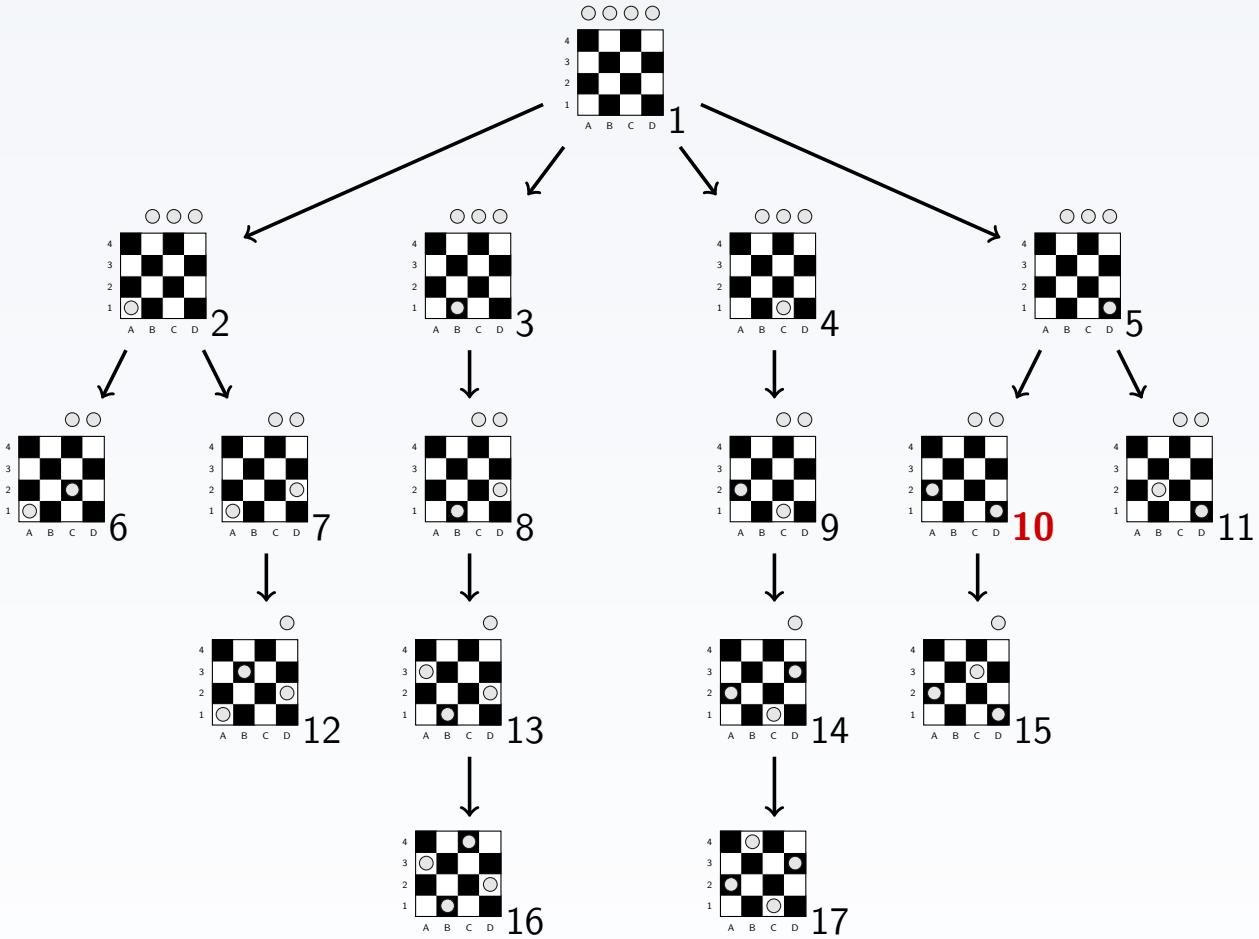


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 3$

1,2,6,7,3,8,4,9,5,10,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

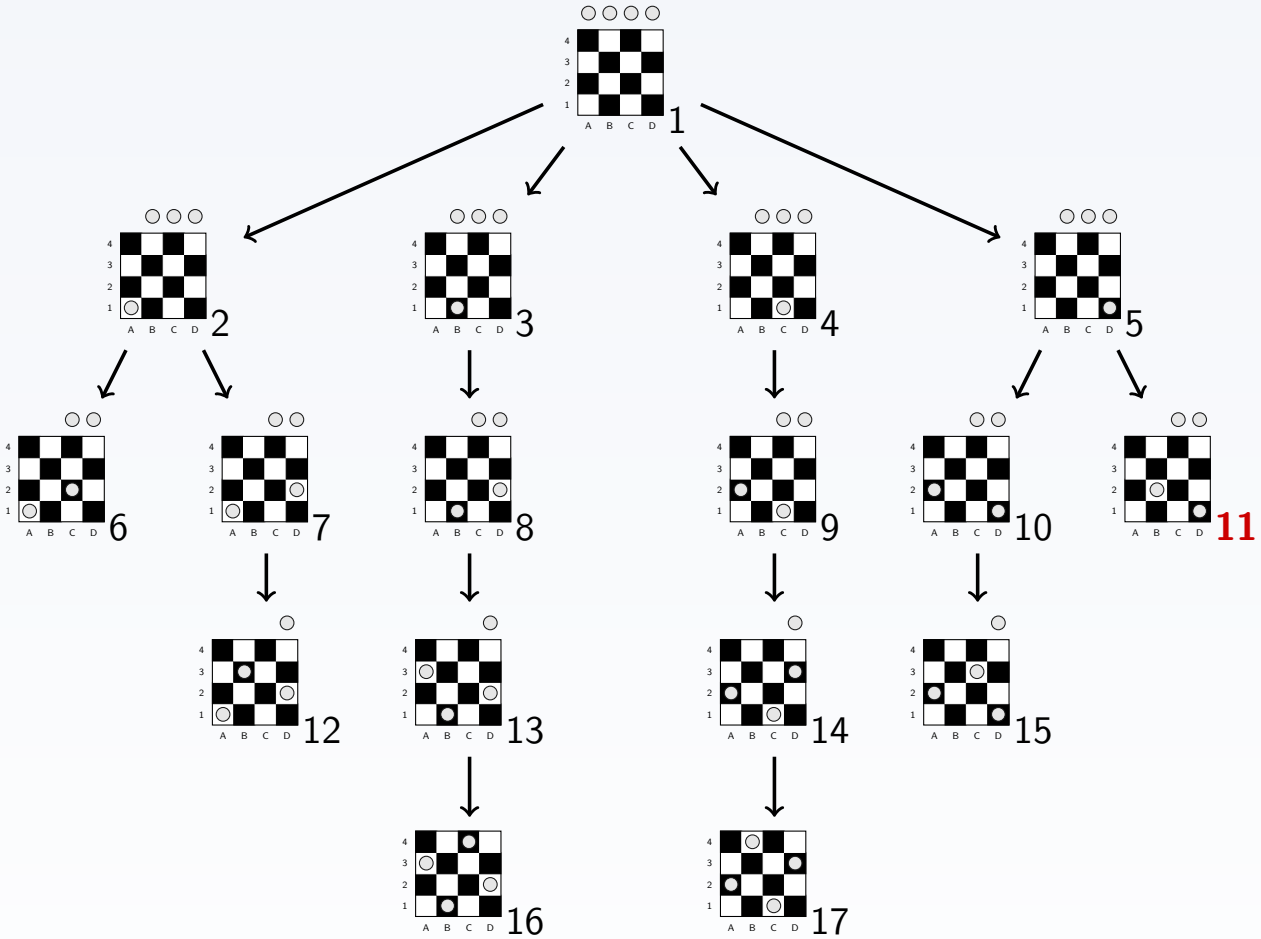


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 3$

1,2,6,7,3,8,4,9,5,10,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

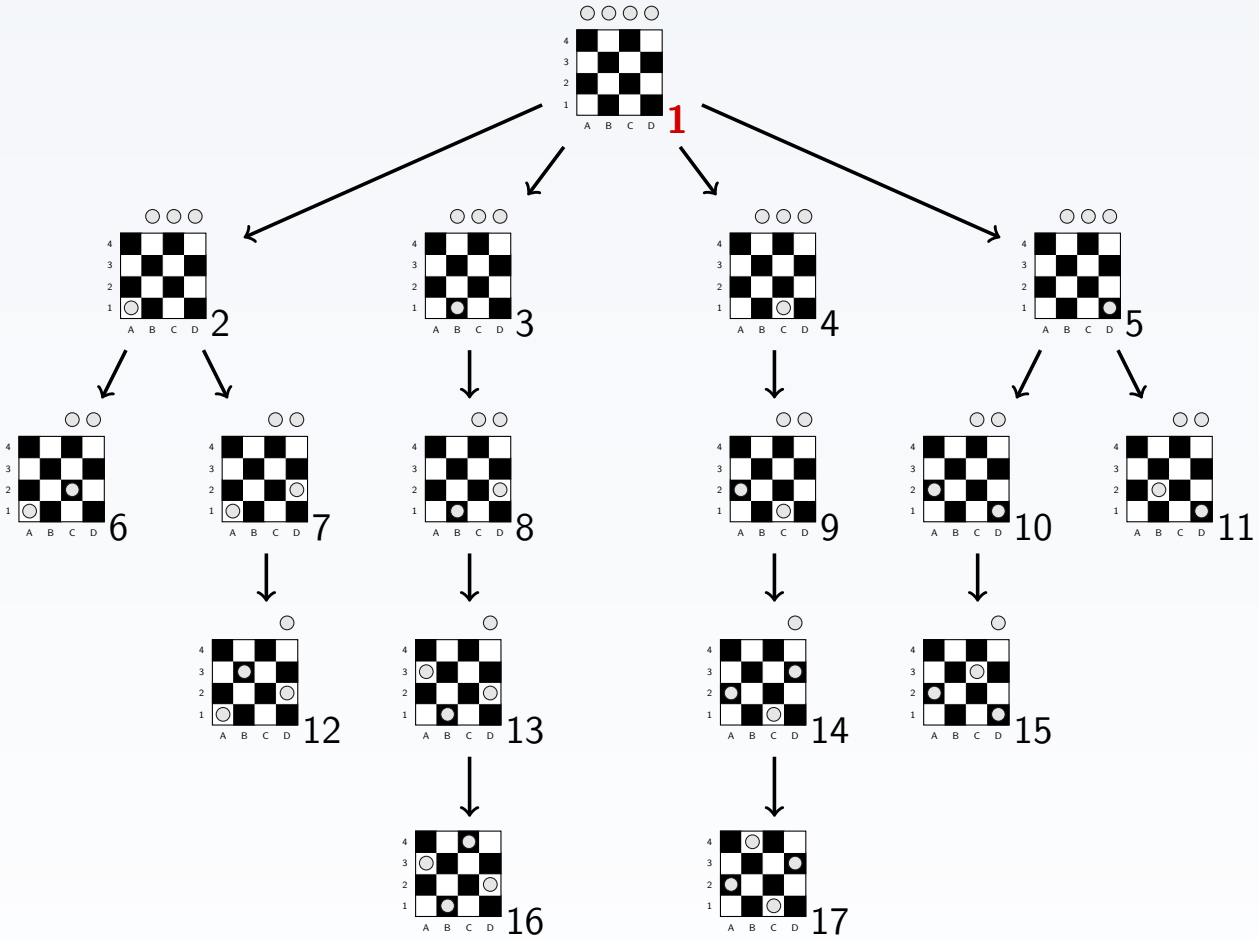


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 3$

1,2,6,7,3,8,4,9,5,10,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

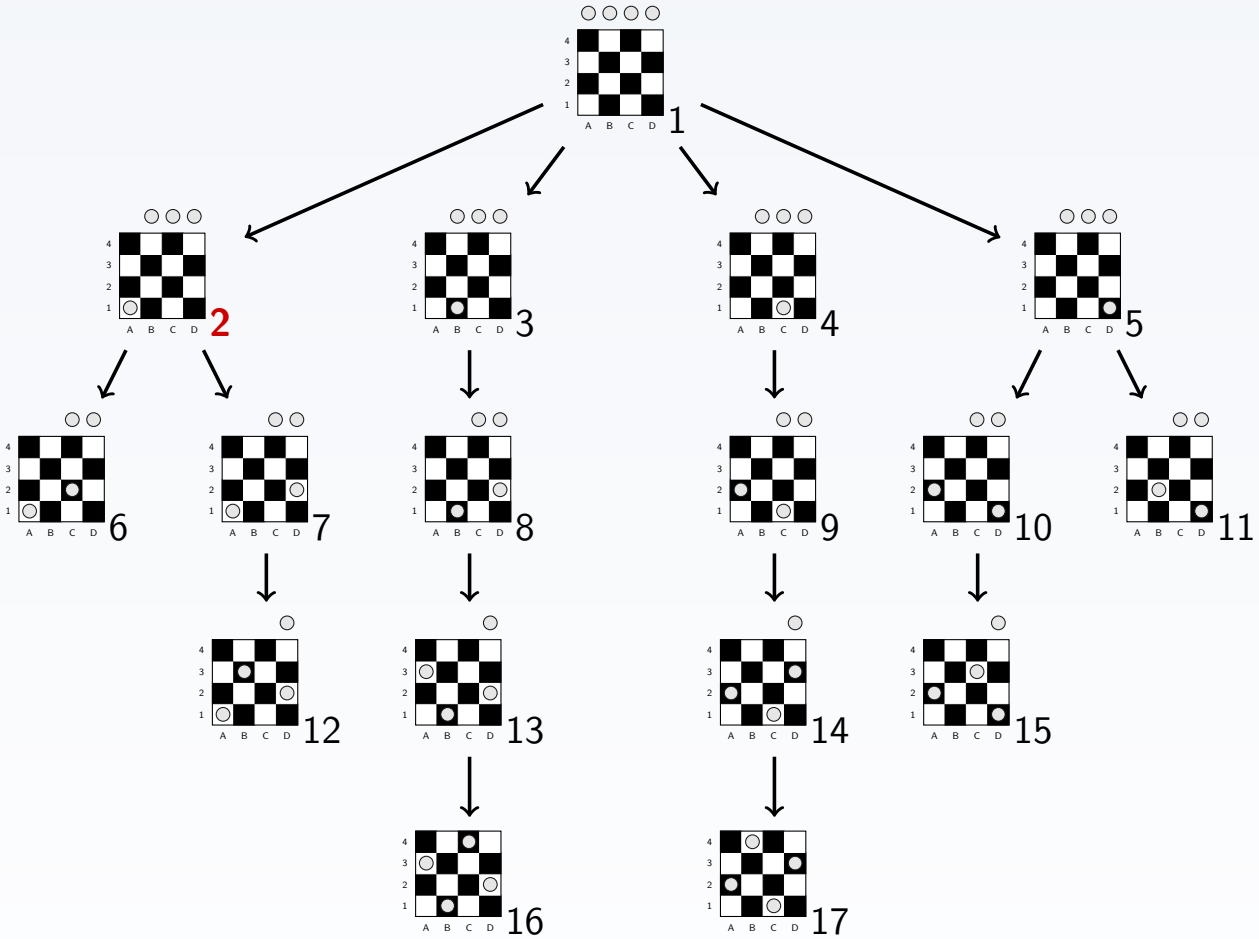


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 4$

1,2,6,7,12,3,8,13,4,9,14,5,10,15,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

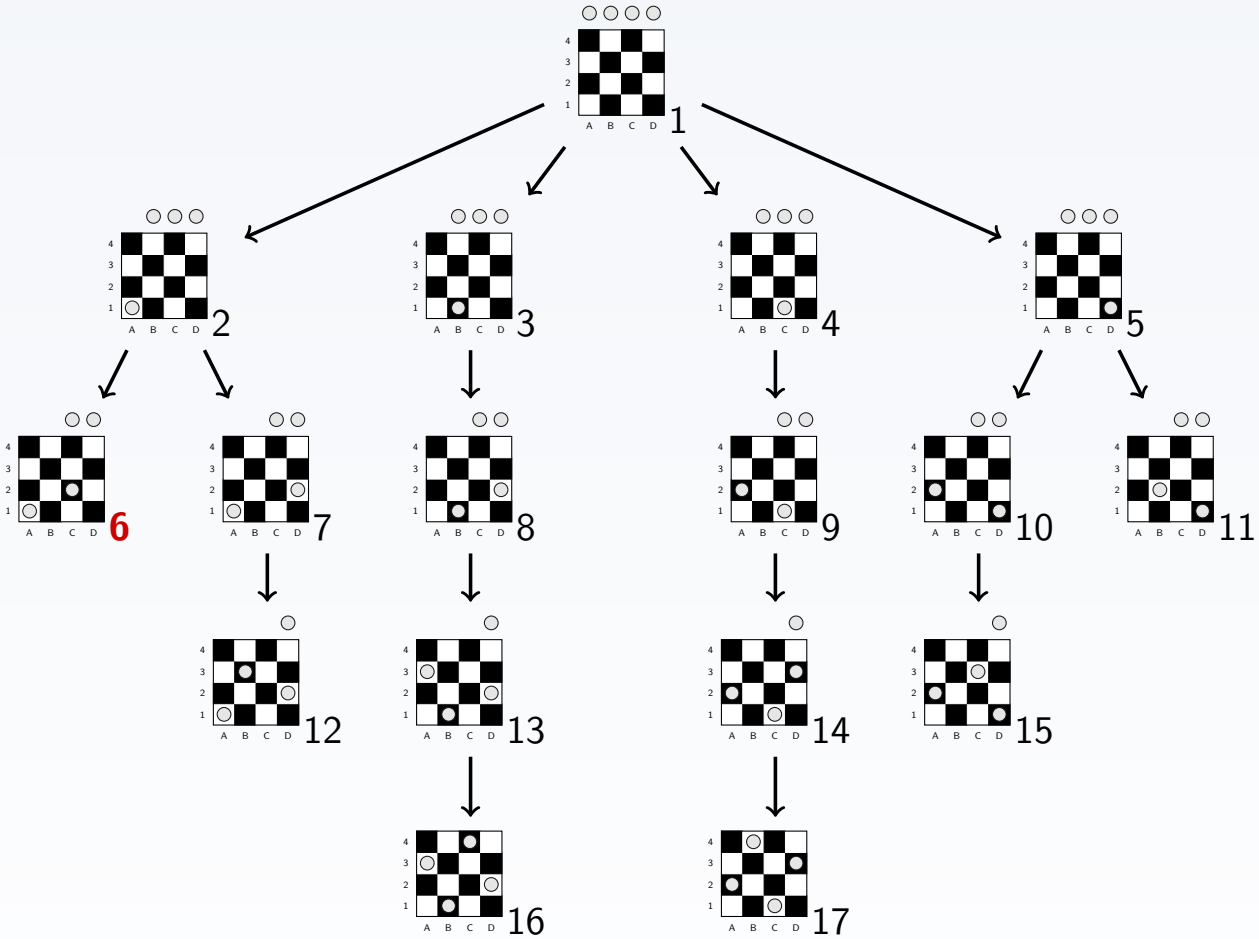


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 4$

1,2,6,7,12,3,8,13,4,9,14,5,10,15,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

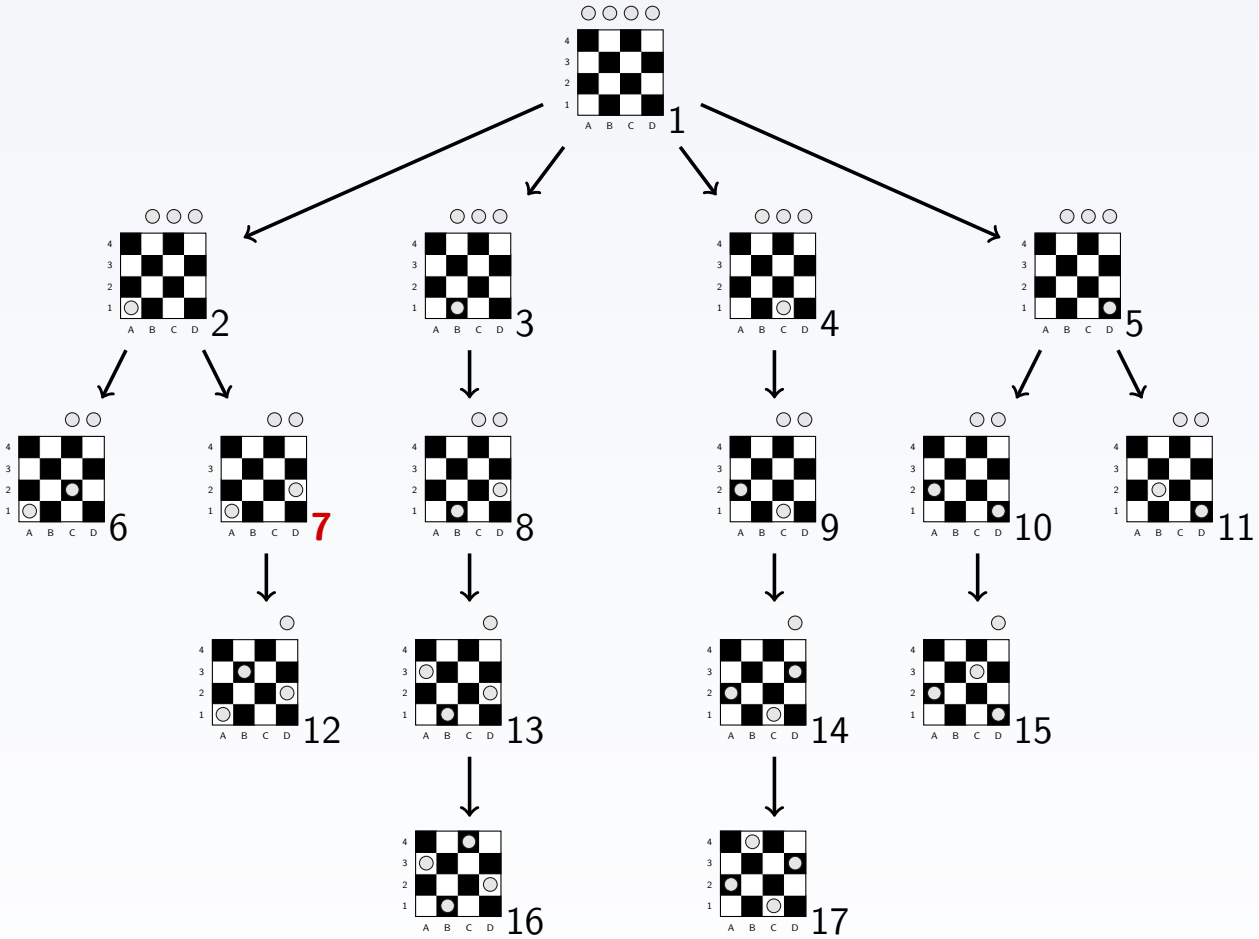


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 4$

1,2,6,7,12,3,8,13,4,9,14,5,10,15,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

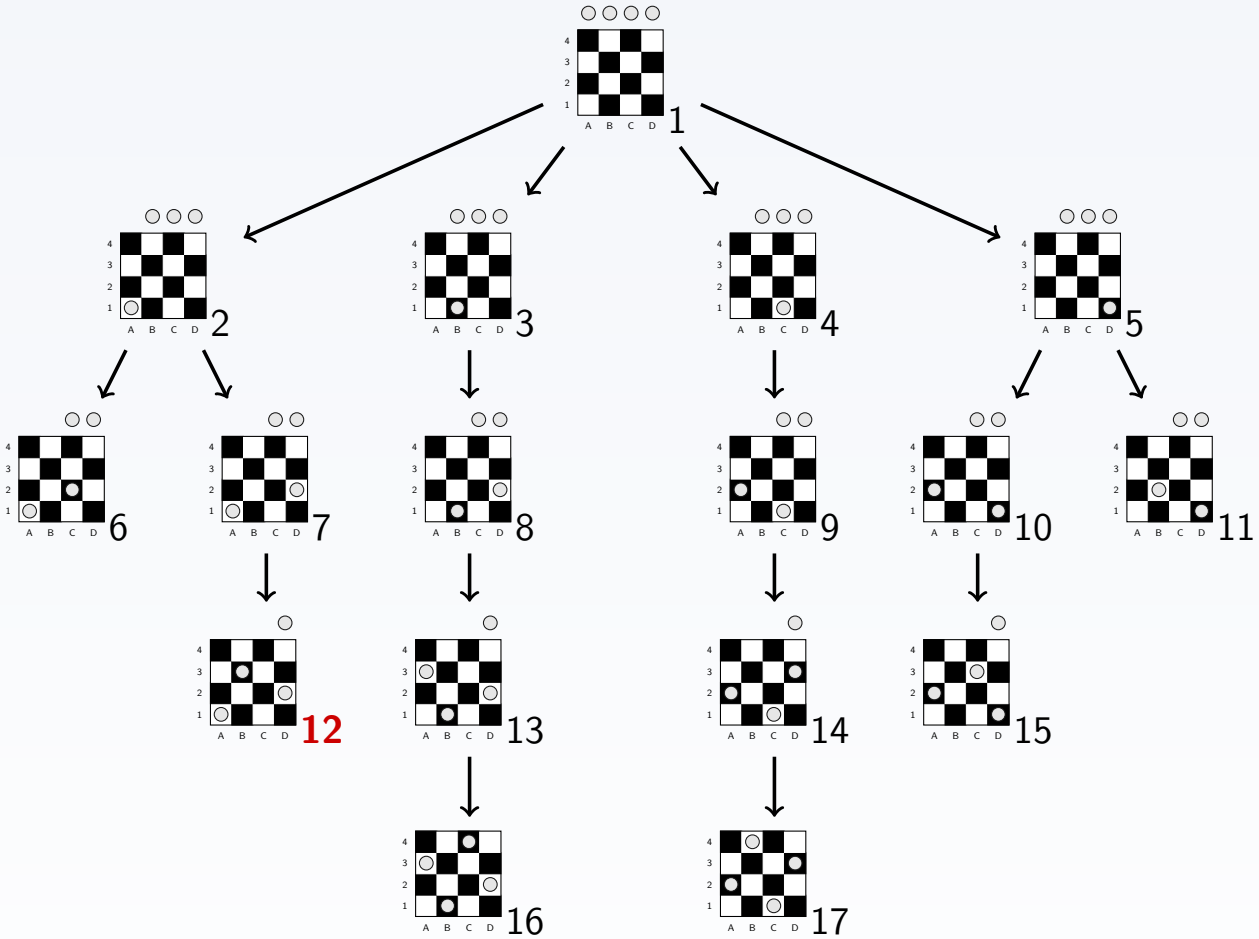


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 4$

1,2,6,7,12,3,8,13,4,9,14,5,10,15,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

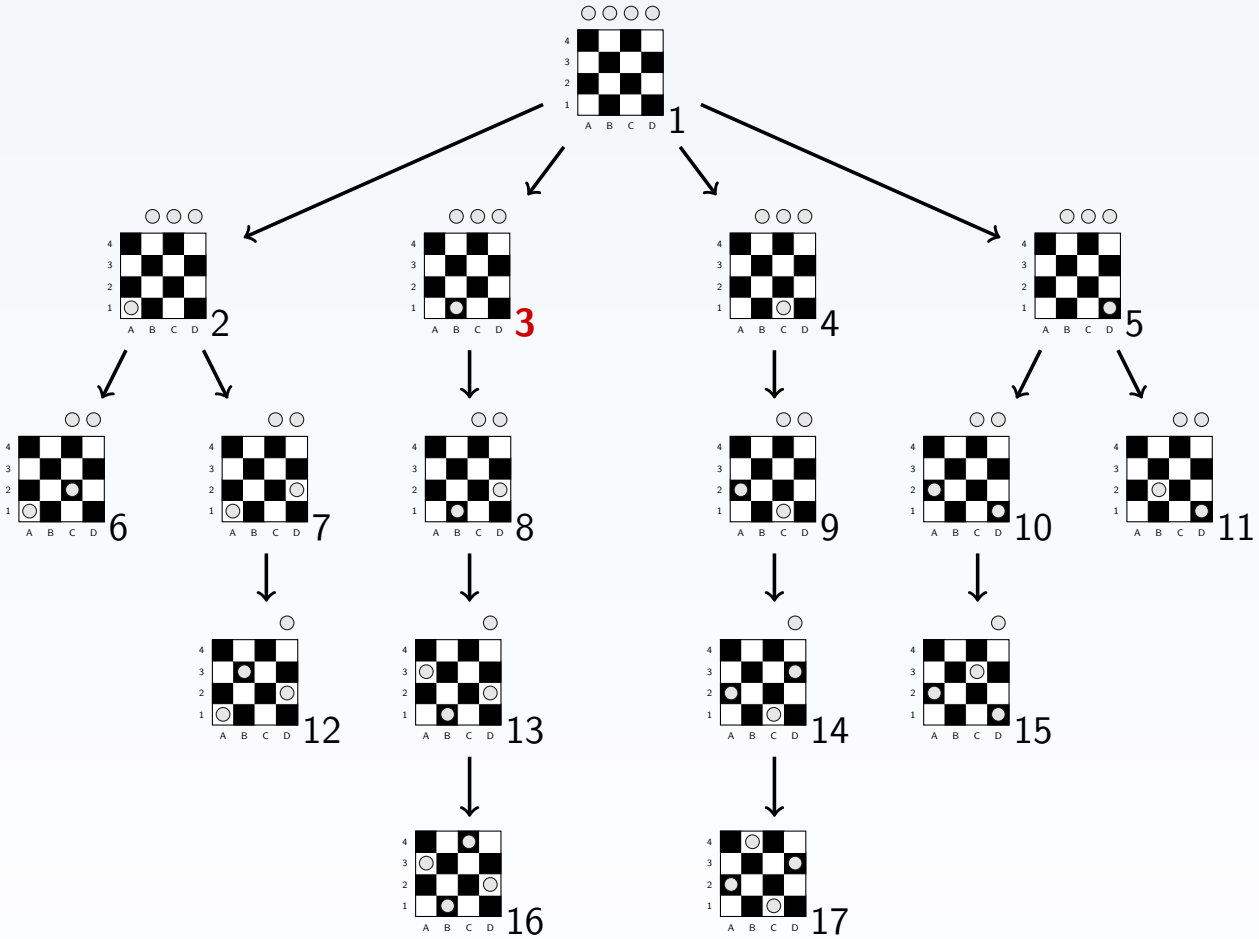


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 4$

1,2,6,7,12,3,8,13,4,9,14,5,10,15,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

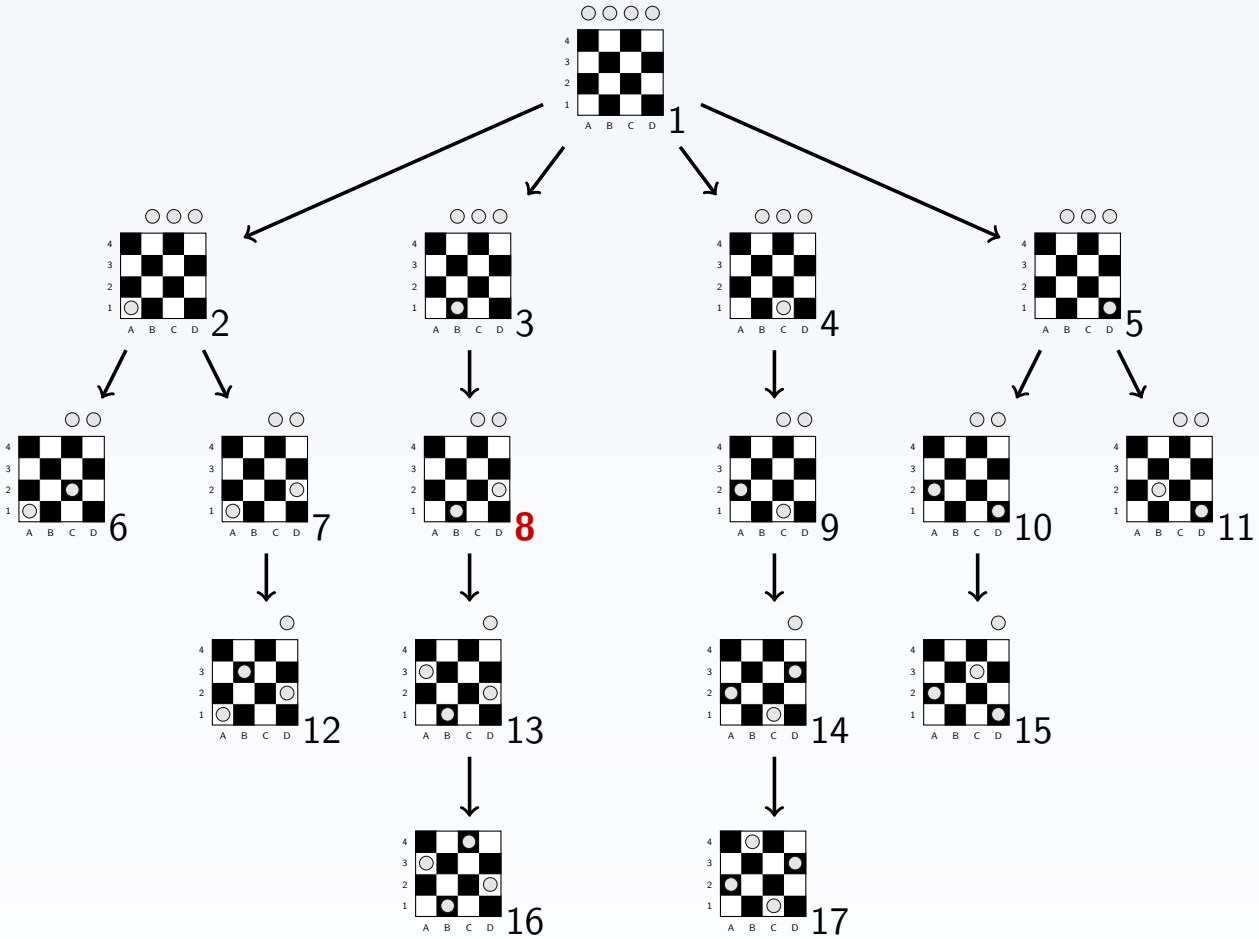


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 4$

1,2,6,7,12,3,8,13,4,9,14,5,10,15,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

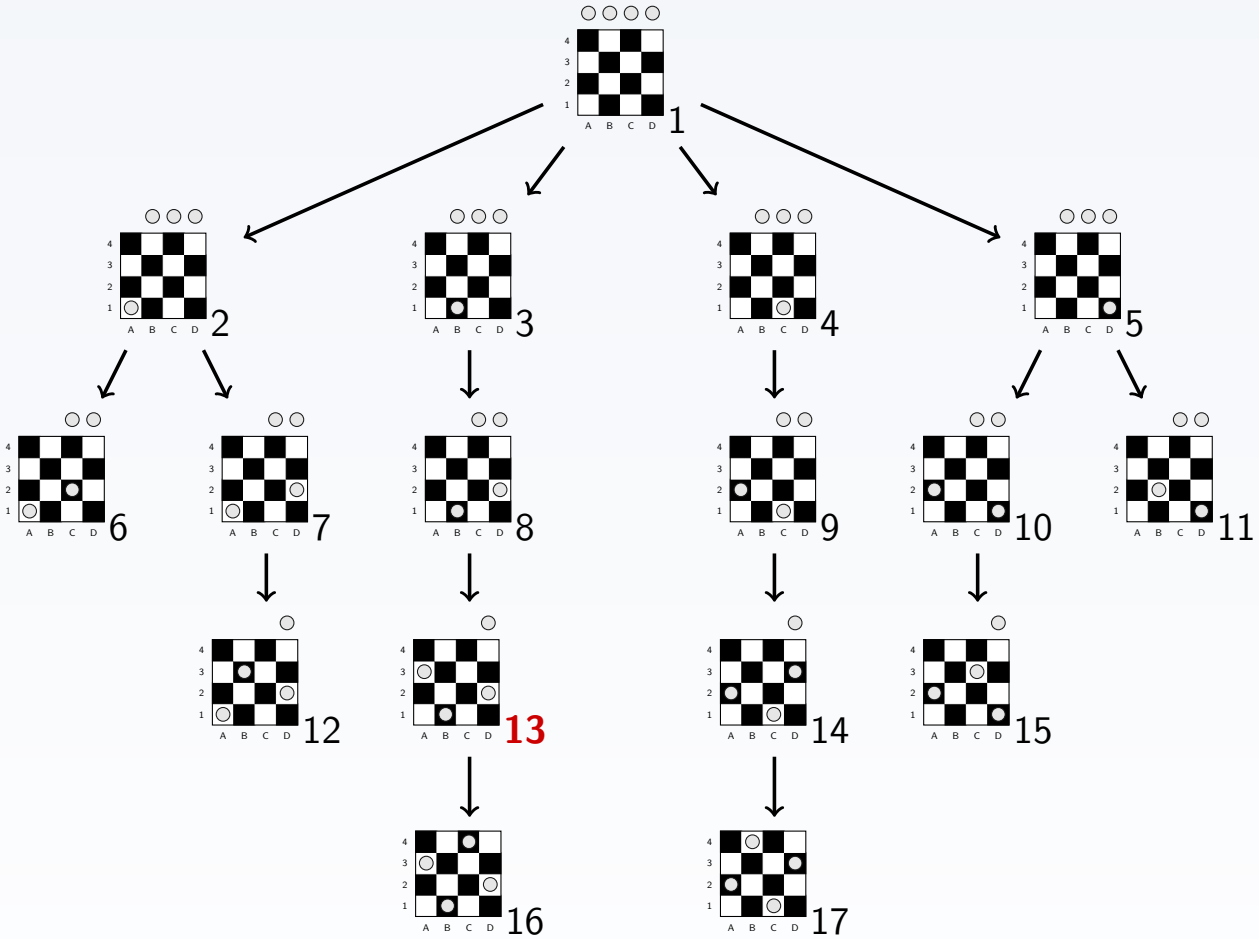


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 4$

1,2,6,7,12,3,8,13,4,9,14,5,10,15,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

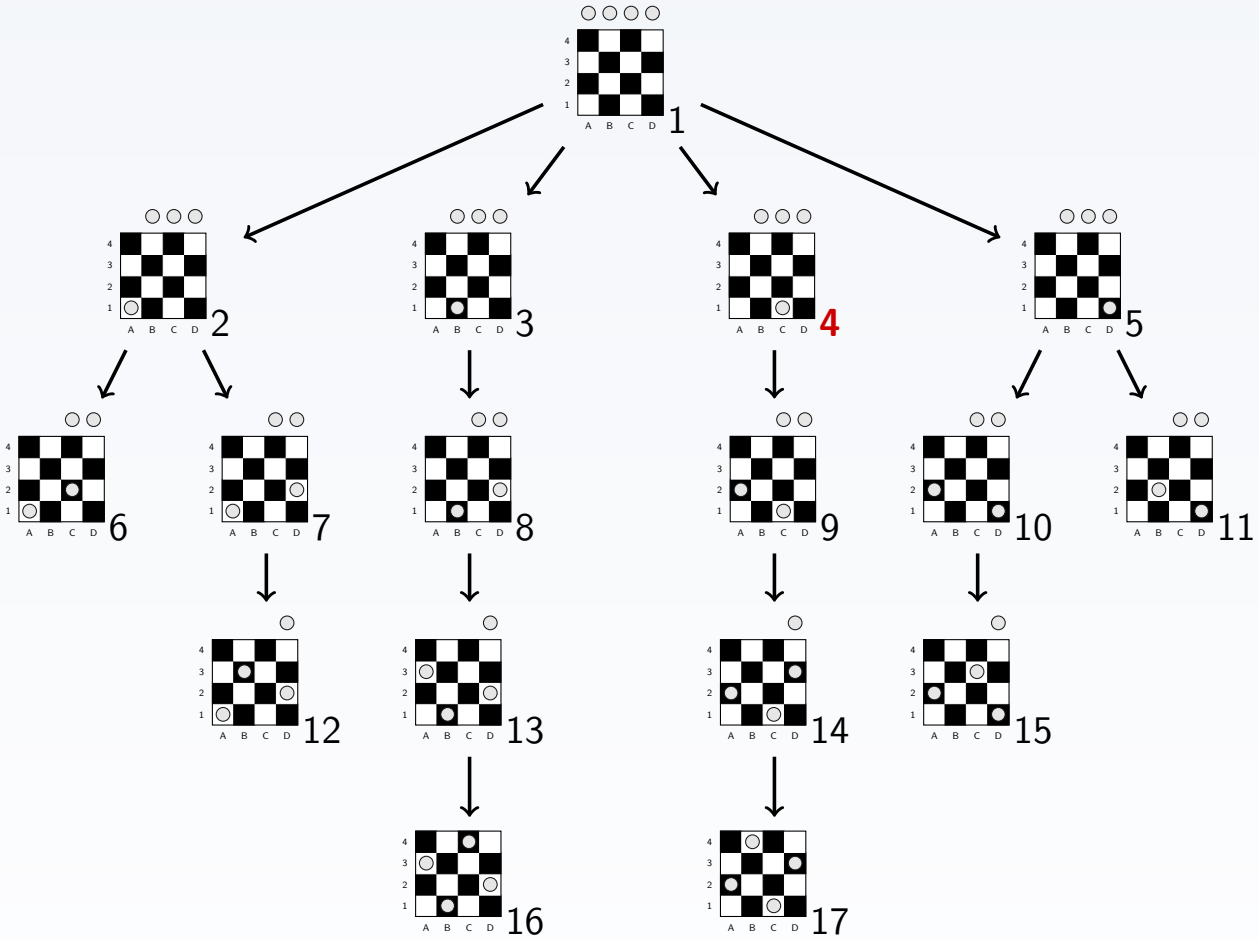


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 4$

1,2,6,7,12,3,8,13,4,9,14,5,10,15,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

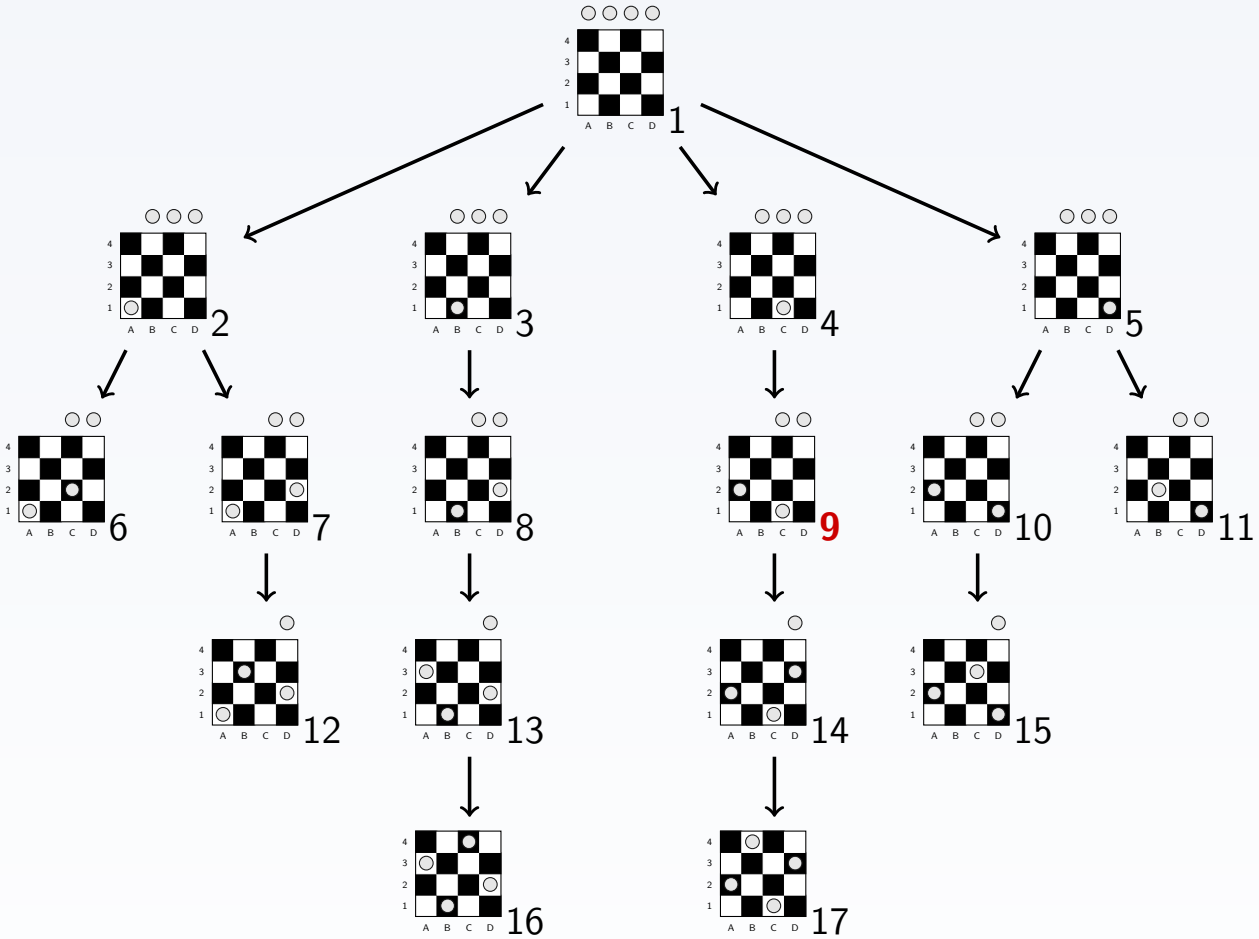


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 4$

1,2,6,7,12,3,8,13,4,9,14,5,10,15,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

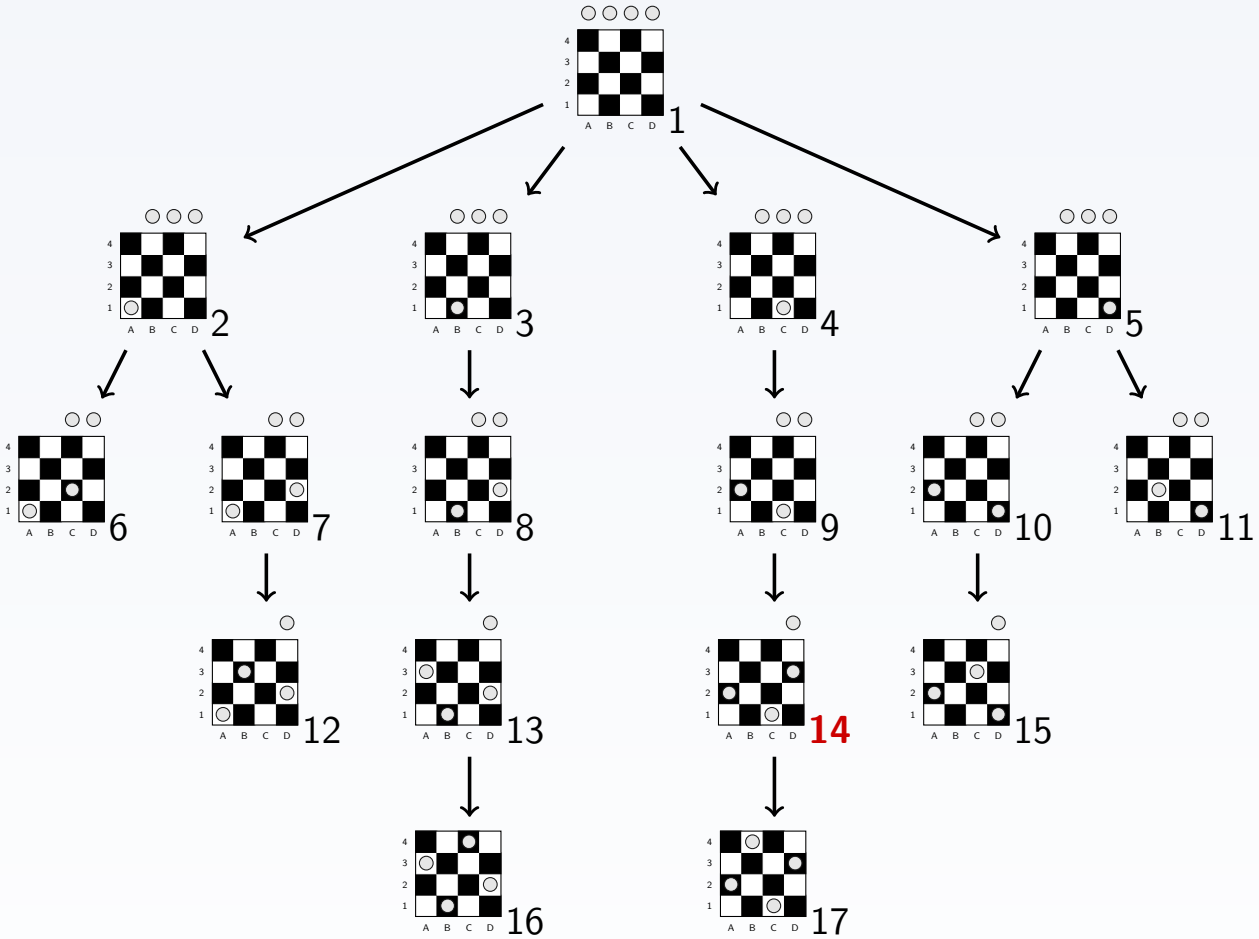


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 4$

1,2,6,7,12,3,8,13,4,9,14,5,10,15,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

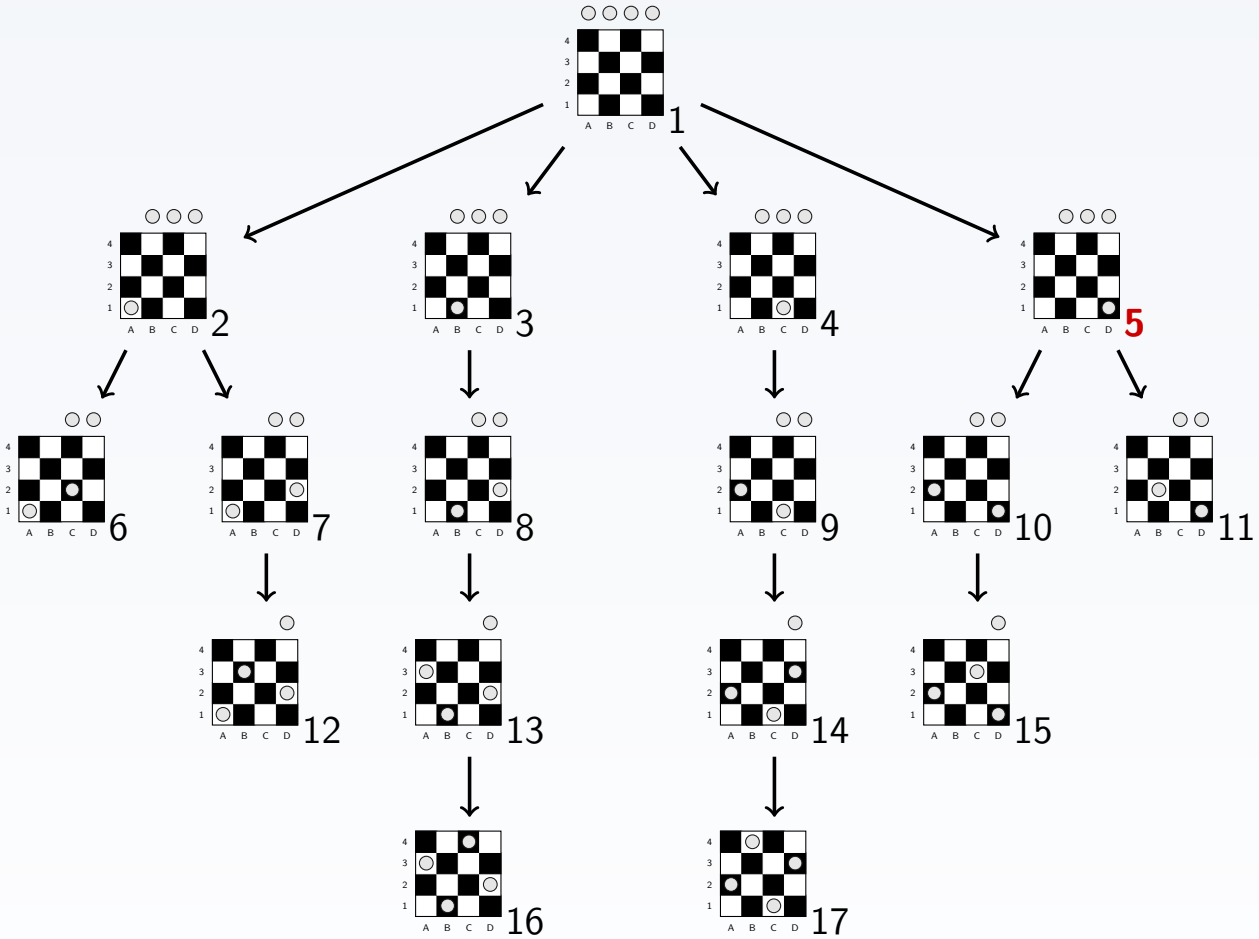


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 4$

1,2,6,7,12,3,8,13,4,9,14,5,10,15,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

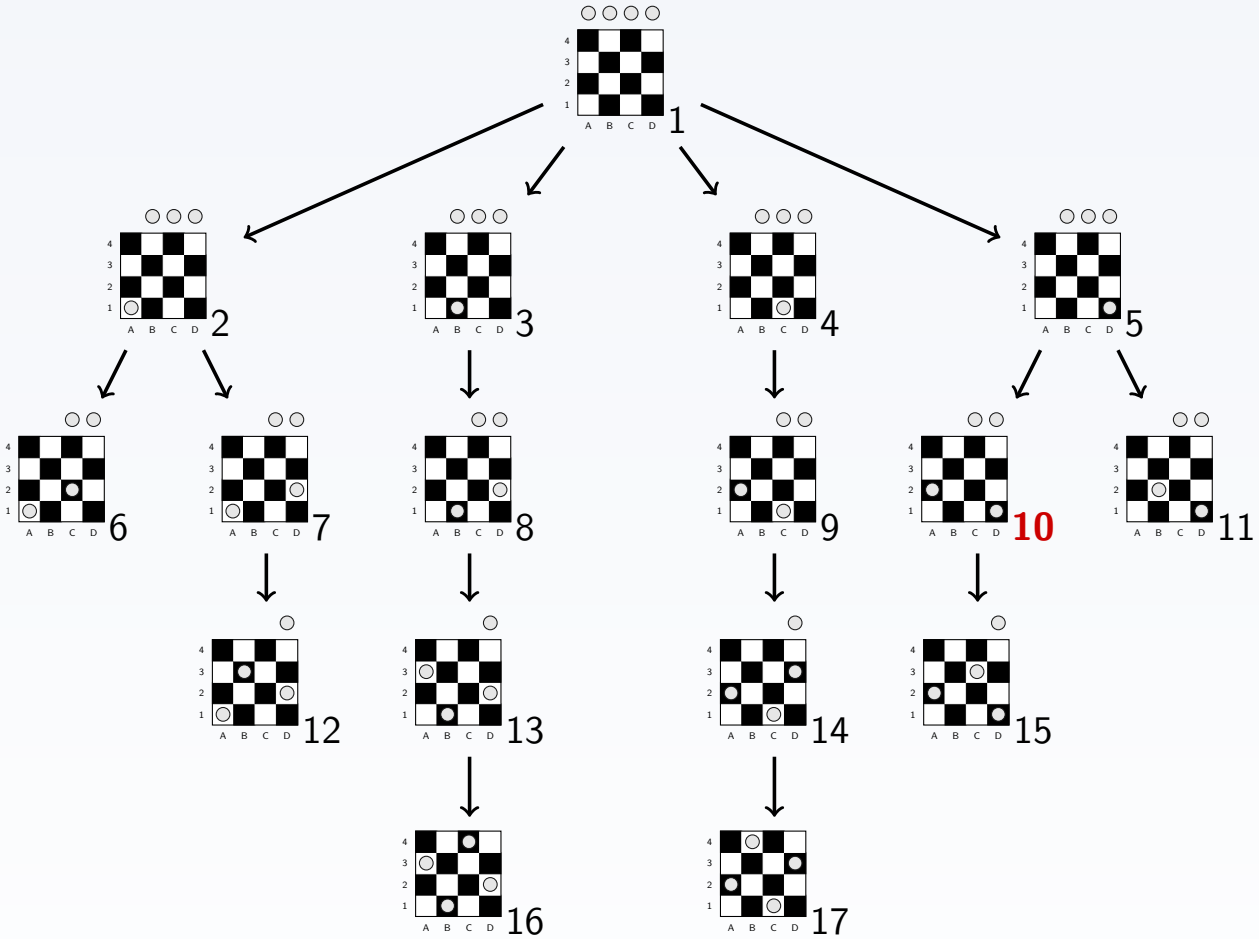


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 4$

1,2,6,7,12,3,8,13,4,9,14,5,10,15,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

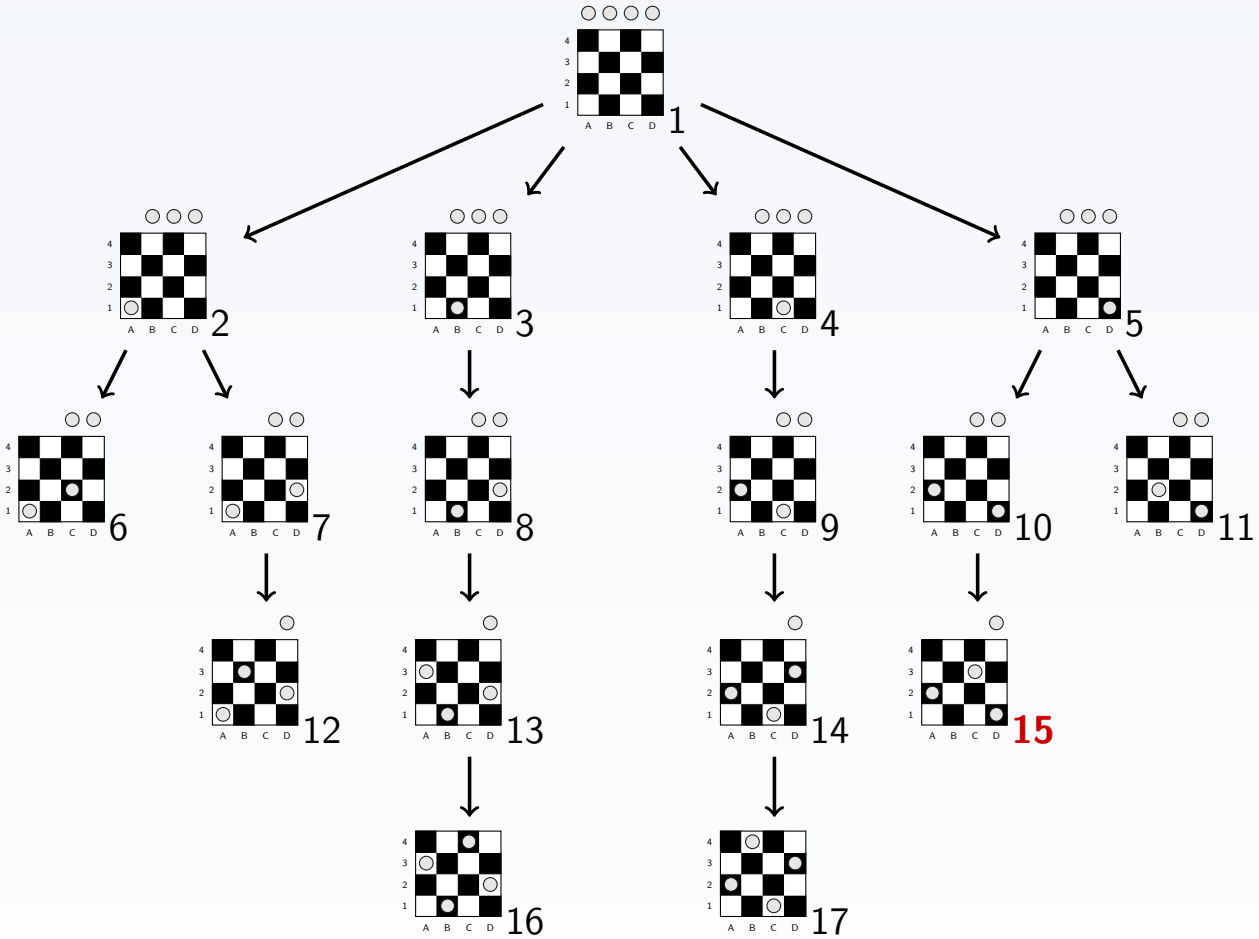


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 4$

1,2,6,7,12,3,8,13,4,9,14,5,10,15,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

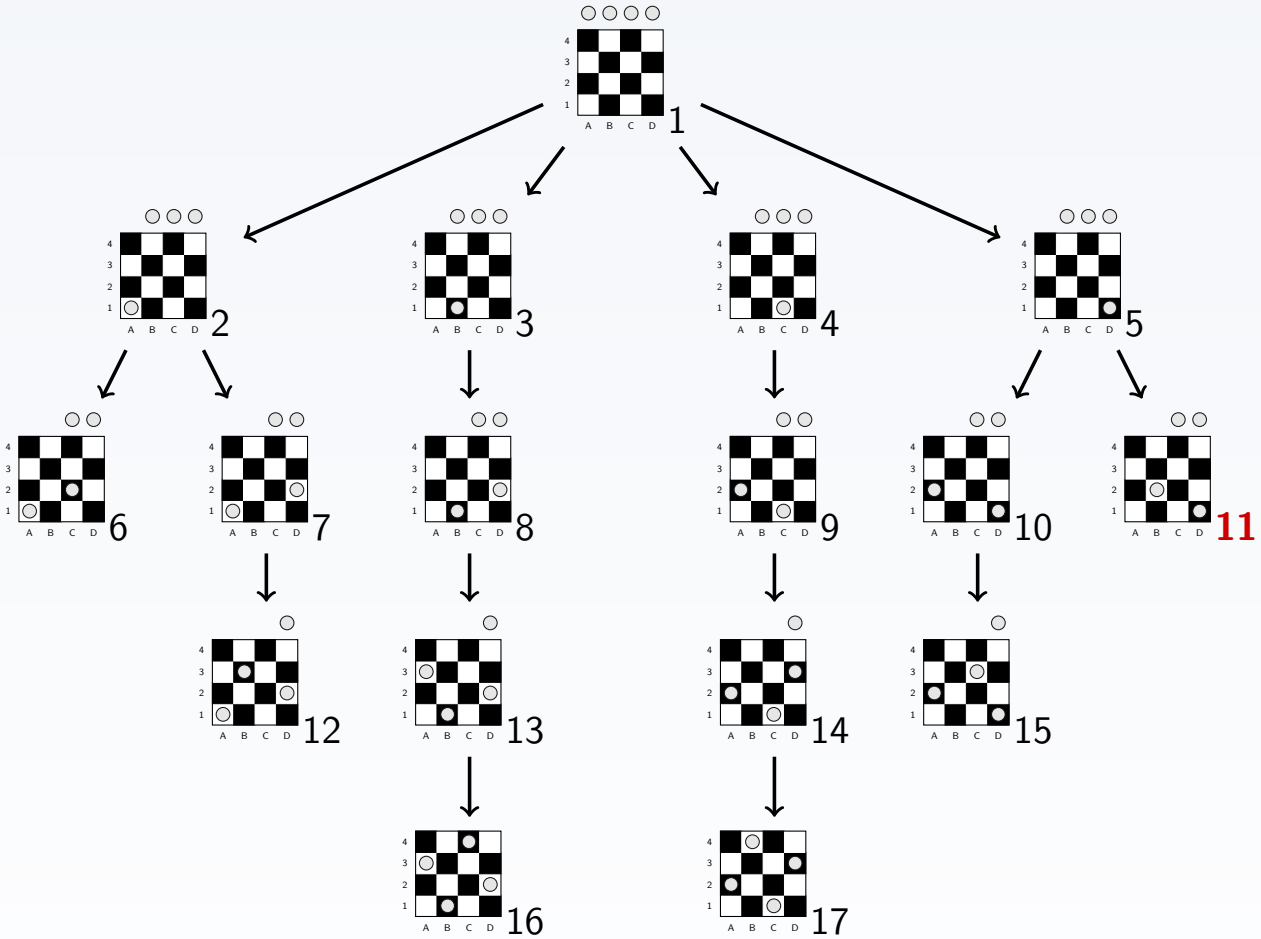


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 4$

1,2,6,7,12,3,8,13,4,9,14,5,10,15,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

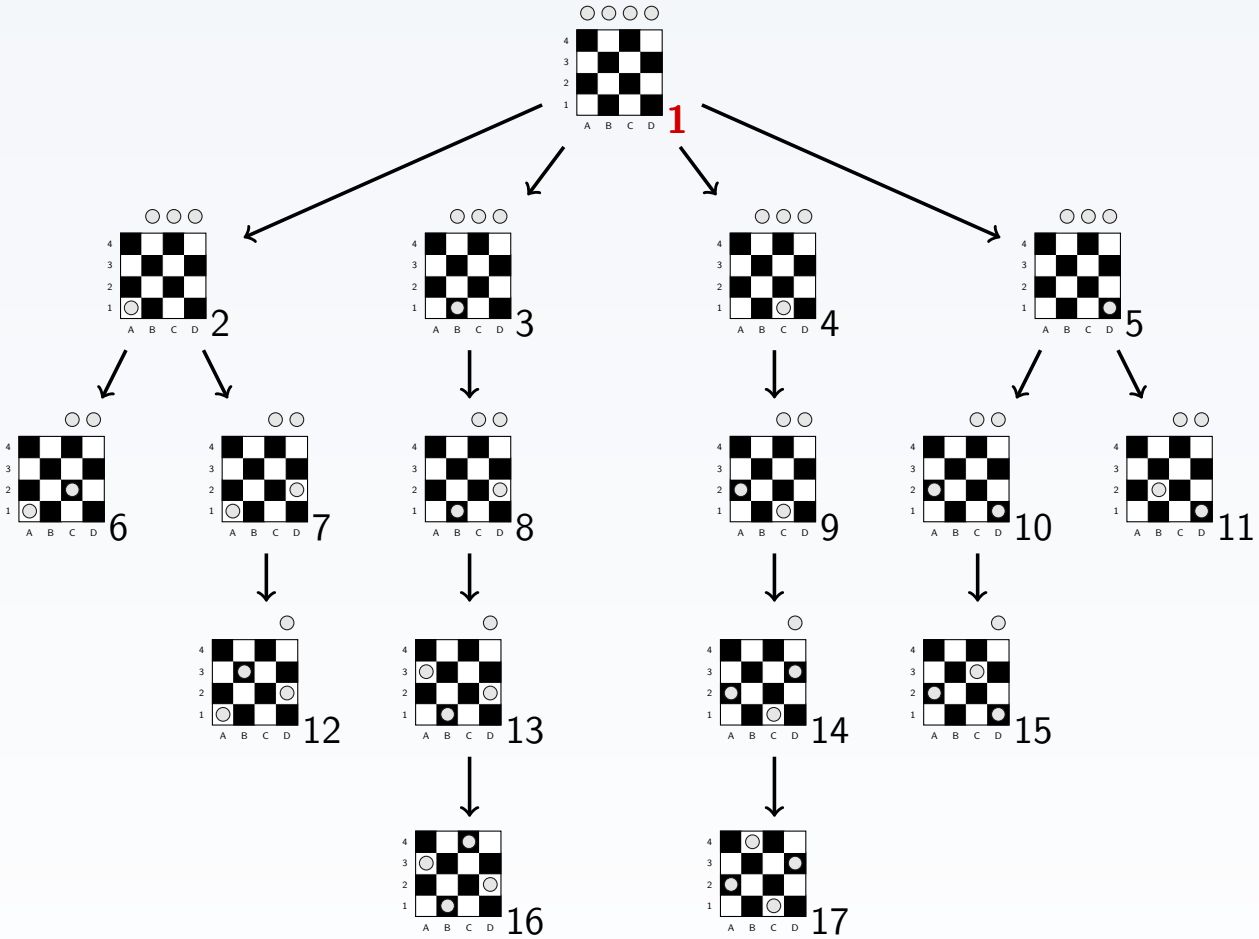


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 4$

1,2,6,7,12,3,8,13,4,9,14,5,10,15,11

Beispiel: Iterative Tiefensuche

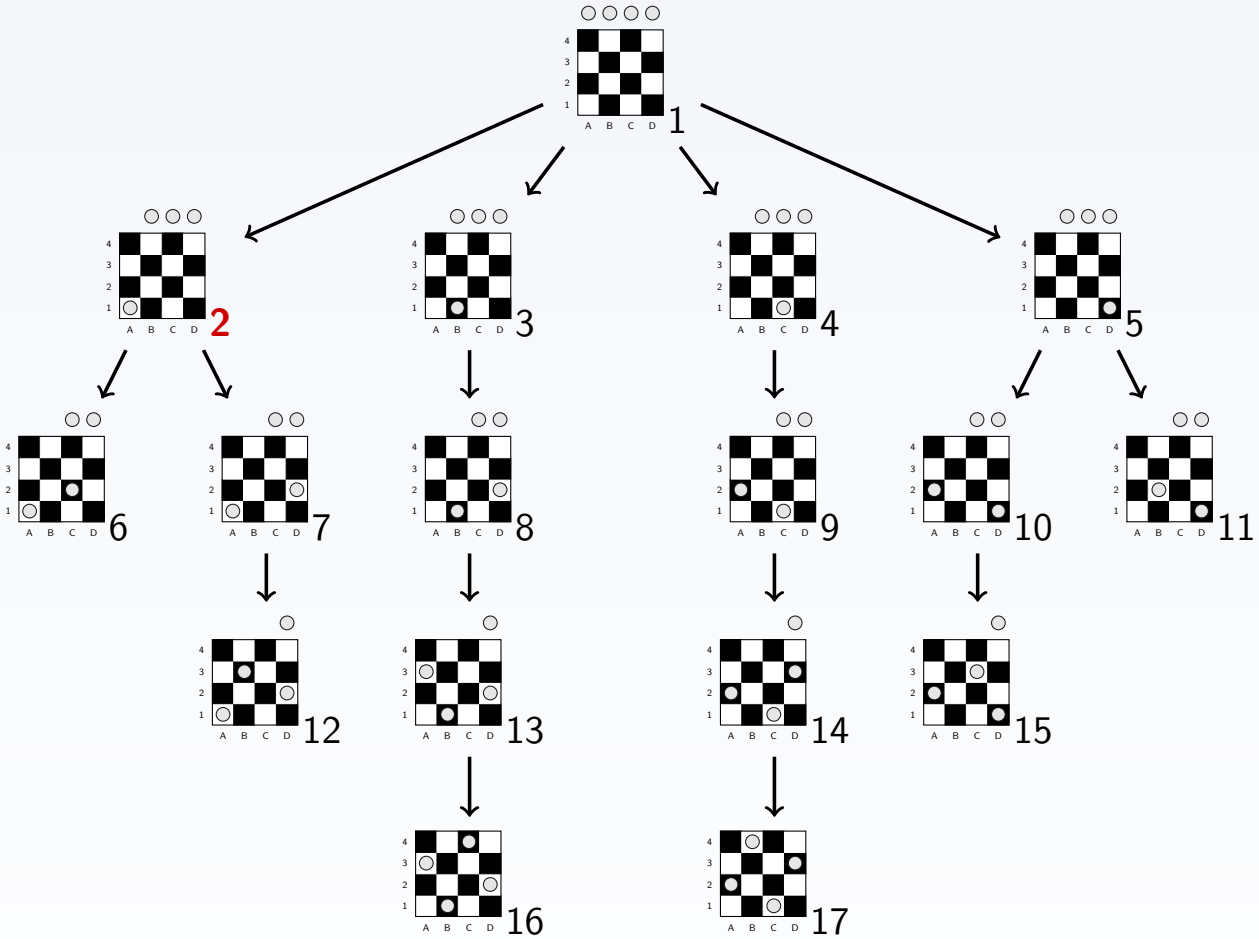


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 5$

1,2,6,7,12,3,8,13,16 $\Rightarrow$ Ziel

Beispiel: Iterative Tiefensuche

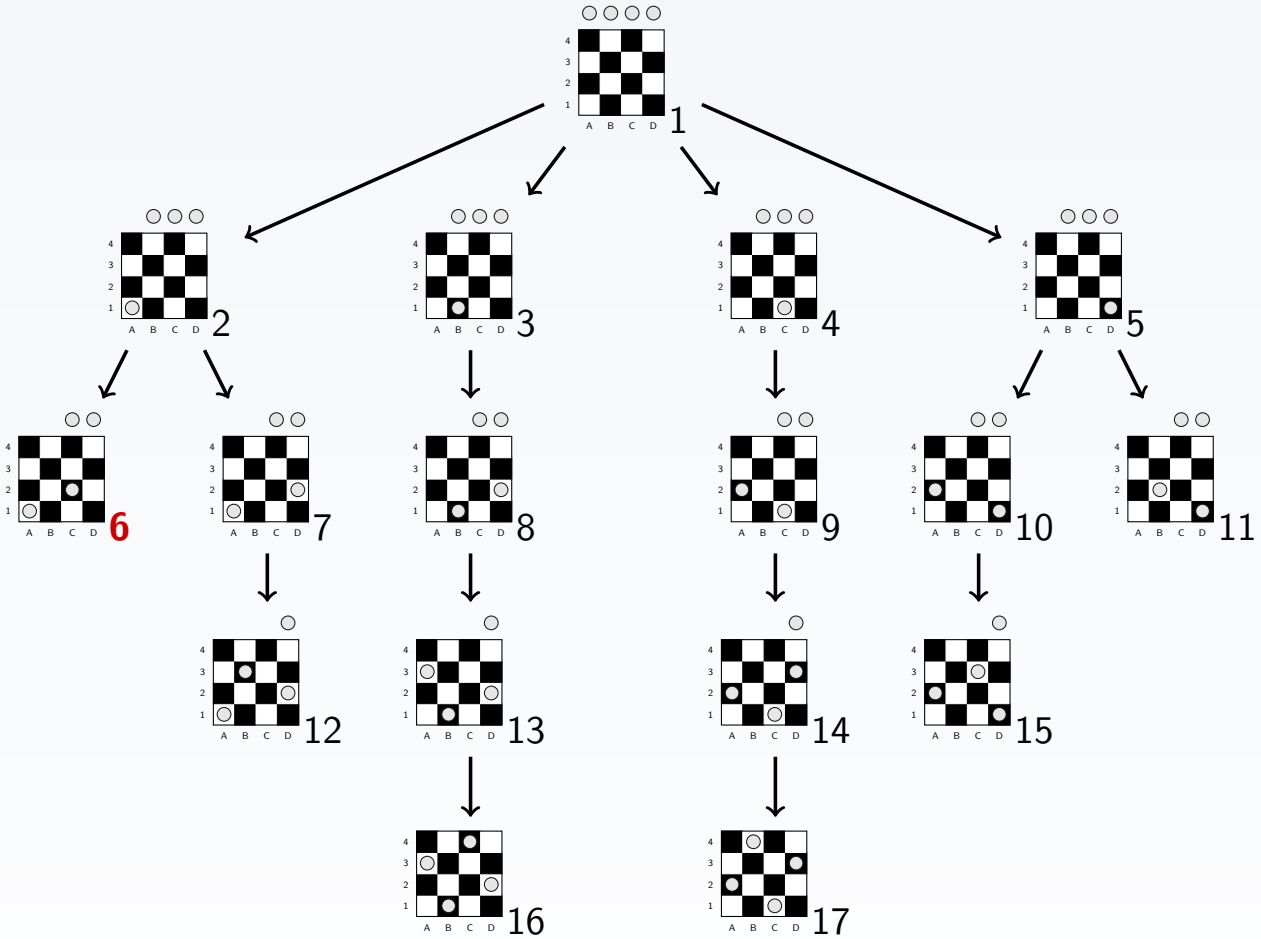


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 5$

1,2,6,7,12,3,8,13,16 $\Rightarrow$ Ziel

Beispiel: Iterative Tiefensuche

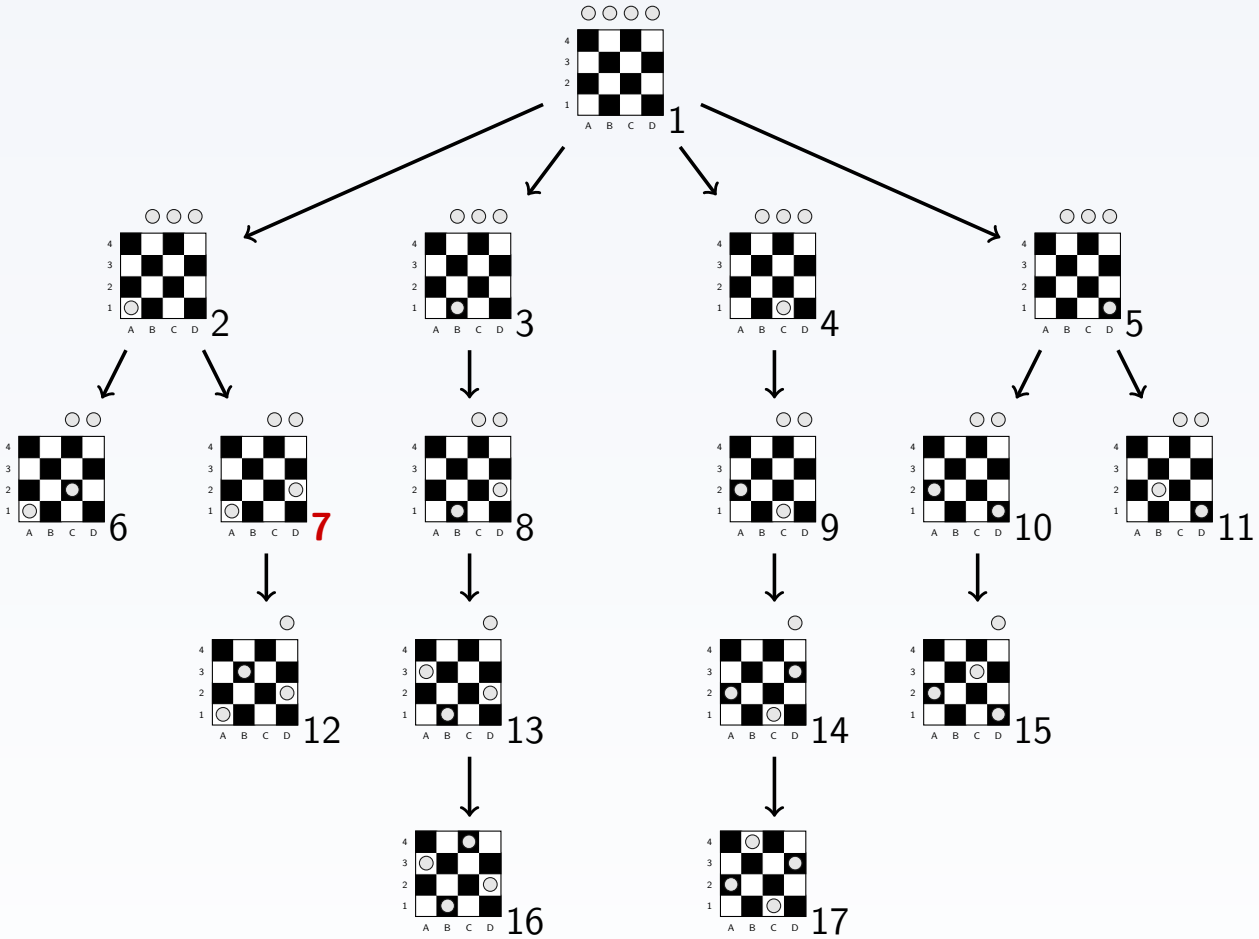


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 5$

1,2,6,7,12,3,8,13,16 $\Rightarrow$ Ziel

Beispiel: Iterative Tiefensuche

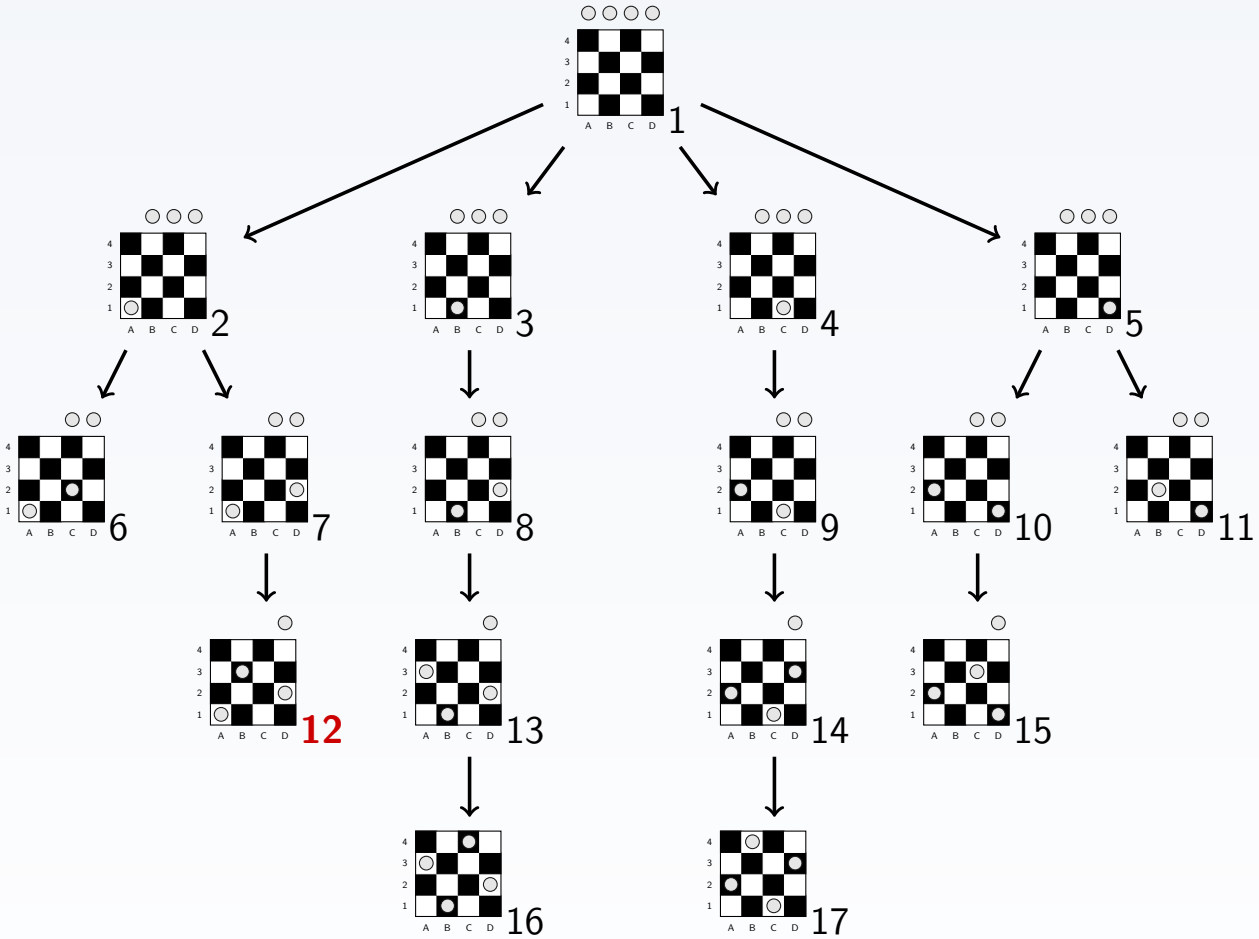


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 5$

1,2,6,7,12,3,8,13,16 $\Rightarrow$ Ziel

Beispiel: Iterative Tiefensuche

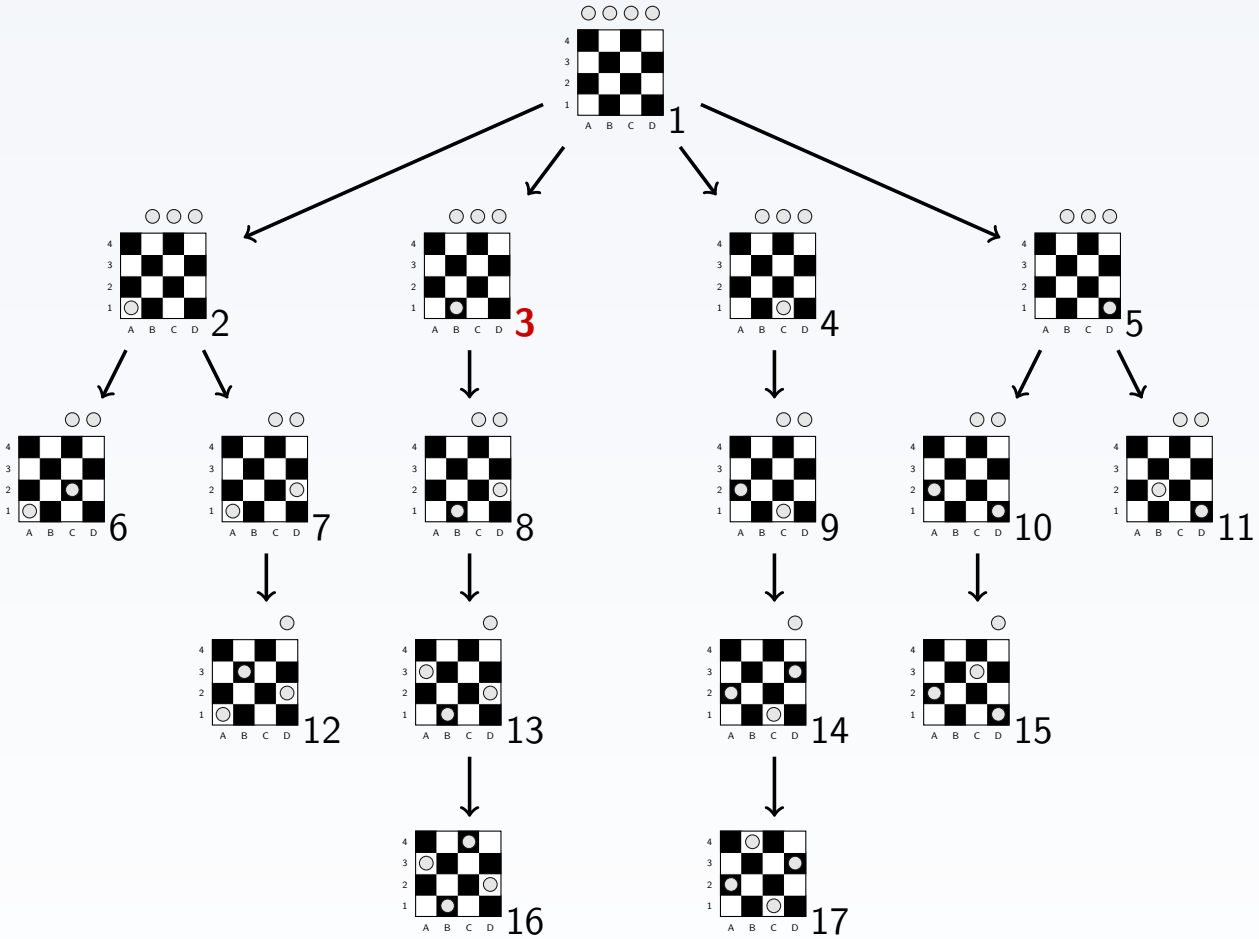


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 5$

1,2,6,7,12,3,8,13,16 $\Rightarrow$ Ziel

Beispiel: Iterative Tiefensuche

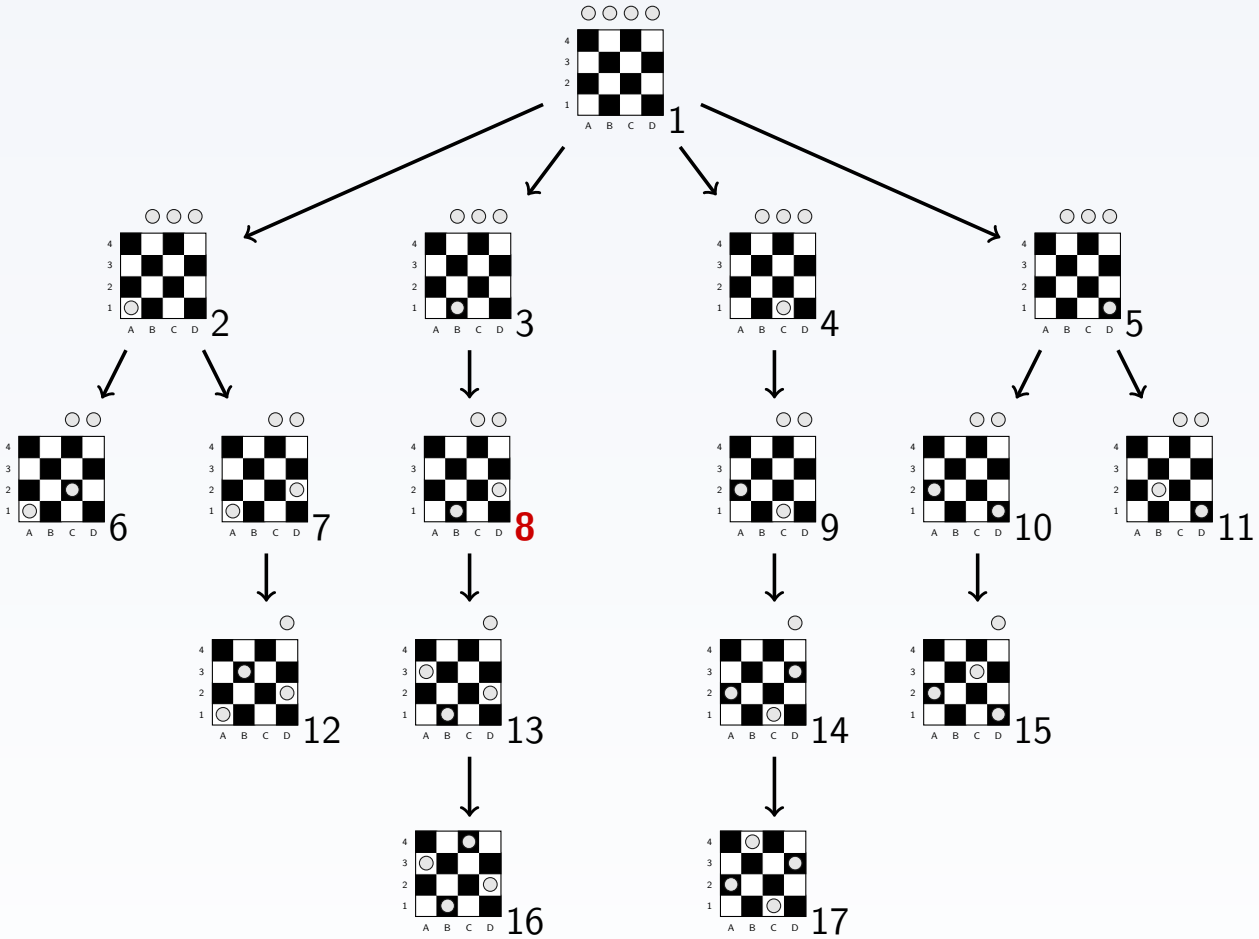


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 5$

1,2,6,7,12,3,8,13,16 $\Rightarrow$ Ziel

Beispiel: Iterative Tiefensuche

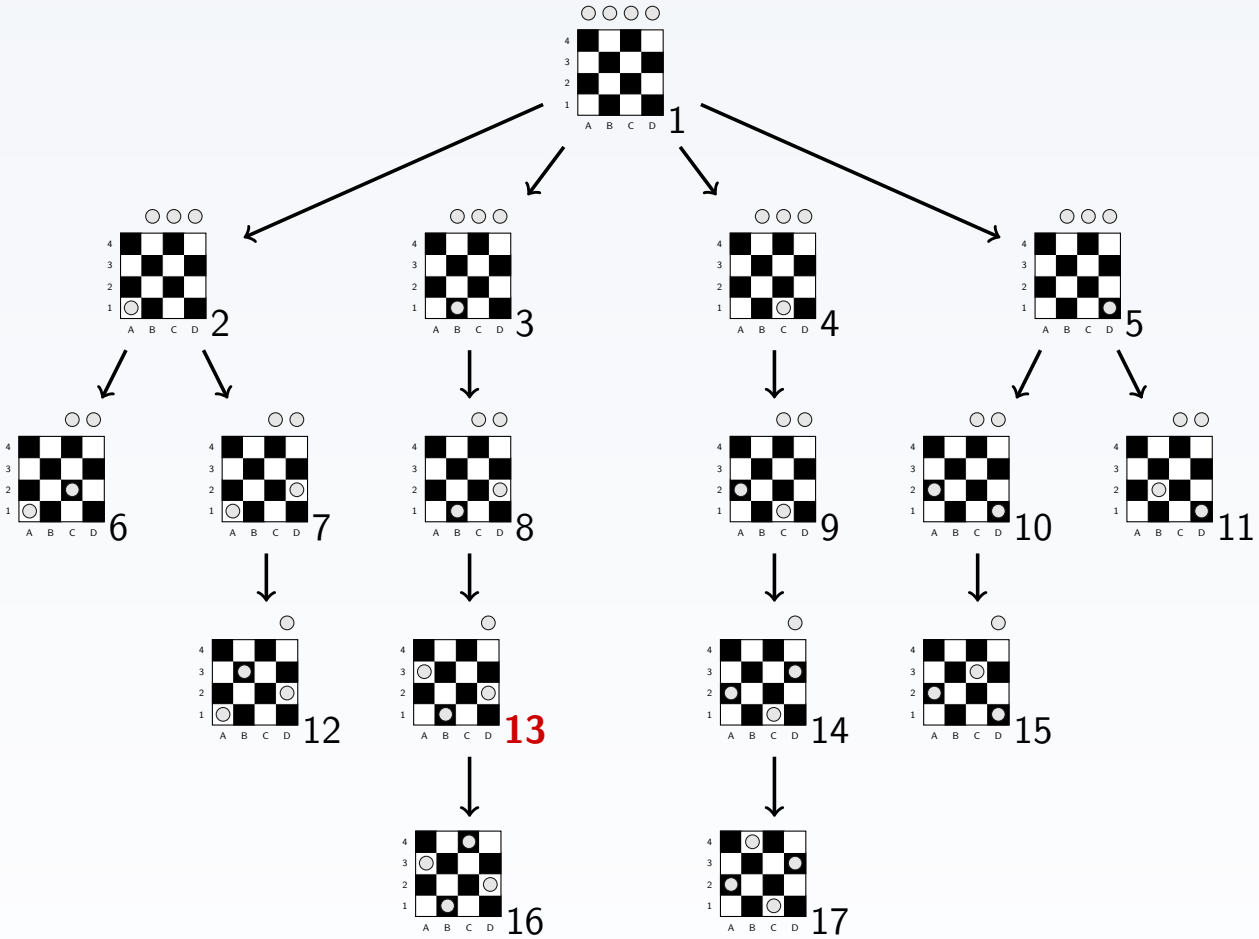


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 5$

1,2,6,7,12,3,8,13,16 $\Rightarrow$ Ziel

Beispiel: Iterative Tiefensuche

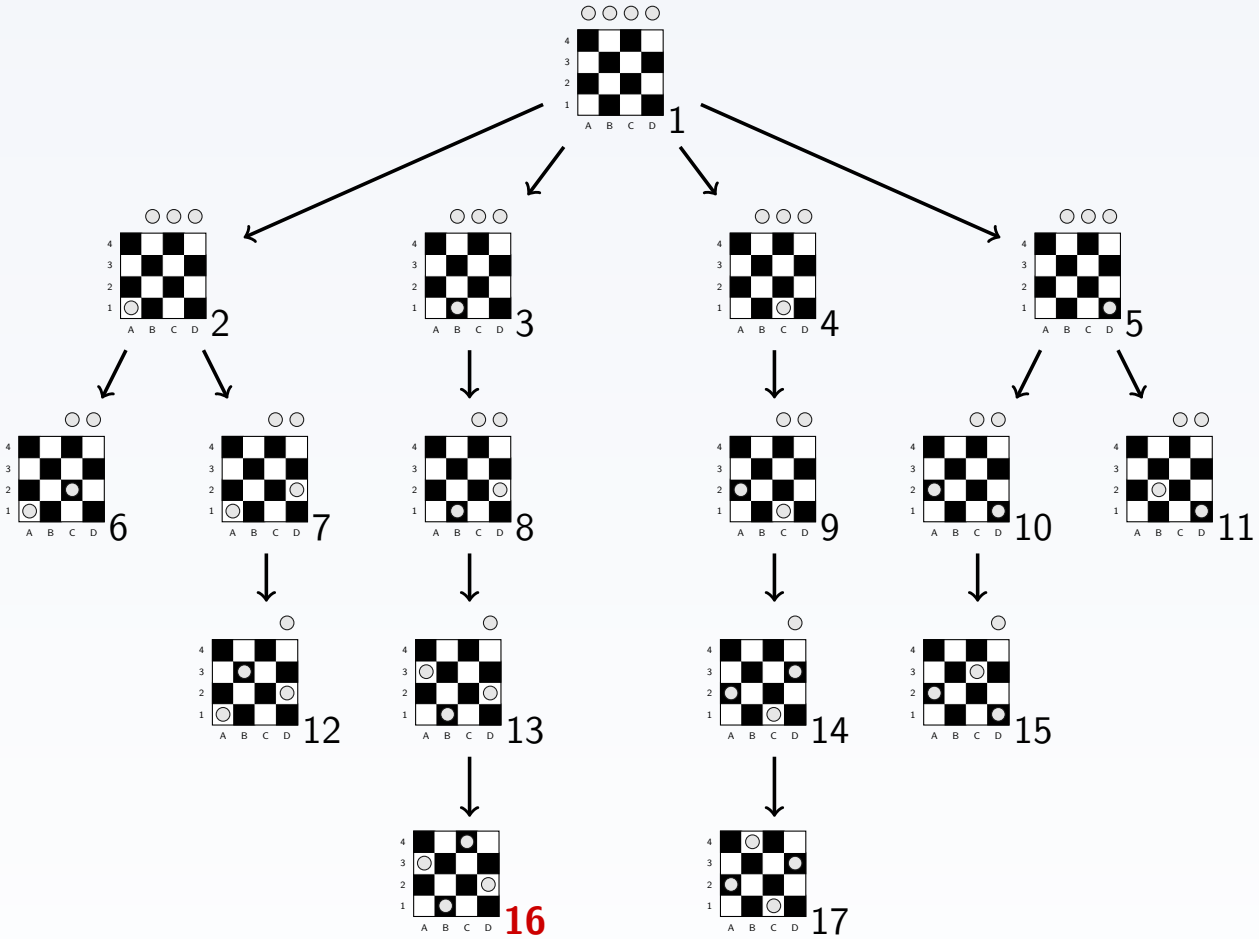


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 5$

1,2,6,7,12,3,8,13,16 $\Rightarrow$ Ziel

Beispiel: Iterative Tiefensuche

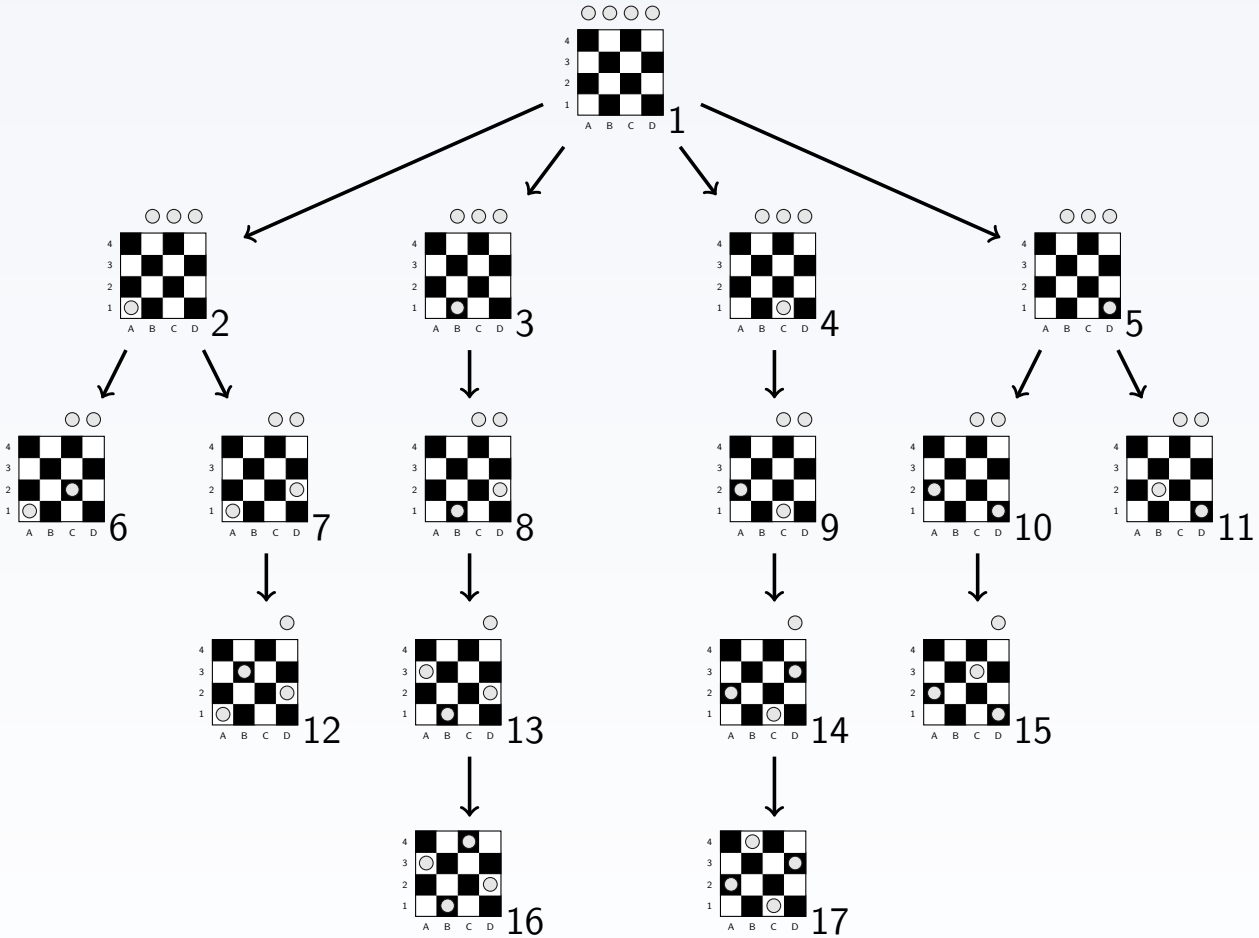


Reihenfolge der Knotenbesuche

$k = 5$

1,2,6,7,12,3,8,13,16 $\Rightarrow$ Ziel

Beispiel: Iterative Tiefensuche



Reihenfolge der Knotenbesuche

41 besuchte Knoten!

Eigenschaften

Komplexität (worst-case) bei mittlerer Verzweigungsreate $c > 1$

- **Platz**: Linear in der Tiefe
- **Zeit**: ? (gleich)

Vollständigkeit

- Die iterative Tiefensuche ist vollständig
  (bei endlicher Verzweigungrate)

Zeitbedarf iteratives Vertiefen (1)

Näherung: $\sum_{i=1}^{n} a^i \approx \frac{a^{n+1}}{a-1}$

Tiefensuche mit Tiefenbeschränkung k

- Alle Knoten besuchen: $\sum_{i=1}^{k} c^i$
- Im Mittel besuchte Knoten (Zielknoten in Tiefe k):

  $0.5 * (\sum_{i=1}^{k} c^i) \approx 0.5 * (\frac{c^{k+1}}{c-1})$

Iteratives Vertiefen bis Tiefe k, im Mittel, Zielknoten in Tiefe k:

$k-1$ Tiefensuchen für Tiefe $1, \ldots, k-1$

$+$Tiefensuche für Tiefe k (Hälfte der Knoten)

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{c^{i+1}}{c-1} + 0.5 * (\frac{c^{k+1}}{c-1})$$

Zeitbedarf iteratives Vertiefen (2)

Näherung: $\sum_{i=1}^{n} a^i \approx \frac{a^{n+1}}{a-1}$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{c^{i+1}}{c-1} + 0.5 * (\frac{c^{k+1}}{c-1}) = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} c^{i+1}}{c-1} + 0.5 * (\frac{c^{k+1}}{c-1})$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{k} c^i) - c^k}{c-1} + 0.5 * (\frac{c^{k+1}}{c-1}) \approx \frac{1}{c-1}((\frac{c^{k+1}}{c-1}) - c^1) + 0.5 * (\frac{c^{k+1}}{c-1})$$

$$= (\frac{c^{k+1}}{(c-1)^2}) - \frac{c}{c-1} + 0.5 * (\frac{c^{k+1}}{c-1}) \approx (\frac{c^{k+1}}{(c-1)^2}) + 0.5 * (\frac{c^{k+1}}{c-1})$$

Zeitbedarf iteratives Vertiefen (3)

Faktor $\frac{\text{Iteratives Vertiefen}}{\text{Tiefensuche bis } k}$:

$$\frac{\frac{c^{k+1}}{(c-1)^2} + 0.5 * (\frac{c^{k+1}}{c-1})}{0.5 * (\frac{c^{k+1}}{c-1})} = \frac{\frac{c^{k+1}}{(c-1)^2}}{0.5 * (\frac{c^{k+1}}{c-1})} + 1 = \frac{2}{c-1} + 1$$

Tabelle der ca.-Werte des Faktors $d = \frac{2}{c-1} + 1$ ist

c	2	3	4	5	...	10
d	3	2	1,67	1,5	...	1,22

Bemerkungen zur iterativen Tiefensuche

Allgemeine Idee dabei:

- Spare Platz, opfere Zeit (speichern vs. neu berechnen)
- Gegensätzlich zum dynamischen Programmieren:
  Dort: Opfere Platz für schnellere Zeit

Varianten

Nutze Platz:

- Speichere Knoten, die bereits expandiert wurden, und betrachte sie nicht neu
  $\Rightarrow$ keine wiederholten Expansionen
- Speichere einen Teil des letzten Suchbaums (z.B. den linken Teil), damit er beim nächsten mal nicht betrachtet werden muss.
- Kombiniere Breitensuche mit Tiefensuche: erst in die Breite, ab dort dann Tiefensuche

Rückwärtssuche

Idee

- Suche nicht vom Start das Ziel, sondern umgekehrt
- Statt Nachfolgerfunktion benutze Vorgängerfunktion

Lohnswert?

- Lohnt, wenn die Verzweigungsrate der Vorgängerfunktion kleiner ist, als die der Nachfolgerfunktion
- Problematisch: Finde algorithmische Beschreibung der Vorgängerfunktion

Bidirektionale Suche

- Suche vorwärts und rückwärts
- Erfordert Vergleich der momentan expandierten Knoten (Schnittmenge)
- Vorteil z.B. bei Breitensuche: Platz: statt c^d nur $2 * (c^{d/2})$ $\approx$ Doppelt so tief suchen in gleichem Platz (wenn #Eingangsknoten $\approx$ #Ausgangsknoten)
- Nachteil: Schnittbildung (Zeitintensiv), und Vorgänger- und Nachfolgerfunktion nötig.