Qualitatives zeitliches Schließen:

„Intelligentes Kuchenbacken“

David Sabel

Goethe-Universität, Frankfurt am Main

16. Juli 2013

Stand der Folien: 16. Juli 2013

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen


Zutaten
besorgen


Teig
zubereiten


Teig ruhen
lassen

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen


Zutaten
besorgen


Teig
zubereiten


Teig ruhen
lassen


Belag
zubereiten


Sahne
schlagen

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen

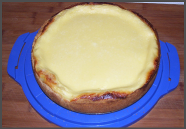
Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen

Käse-Sahne-Kuchen backen

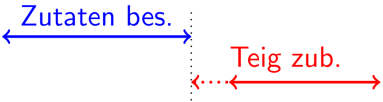


Käse-Sahne-Kuchen backen

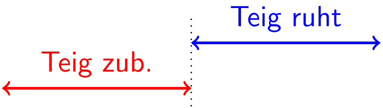
Zeitliche Zusammenhänge

- Aktionen entsprechen (nicht-leeren) **Zeitintervallen**
- Wissen: Anforderungen an die **relative** Lage der Intervalle
- Wie kann man dieses Wissen **repräsentieren**?

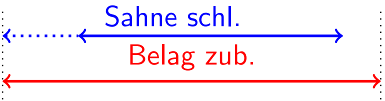
vor



direkt nach



während,
aber vorher
endend



beginnt
während

Welche Schlüsse lassen sich daraus ziehen?

- Neue Beziehungen zwischen Aktionen

  Darf der Belag vor dem Teig in die Form?

- Modell: Anordnung der Intervalle, die alle Beziehungen erfüllt

  Wie gelingt der Kuchen?

- Konsistenz: Gibt es ein Modell?

  Kann man den Kuchen überhaupt backen?

Welche Schlüsse lassen sich daraus ziehen?

- Neue Beziehungen zwischen Aktionen

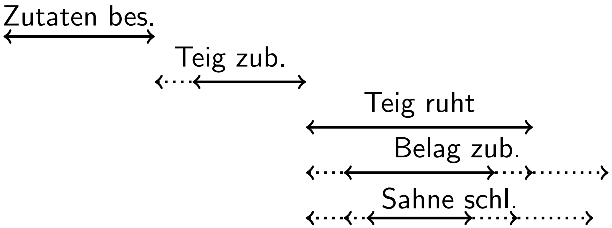
  Darf der Belag vor dem Teig in die Form?

- Modell: Anordnung der Intervalle, die alle Beziehungen erfüllt

  Wie gelingt der Kuchen?

- Konsistenz: Gibt es ein Modell?

  Kann man den Kuchen überhaupt backen?



James F. Allen:

Maintaining knowledge about
temporal intervals

Commun. ACM, 1983

- Logik zur Darstellung der **relativen** Lage von (nicht leeren) **Zeitintervallen**
- **ohne** Absolutwerte (weder von wann bis wann, noch wie lang)

Formeln und Basisrelationen

Allensche Formeln:

$$F ::= (A \ r \ B) \mid \neg F \mid F_1 \vee F_2 \mid F_1 \wedge F_2$$

wobei

- A, B sind Intervallnamen
- r ist eine der Allenschen Basisrelationen

Formeln und Basisrelationen

Allensche Formeln:

$$F ::= (A \ r \ B) \mid \neg F \mid F_1 \vee F_2 \mid F_1 \wedge F_2$$

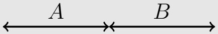
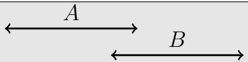
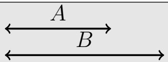
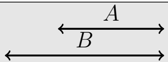
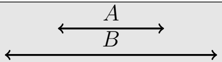
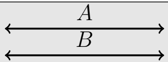
wobei

- A, B sind Intervallnamen
- r ist eine der Allenschen Basisrelationen

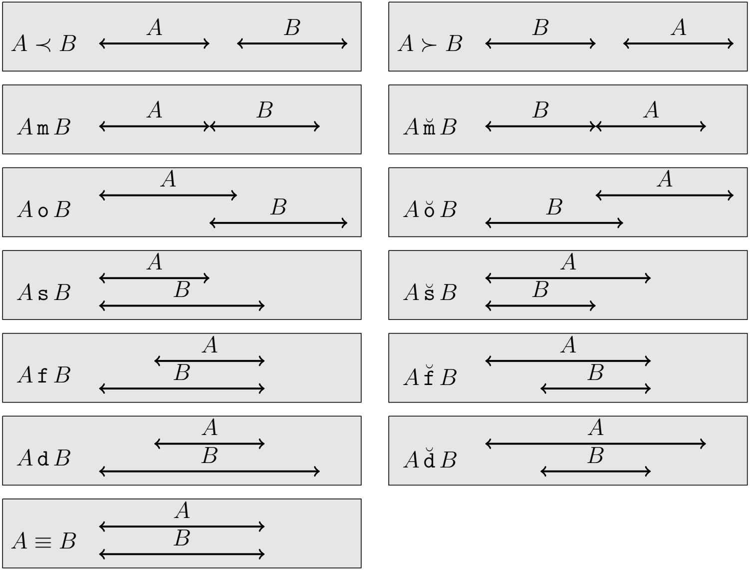
Basisrelationen: Gegeben zwei nichtleere reellwertige Intervalle:

- Wie können A und B zueinander liegen?
- Wieviele Möglichkeiten gibt es?

Allensche Basisrelationen, Teil 1

$A \prec B$	A before B	
$A \, \mathtt{m} \, B$	A meets B	
$A \, \mathtt{o} \, B$	A overlaps B	
$A \, \mathtt{s} \, B$	A starts B	
$A \, \mathtt{f} \, B$	A finishes B	
$A \, \mathtt{d} \, B$	A during B	
$A \equiv B$	A equal B	

Alle Allensche Basisrelationen



Allensche Basisrelationen

Die 13 Allenschen Basis-Relationen sind:

$$\mathcal{R} := \{\equiv, \prec, \mathtt{m}, \mathtt{o}, \mathtt{s}, \mathtt{d}, \mathtt{f}, \succ, \breve{\mathtt{m}}, \breve{\mathtt{o}}, \breve{\mathtt{s}}, \breve{\mathtt{d}}, \breve{\mathtt{f}}\}.$$

Die Allenschen Basis-Relationen sind paarweise disjunkt, d.h.

$$A\ r_1\ B \wedge A\ r_2\ B \implies r_1 = r_2.$$

Schreibweise

$$A\{r_1, \dots, r_n\}B := (A\ r_1\ B) \vee (A\ r_2\ B) \dots \vee (A\ r_n\ B)$$

$A\{r_1, \dots, r_n\}B$ nennt man **atomares Allen-Constraint**

vor

Zutaten $\{\prec, \mathtt{m}\}$ TeigZub

direkt nach

TeigR $\{\breve{\mathtt{m}}\}$ TeigZub

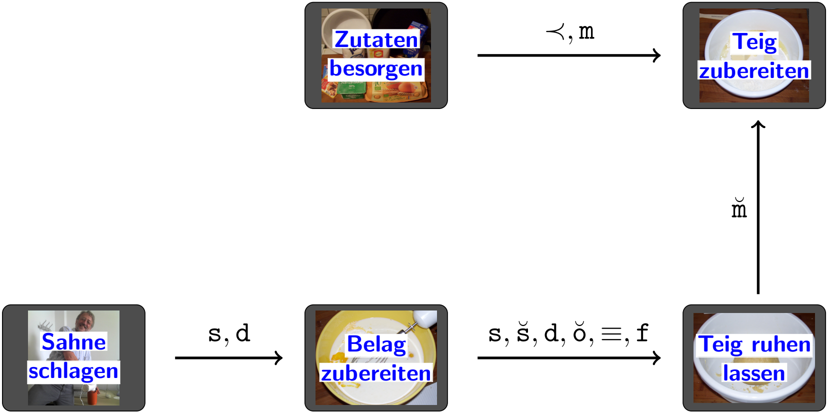
während, aber vorher endend

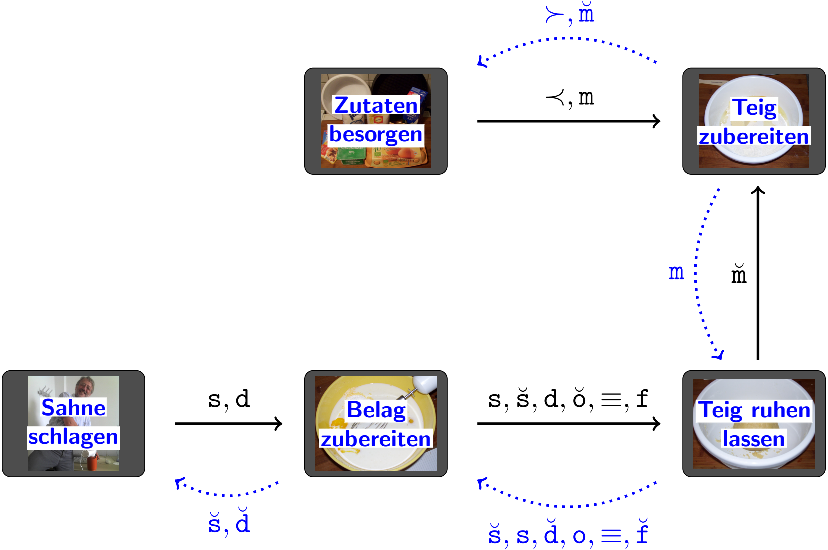
Sahne $\{\mathtt{s}, \mathtt{d}\}$ BelagZub

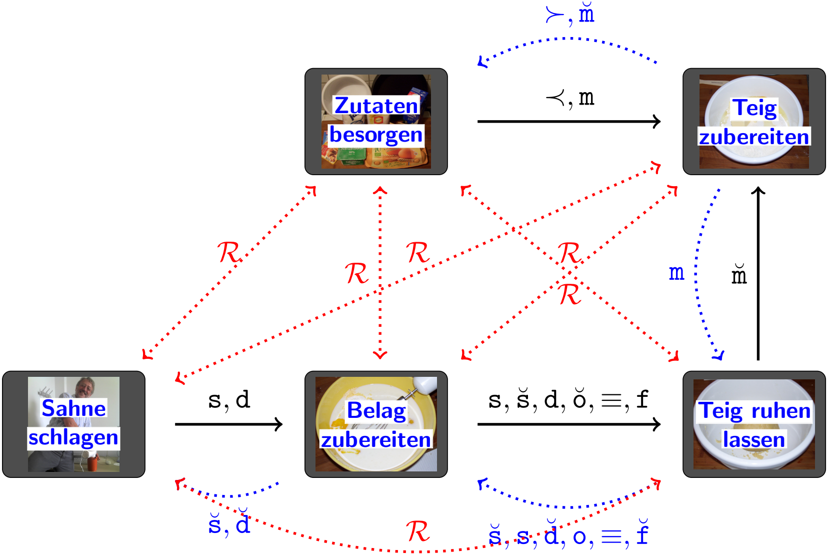
beginnt während

BelagZub $\{\mathtt{s}, \breve{\mathtt{s}}, \mathtt{d}, \breve{\mathtt{o}}, \equiv, \mathtt{f}\}$ TeigR

Beispiel als Constraintnetzwerk




≻, m̆
≺, m
Zutaten besorgen
Teig zubereiten
m
m̆
Sahne schlagen
s, d
Belag zubereiten
s, š, d, ŏ, ≡, f
Teig ruhen lassen
š, ď
š, s, ď, o, ≡, f̆


$\succ, \breve{m}$
Zutaten besorgen
$\prec, m$
Teig zubereiten
$\mathcal{R}$
$\mathcal{R}$
$\mathcal{R}$
$\mathcal{R}$
$\mathcal{R}$
m
$\breve{m}$
Sahne schlagen
s, d
Belag zubereiten
s, $\breve{s}$, d, $\breve{o}$, $\equiv$, f
Teig ruhen lassen
$\breve{s}$, $\breve{d}$
$\mathcal{R}$
$\breve{s}$, s, $\breve{d}$, o, $\equiv$, $\breve{f}$

Interpretation I: Intervallnamen $\to$ reellwertige Intervalle,
d.h. $I(A) = [a_a, a_e]$, mit $a_a, a_e \in \mathbb{R}$ und $a_a < a_e$.

Interpretation der **Formeln**:

- Sei $I(A) = [a_a, a_e]$ und $I(B) = [b_a, b_e]$, dann

$$
\begin{array}{lcll}
I(A \prec B) & = & \texttt{True}, & \text{gdw. } a_e < b_a \\
I(A \ \texttt{m}\ B) & = & \texttt{True}, & \text{gdw. } a_e = b_a \\
I(A \ \texttt{o}\ B) & = & \texttt{True}, & \text{gdw. } a_a < b_a,\ b_a < a_e \text{ und } a_e < b_e \\
I(A \ \texttt{s}\ B) & = & \texttt{True}, & \text{gdw. } a_a = b_a \text{ und } a_e < b_e \\
I(A \ \texttt{f}\ B) & = & \texttt{True}, & \text{gdw. } a_a > b_a \text{ und } a_e = b_e \\
I(A \ \texttt{d}\ B) & = & \texttt{True}, & \text{gdw. } a_a > b_a \text{ und } a_e < b_e \\
I(A \equiv B) & = & \texttt{True}, & \text{gdw. } a_a = b_a \text{ und } a_e = b_e \\
I(A \ \breve{r}\ B) & = & I(B\ r\ A) &
\end{array}
$$

- $I(F \wedge G) = \texttt{True}$ gdw. $I(F) = \texttt{True}$ und $I(G) = \texttt{True}$
- $I(F \vee G) = \texttt{True}$ gdw. $I(F) = \texttt{True}$ oder $I(G) = \texttt{True}$.
- $I(\neg F) = \texttt{True}$ gdw. $I(F) = \texttt{False}$

Modelle und Erfüllbarkeit

Interpretation I ist ein **Modell** für F gdw. $I(F) = \texttt{True}$ gilt.

Eine Allensche Formel F ist:

- **widersprüchlich** (inkonsistent), wenn es kein Modell für F gibt.
- **erfüllbar**, wenn es mindestens ein Modell für F gibt.

Zwei Formeln F und G sind **äquivalent** gdw. $\forall I : I(F) = I(G)$

- **Atomares Allen-Constraint:** $A \; R \; B$ mit $R \subseteq \mathcal{R}$
- **Konjunktives Allen-Constraint:** $A_1 \; R \; B_1 \land \ldots \land A_n \; R \; B_n$
- **Disjunktives Allen-Constraint:** $C_1 \lor \ldots \lor C_m$,
  wobei C_i konjunktive Allen-Constraints

Satz

Jede Allen-Formel kann als äquivalentes disjunktives Allen-Constraint dargestellt werden

Erfüllbarkeit von disjunktiven Allen-Constraints:

Finde einen erfüllbaren konjunktiven Allen-Constraint.

Daher: Erfüllbarkeitsproblem von **konjunktiven Allen-Constraints** ist **das interessante Problem**

Eingabe: Konjunktives Allen-Constraint

Ausgabe: Allenscher Abschluss

Verfahren: Berechne Fixpunkt bezüglich der Regeln (auf Subformeln):

- Vereinfachungen: ($\rightarrow$ bedeutet „ersetze“)
  - $A\ R_1\ B \land A\ R_2\ B \rightarrow A\ (R_1 \cap R_2)\ B$
  - $A\ \emptyset\ B \rightarrow \texttt{False}$
  - $A\ \mathcal{R}\ B \rightarrow \texttt{True}$
  - $A\ R\ A \rightarrow \texttt{False}$, wenn $\equiv \not\in R$.
  - $A\ R\ A \rightarrow \texttt{True}$, wenn $\equiv \in R$.
- Folgerungen: ($\rightsquigarrow$ bedeutet „füge hinzu“)
  - $A\ R\ B \rightsquigarrow B\ \breve{R}\ A$, wobei $\breve{R} := \{\breve{r_1}, \ldots, \breve{r_n}\}$ für $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$
  - $A\ R_1\ B \land B\ R_2\ C \rightsquigarrow A\ (R_1 \circ R_2)\ C$.
- und übliche aussagenlogische Umformungen

Wesentliche Regel: $A\ R_1\ B \land B\ R_2\ C \rightsquigarrow A\ (R_1 \circ R_2)\ C$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R_1"] \arrow[rr, bend right, "R_1 \circ R_2"'] & B \arrow[r, "R_2"] & C \end{tikzcd}$$

$$(R_1 \circ R_2) := \bigcup \{r_i \circ r_j \mid r_i \in R_1, r_j \in R_2\}$$

Allenscher Abschluss (2)

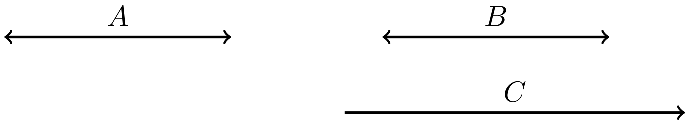
Wesentliche Regel: $A\ R_1\ B \wedge B\ R_2\ C \rightsquigarrow A\ (R_1 \circ R_2)\ C$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "R_1"] \arrow[rr, bend right, "R_1 \circ R_2"'] & B \arrow[r, "R_2"] & C
\end{tikzcd}$$

$$(R_1 \circ R_2) := \bigcup \{r_i \circ r_j \mid r_i \in R_1, r_j \in R_2\}$$

Komposition der Basisrelationen: $r_i \circ r_j$ kann man vorberechnen.

Beispiel: $A \prec B \wedge B\ \mathtt{d}\ C$



Allenscher Abschluss (2)

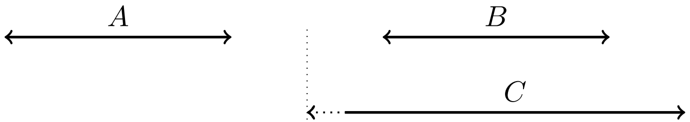
Wesentliche Regel: $A\ R_1\ B \wedge B\ R_2\ C \rightsquigarrow A\ (R_1 \circ R_2)\ C$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R_1"] \arrow[rr, bend right, "R_1 \circ R_2"'] & B \arrow[r, "R_2"] & C \end{tikzcd}$$

$$(R_1 \circ R_2) := \bigcup \{r_i \circ r_j \mid r_i \in R_1, r_j \in R_2\}$$

Komposition der Basisrelationen: $r_i \circ r_j$ kann man vorberechnen.

Beispiel: $A \prec B \wedge B\ \mathtt{d}\ C$



Möglichkeiten: $A\ \{\prec, \qquad\qquad\}\ C$.

Allenscher Abschluss (2)

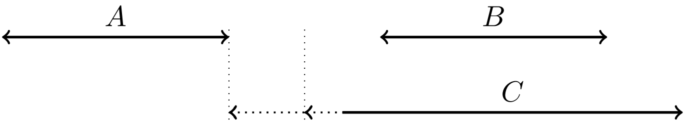
Wesentliche Regel: $A\ R_1\ B \wedge B\ R_2\ C \rightsquigarrow A\ (R_1 \circ R_2)\ C$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R_1"] \arrow[rr, bend right, "R_1 \circ R_2"'] & B \arrow[r, "R_2"] & C \end{tikzcd}$$

$$(R_1 \circ R_2) := \bigcup \{ r_i \circ r_j \mid r_i \in R_1, r_j \in R_2 \}$$

Komposition der Basisrelationen: $r_i \circ r_j$ kann man vorberechnen.

Beispiel: $A \prec B \wedge B\ \mathtt{d}\ C$



Möglichkeiten: $A\ \{\prec, \mathtt{m} \qquad \}\ C$.

Allenscher Abschluss (2)

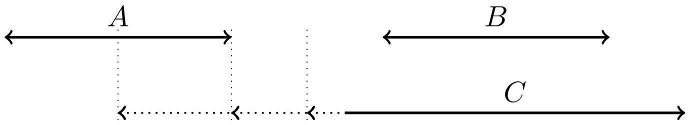
Wesentliche Regel: $A\ R_1\ B \wedge B\ R_2\ C \rightsquigarrow A\ (R_1 \circ R_2)\ C$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R_1"] \arrow[rr, bend right, "R_1 \circ R_2"'] & B \arrow[r, "R_2"] & C \end{tikzcd}$$

$$(R_1 \circ R_2) := \bigcup \{r_i \circ r_j \mid r_i \in R_1, r_j \in R_2\}$$

Komposition der Basisrelationen: $r_i \circ r_j$ kann man vorberechnen.

Beispiel: $A \prec B \wedge B\ \mathtt{d}\ C$



Möglichkeiten: $A\ \{\prec, \mathtt{m}, \mathtt{o} \qquad\}\ C$.

Allenscher Abschluss (2)

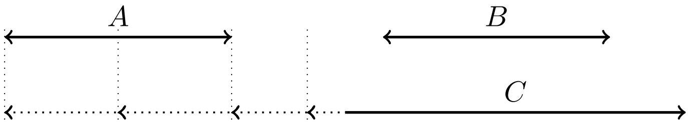
Wesentliche Regel: $A\ R_1\ B \wedge B\ R_2\ C \rightsquigarrow A\ (R_1 \circ R_2)\ C$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R_1"] \arrow[rr, bend right, "R_1 \circ R_2"'] & B \arrow[r, "R_2"] & C \end{tikzcd}$$

$$(R_1 \circ R_2) := \bigcup \{ r_i \circ r_j \mid r_i \in R_1, r_j \in R_2 \}$$

Komposition der Basisrelationen: $r_i \circ r_j$ kann man vorberechnen.

Beispiel: $A \prec B \wedge B\ \mathtt{d}\ C$



Möglichkeiten: $A\ \{\prec, \mathtt{m}, \mathtt{o}, \mathtt{s}\quad\}\ C$.

Allenscher Abschluss (2)

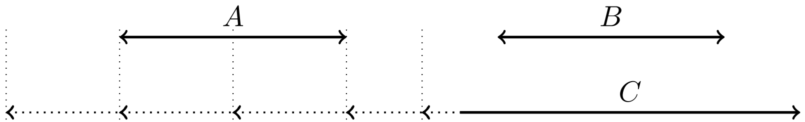
Wesentliche Regel: $A\ R_1\ B \wedge B\ R_2\ C \rightsquigarrow A\ (R_1 \circ R_2)\ C$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R_1"] \arrow[rr, bend right, "R_1 \circ R_2"'] & B \arrow[r, "R_2"] & C \end{tikzcd}$$

$$(R_1 \circ R_2) := \bigcup \{r_i \circ r_j \mid r_i \in R_1, r_j \in R_2\}$$

Komposition der Basisrelationen: $r_i \circ r_j$ kann man vorberechnen.

Beispiel: $A \prec B \wedge B\ \mathtt{d}\ C$



Möglichkeiten: $A\ \{\prec, \mathtt{m}, \mathtt{o}, \mathtt{s}, \mathtt{d}\}\ C$.

Allenscher Abschluss (2)

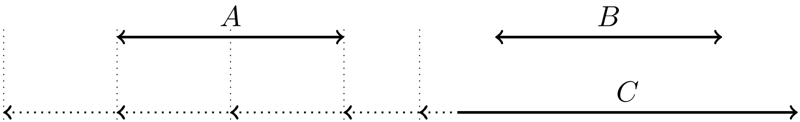
Wesentliche Regel: $A\ R_1\ B \wedge B\ R_2\ C \leadsto A\ (R_1 \circ R_2)\ C$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R_1"] \arrow[rr, bend right, "R_1 \circ R_2"'] & B \arrow[r, "R_2"] & C \end{tikzcd}$$

$$(R_1 \circ R_2) := \bigcup \{ r_i \circ r_j \mid r_i \in R_1, r_j \in R_2 \}$$

Komposition der Basisrelationen: $r_i \circ r_j$ kann man vorberechnen.

Beispiel: $A \prec B \wedge B\ \mathtt{d}\ C$



Möglichkeiten: $A\ \{\prec, \mathtt{m}, \mathtt{o}, \mathtt{s}, \mathtt{d}\}\ C$. Daher: $\prec\ \circ\ \mathtt{d} = \{\prec, \mathtt{o}, \mathtt{m}, \mathtt{s}, \mathtt{d}\}$

Kompositionsmatrix

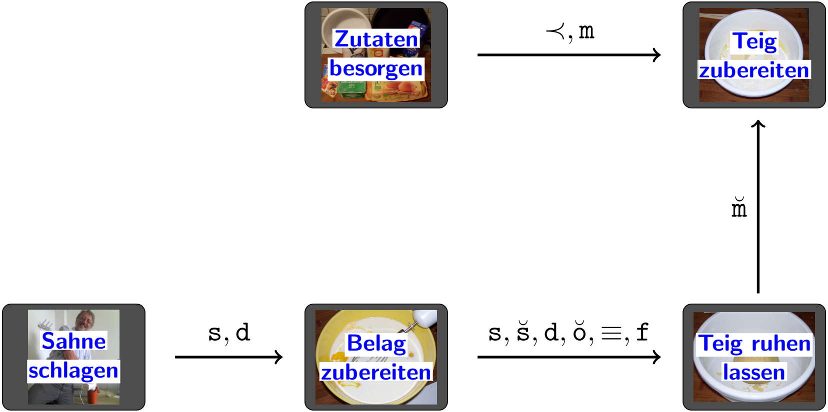
	$\prec$	$\succ$	d	$\breve{d}$	o	$\breve{o}$	m	$\breve{m}$	s	$\breve{s}$	f	$\breve{f}$
$\prec$	$\prec$	$\mathcal{R}$	$\prec\ o\ m\ d\ s$	$\prec$	$\prec$	$\prec\ o\ m\ d\ s$	$\prec$	$\prec\ o\ m\ d\ s$	$\prec$	$\prec$	$\prec\ o\ m\ d\ s$	$\prec$
$\succ$	$\mathcal{R}$	$\succ$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ d\ f$	$\succ$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ d\ f$	$\succ$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ d\ f$	$\succ$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ d\ f$	$\succ$	$\succ$	$\succ$
d	$\prec$	$\succ$	d	$\mathcal{R}$	$\prec\ o\ m\ d\ s$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ d\ f$	$\prec$	$\succ$	d	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ d\ f$	d	$\prec\ o\ m\ d\ s$
$\breve{d}$	$\prec\ o\ m\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$\mathcal{R} \setminus \prec\ \succ\ m\ \breve{m}$	$\breve{d}$	$o\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\breve{o}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$o\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\breve{o}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$o\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\breve{d}$	$\breve{o}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$\breve{d}$
o	$\prec$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$o\ d\ s$	$\prec\ o\ m\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\prec\ o\ m$	$\mathcal{R} \setminus \prec\ \succ\ m\ \breve{m}$	$\prec$	$\breve{o}\ \breve{d}\ \breve{s}$	o	$\breve{d}\ \breve{f}\ o$	$d\ s\ o$	$\prec\ o\ m$
$\breve{o}$	$\prec\ o\ m\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\succ$	$\breve{o}\ d\ f$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$\mathcal{R} \setminus \prec\ \succ\ m\ \breve{m}$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}$	$o\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\succ$	$\breve{o}\ d\ f$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}$	$\breve{o}$	$\breve{o}\ \breve{d}\ \breve{s}$
m	$\prec$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$o\ d\ s$	$\prec$	$\prec$	$o\ d\ s$	$\prec$	$\equiv\ f\ \breve{f}$	m	m	$d\ s\ o$	$\prec$
$\breve{m}$	$\prec\ o\ m\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\succ$	$\breve{o}\ d\ f$	$\succ$	$\breve{o}\ d\ f$	$\succ$	$\equiv\ s\ \breve{s}$	$\succ$	$d\ f\ \breve{o}$	$\succ$	$\breve{m}$	$\breve{m}$
s	$\prec$	$\succ$	d	$\prec\ o\ m\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\prec\ o\ m$	$\breve{o}\ d\ f$	$\prec$	$\breve{m}$	s	$\equiv\ s\ \breve{s}$	d	$\prec\ o\ m$
$\breve{s}$	$\prec\ o\ m\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\succ$	$\breve{o}\ d\ f$	$\breve{d}$	$o\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\breve{o}$	$o\ \breve{d}\ \breve{f}$	$\breve{m}$	$\equiv\ s\ \breve{s}$	$\breve{s}$	$\breve{o}$	$\breve{d}$
f	$\prec$	$\succ$	d	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$o\ d\ s$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}$	m	$\succ$	d	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}$	f	$\equiv\ f\ \breve{f}$
$\breve{f}$	$\prec$	$\succ\ \breve{o}\ \breve{m}\ \breve{d}\ \breve{s}$	$o\ d\ s$	$\breve{d}$	o	$\breve{o}\ \breve{d}\ \breve{s}$	m	$\breve{o}\ \breve{d}\ \breve{s}$	o	$\breve{d}$	$\equiv\ f\ \breve{f}$	$\breve{f}$

und

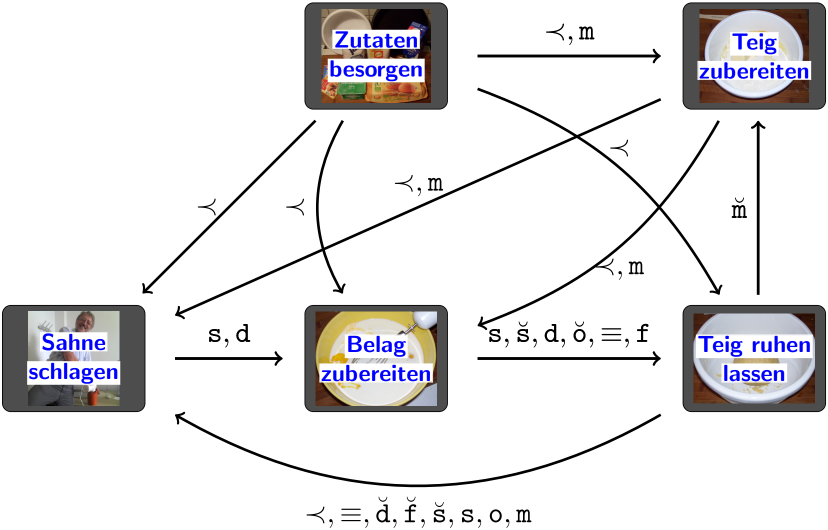
$$(r \circ \equiv) = r$$

$$(\equiv \circ r) = r$$

Beispiel

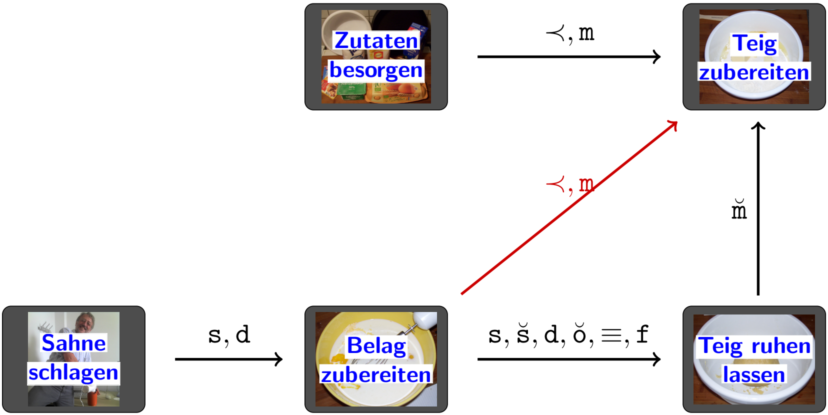

Zutaten besorgen
≺, m
Teig zubereiten
m̆
Sahne schlagen
s, d
Belag zubereiten
s, š, d, ŏ, ≡, f
Teig ruhen lassen

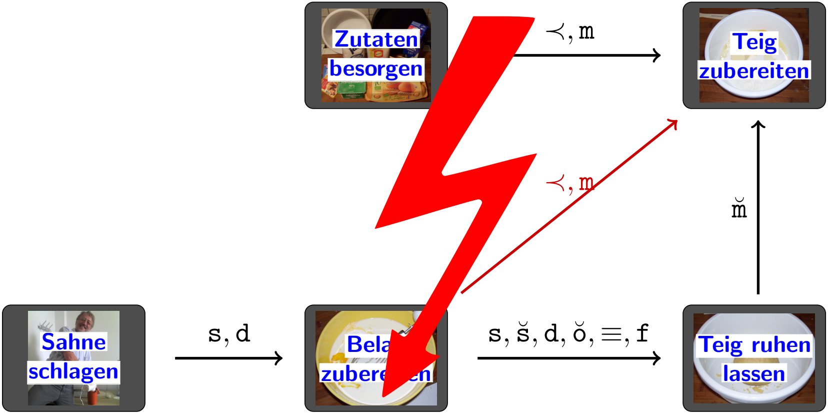
Beispiel



Zutaten besorgen
Teig zubereiten
Sahne schlagen
Belag zubereiten
Teig ruhen lassen
≺, m
≺
≺
≺
≺, m
m̆
≺, m
s, d
s, š, d, ŏ, ≡, f
≺, ≡, ď, f̆, š, s, o, m

Beispiel (2)


Zutaten besorgen
≺, m
Teig zubereiten
≺, m
m̆
Sahne schlagen
s, d
Belag zubereiten
s, š, d, ŏ, ≡, f
Teig ruhen lassen


Zutaten besorgen
≺, m
Teig zubereiten
≺, m
m̆
Sahne schlagen
s, d
Bela
zubere en
s, š, d, ŏ, ≡, f
Teig ruhen lassen

Satz

Der Allensche Abschluss für n Intervalle kann in Zeit $O(n^3)$ berechnet werden.

Algorithmus **Allenscher Abschluss**

Eingabe: $(n \times n)$-Array R, mit Einträgen $R_{i,j} \subseteq \mathcal{R}$

$R_{i,j}$	(1) Zutaten	(2) Teigzub	(3) Teigruht	(4) Sahne	(5) Belagzub
(1) Zutaten	$\{\equiv\}$	$\{\prec, \mathtt{m}\}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$
(2) Teigzub	$\{\succ, \breve{\mathtt{m}}\}$	$\{\equiv\}$	$\{\mathtt{m}\}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$
(3) Teigruht	$\mathcal{R}$	$\{\breve{\mathtt{m}}\}$	$\{\equiv\}$	$\mathcal{R}$	$\{\equiv, \breve{\mathtt{d}}, \breve{\mathtt{f}}, \mathtt{s}, \breve{\mathtt{s}}, \mathtt{o}\}$
(4) Sahne	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\{\equiv\}$	$\{\mathtt{d}, \mathtt{s}\}$
(5) Belagzub	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\{\equiv, \mathtt{s}, \breve{\mathtt{s}}, \mathtt{d}, \mathtt{f}, \breve{\mathtt{o}}\}$	$\{\breve{\mathtt{d}}, \breve{\mathtt{s}}\}$	$\{\equiv\}$

Allenscher Abschluss: Eigenschaften

Satz

Der Allensche Abschluss für n Intervalle kann in Zeit $O(n^3)$ berechnet werden.

Algorithmus **Allenscher Abschluss**

Eingabe: $(n \times n)$-Array R, mit Einträgen $R_{i,j} \subseteq \mathcal{R}$

procedure AllenAbschluss(R):
  queue := $\{(i,k,j) \mid 1 \leq i,k,j \leq n\}$;
  while queue $\neq \emptyset$ **do**
    Wähle und entferne Tripel (i,k,j) aus queue;
    $R' := R_{i,j} \cap (R_{i,k} \circ R_{k,j})$;

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "R_{i,k}"] \arrow[rr, bend right, "R_{i,j}"'] & k \arrow[r, "R_{k,j}"] & j \end{tikzcd}$$

    if $R_{i,j} \neq R'$ **then**
      $R_{i,j} := R'$;
      queue := queue ++ $\{(i,j,m) \mid 1 \leq m \leq n\}$ ++ $\{(m,i,j) \mid 1 \leq m \leq n\}$
    endif
  endwhile

Allenscher Abschluss: Eigenschaften

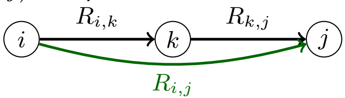
Satz

Der Allensche Abschluss für n Intervalle kann in Zeit $O(n^3)$ berechnet werden.

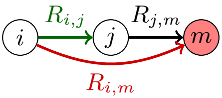
Algorithmus **Allenscher Abschluss**

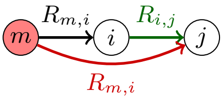
Eingabe: $(n \times n)$-Array R, mit Einträgen $R_{i,j} \subseteq \mathcal{R}$

procedure AllenAbschluss(R):
  queue $:= \{(i,k,j) \mid 1 \leq i,k,j \leq n\}$;
  while queue $\neq \emptyset$ **do**
    Wähle und entferne Tripel (i,k,j) aus queue;
    $R' := R_{i,j} \cap (R_{i,k} \circ R_{k,j})$;



    if $R_{i,j} \neq R'$ **then**
      $R_{i,j} := R'$;
      queue := queue ++ $\{(i,j,m) \mid 1 \leq m \leq n\}$ ++ $\{(m,i,j) \mid 1 \leq m \leq n\}$
    endif
  endwhile





Allenscher Abschluss: Eigenschaften

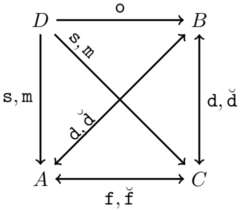
Theorem

Der Allensche Kalkül ist **korrekt**, d.h. wenn F' der Allensche Abschluss von F, dann sind F und F' äquivalente Formeln.

Aber der Allensche Kalkül ist **weder herleitungsvollständig noch widerspruchsvollständig**, d.h.

- Die hergeleiteten Einzel-Relationen sind nicht minimal bzgl. der Semantik
- Widersprüchliche Formeln werden nicht immer erkannt.

Beispiel zur Widerspruchs-Unvollständigkeit:



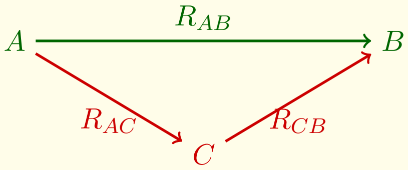
Der Allensche Abschluss verändert keine der Beziehungen, aber sie sind widersprüchlich!

Partielle Vollständigkeit

Der Allensche Kalkül ist vollständig in eingeschränktem Sinn:

Satz (Pfadkonsistenz)

Der Allensche Abschluss ist 3-konsistent:



Jede Belegung I der Intervalle A und B mit $I(A\ R_{AB}\ B) = \texttt{True}$ kann auf das Intervall C erweitert werden, so dass $I(A\ R_{BC}\ C) = \texttt{True} = I(C\ R_{AC}\ B)$.

Es gilt **nicht** (globale Konsistenz):

Jede Belegung von k Knoten kann auf $k+1$ Knoten unter Erhaltung der Erfüllbarkeit erweitert werden

Definition: Ein konjunktives Allen-Constraint ist **eindeutig**, gdw. alle atomaren Constraints von der Form $A\ \{r\}\ B$ sind.

Satz (Valdés-Pérez, 1987)

Auf eindeutigen Allen-Constraints ist der Allen-Kalkül korrekt und vollständig

Algorithmus **Erfüllbarkeitstest für konjunktive Allensche Constraints**

Eingabe: $(n \times n)$-Array R, mit Einträgen $R_{i,j} \subseteq \mathcal{R}$

function ASAT(R):
  R' := AllenAbschluss(R);
  if $\exists R'_{i,j}$ mit $R'_{i,j} = \emptyset$ **then return** `False` **endif**;
  if $\forall R'_{i,j}$ gilt: $|R'_{i,j}| = 1$ **then return** `True`
  else
    wähle $R'_{i,j}$ mit $R'_{i,j} = \{r_1, r_2, \ldots\}$;
    $R^l := R'$; $R^l_{i,j} := \{r_1\}$;
    $R^r := R'$; $R^r_{i,j} := R'_{i,j} \setminus \{r_1\}$;
    return (ASAT(R^l) $\vee$ ASAT(R^r));
  endif

Der Algorithmus ist korrekt und vollständig. Die Laufzeit ist im worst-case **exponentiell**. Mittlere Verzweigungsrate: 6,5

Satz

Das Erfüllbarkeitsproblem für konjunktive Allenschen Constraints ist $\mathcal{NP}$-**vollständig**.

Beweis:

Problem ist in $\mathcal{NP}$:

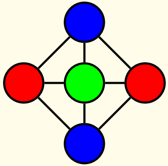
- Rate lineare Reihenfolge der Intervallanfänge und -enden
- D.h. Ordnung auf allen X_a, X_e für alle Intervalle X
- Verifiziere ob Reihenfolge das Constraint erfüllt
- Verifikation geht in Polynomialzeit

$\mathcal{NP}$-Härte:

Reduktion von 3-Färbbarkeit auf
Erfüllbarkeit von Allen-Constraints

3-Färbbarkeit:

Kann man die Knoten eines ungerichteten Graphen mit drei Farben färben, so dass benachbarte Knoten stets verschiedene Farben haben?



Beweis (Fortsetzung)

Für $G = (V, E)$ erzeuge:

Beweis (Fortsetzung)

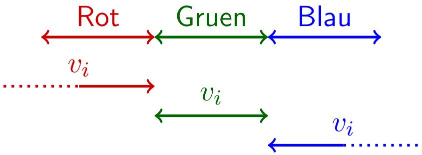
Für $G = (V, E)$ erzeuge:

- (Rot $\mathtt{m}$ Gruen) $\wedge$ (Gruen $\mathtt{m}$ Blau)

Für $G = (V, E)$ erzeuge:

- $($Rot $\mathtt{m}$ Gruen$) \wedge ($Gruen $\mathtt{m}$ Blau$)$

- Für die Knoten: $\forall v_i \in V : v_i\ \{\mathtt{m}, \equiv, \breve{\mathtt{m}}\}$ Gruen

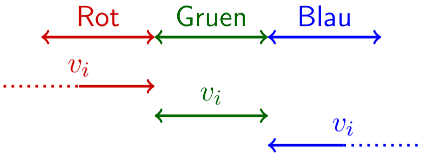


Beweis (Fortsetzung)

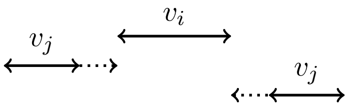
Für $G = (V, E)$ erzeuge:

- (Rot $\mathtt{m}$ Gruen) $\wedge$ (Gruen $\mathtt{m}$ Blau)

- Für die Knoten: $\forall v_i \in V : v_i \ \{\mathtt{m}, \equiv, \breve{\mathtt{m}}\}$ Gruen



- Für die Kanten: $\forall (v_i, v_j) \in E : \ v_i \ \{\mathtt{m}, \breve{\mathtt{m}}, \prec, \succ\} \ v_j$



Idee: Schränke erlaubte Relationen R für $A\ R\ B$ so ein, dass der Allen-Kalkül vollständig ist.

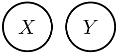
- Bereits gesehen: $R = \{r\}$ mit r Basisrelation
- Nebel & Bürckert 1995:
  - Klasse $\mathcal{H} \subseteq 2^{\mathcal{R}}$: Beinhaltet nur $R \subseteq \mathcal{R}$ deren Übersetzung in **Constraints über Endpunkten** nur **Hornklauseln** mit Literalen $a \leq b$, $a = b$ und $\neg(a = b)$ erzeugen.
  - Von den $2^{13} = 8192$ möglichen Beziehungen erfüllen 868 diese Eigenschaft
  - Werden nur $R \in \mathcal{H}$ verwendet, so ist der Allen-Kalkül vollständig.

Verbesserung des exponentiellen Verfahrens: Zerlege bei der Fallunterscheidung die Menge R in Elemente aus $\mathcal{H}$

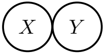
Vorteil: Kleinere mittlere Verweigungsrate
(statt 6,5 nur 2,533 (Nebel 1997))

Qualitatives räumliches Schließen

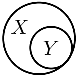
- Eindimensional: Genau die Allensche Intervalllogik
- Zweidimensional: Region-Connection-Calculus (RCC8),
  (Randell, Cui & Cohn, 1992)



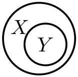
X DC Y
„disconnected“



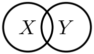
X EC Y
„externally connected“



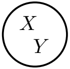
X TPP Y
„tangential proper part“



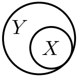
X NTPP Y
„non-tangential proper part“



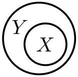
X PO Y
„partially overlapping“



X EC Y
„equal“



X TPPi Y
„tangential proper part inverse“



X NTPPi Y
„non-tangential proper part inverse“

Zutaten	{<,m}	TeigZub,	Zutaten	{<,m}	TeigRuht,	Zutaten	{<,m}	BelZub,
Zutaten	{<,m}	Sahne,	TeigRuht	{m}	TeigForm,	TeigForm	{<,m}	BelForm,
BelForm	{<,m}	Backen,	Backen	{f}	Heizen,	Sahne	{s,d}	BelZub,
Heizen	{S,o,>}	TeigRuht,	Heizen	{<,m}	Kuehlen,	Kuehlen	{<,m}	Entnehmen,
Zutaten	{<,m}	Einfett,	Zutaten	{<,m}	Heizen,	TeigZub	{<,m}	TeigForm,
BelZub	{<,m}	BelForm,	TeigZub	{<,>,m,M}	BelZub,	Einfett	{<,>,m,M}	BelZub,
Einfett	{>,M}	TeigZub,	Einfett	{<,m,M,>}	TeigForm,	Einfett	{<,>,m,M}	BelForm,
Einfett	{<,m}	TeigForm,	TeigZub	{m}	TeigRuht,	Einfett	{>,M}	Zutaten,
Backen	{m}	Kuehlen,	BelZub	{s,S,d,O,=,f}	TeigRuht,	Einfett	{>}	Sahne

Kuchen backen


```
Zutaten  {<,m}   TeigZub,  Zutaten  {<,m}         TeigRuht,   Zutaten  {<,m}      BelZub,
Zutaten  {<,m}   Sahne,    TeigRuht {m}           TeigForm,   TeigForm {<,m}      BelForm,
BelForm  {<,m}   Backen,   Backen   {f}           Heizen,     Sahne    {s,d}      BelZub,
Heizen   {S,o,>} TeigRuht, Heizen   {<,m}         Kuehlen,    Kuehlen  {<,m}      Entnehmen,
Zutaten  {<,m}   Einfett,  Zutaten  {<,m}         Heizen,     TeigZub  {<,m}      TeigForm,
BelZub   {<,m}   BelForm,  TeigZub  {<,>,m,M}     BelZub,     Einfett  {<,>,m,M}  BelZub,
Einfett  {>,M}   TeigZub,  Einfett  {<,m,M,>}     TeigForm,   Einfett  {<,>,m,M}  BelForm,
Einfett  {<,m}   TeigForm, TeigZub  {m}           TeigRuht,   Einfett  {>,M}      Zutaten,
Backen   {m}     Kuehlen,  BelZub   {s,S,d,O,=,f} TeigRuht,   Einfett  {>}        Sahne
```

Allen-Programm:

```
Max. #Modelle in der Eingabe      : 177.247.393.995.618.482.069.389.150.242.626.279.322.671.526.463.930.368
Max. #Modelle nach Allen-Abschluss: 5.898.240

Anzahl Modelle                    : 1.536
Allenscher Abschluss genau?       : True
```