

## 8. Übungsblatt

Zunächst legen wir einige grundlegende Begriffe über prädikatenlogische Formeln fest:

### Definition 1:

- In der Formel  $\forall xH$  (bzw.  $\exists xH$ ) heißt  $H$  der Wirkungsbereich des Quantors  $\forall x$  (bzw.  $\exists x$ ).
- Die Variable  $x$  kommt in  $H$  gebunden vor, wenn  $\forall x$  oder  $\exists x$  in  $H$  vorkommt und  $x$  im Wirkungsbereich eines solchen Quantors liegt.
- Die Variable  $x$  kommt in  $H$  frei vor, wenn  $x$  in  $H$  an einer Stelle vorkommt, die nicht zum Wirkungsbereich eines Quantors  $\forall x$  bzw.  $\exists x$  gehört.
- $\text{frei}(H) =_{\text{def}} \{x \mid x \text{ kommt in } H \text{ frei vor}\}$
- $\text{gebunden}(H) =_{\text{def}} \{x \mid x \text{ kommt in } H \text{ gebunden vor}\}$

### Beispiel 2:

- In  $((y + 1) = x) \rightarrow \exists z(z + 1 = y)$  kommen  $x$  und  $y$  frei und  $z$  gebunden vor.
- In  $((x = 0) \vee \exists x(x + x = x + 1))$  kommt  $x$  frei und gebunden vor.

Bearbeiten Sie nun die folgenden Fragen:

1. Definieren Sie die Mengen  $\text{frei}(H)$  und  $\text{gebunden}(H)$  auf eine andere Weise, nämlich induktiv über den Aufbau der Formeln. Beginnen Sie Ihre Definitionen von  $\text{frei}(H)$  und  $\text{gebunden}(H)$  für Terme.
2. Ein Keller (engl. stack) ist eine bekannte Datenstruktur. Sei die Signatur  $S = \{\text{IsEmpty}, \text{nullstack}, \text{top}, \text{push}, \text{pop}\}$ . Dabei ist  $\text{IsEmpty}$  ein einstelliges Prädikat,  $\text{nullstack}$  eine Konstante,  $\text{top}$  und  $\text{pop}$  einstellige Funktionen und  $\text{push}$  eine zwei-stellige Funktion.

Man beschreibe die Operationen, die auf einem Keller erlaubt sind, durch eine Formel  $F \in L^S$ , sodass jedes Modell  $I$  von  $F$  ein (abstrakter) Keller ist.

Hinweis: Ein Bestandteil der Formel könnte z.B.

$$\forall x \forall y (\text{top}(\text{push}(x, y)) = y)$$

sein. Welche Vor- und Nachteile hat solch eine formale Spezifikation eines Stacks?

Besprechung in der Übung am 9. Januar 2025